4. előadás: Számsorozatok 1.

FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B rögzített halmazok.
Függvény: olyan $\Gamma_f \subset A \times B$ részhalmaz, amelyre minden $a \in A$ esetén létezik egy és csak egy $b \in B$ úgy, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.
Hagyományos jelöléssel való kapcsolat:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto b = f(a). \end{aligned}$$

Adott f függvény

- gráfja (grafikonja): Γ_f;
- értelmezési tartománya: $D_f = A$;
- értékkészlete: azon $b \in B$ elemek R_f halmaza, amelyekhez létezik olyan $a \in A$, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.

FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B rögzített halmazok.
Függvény: olyan $\Gamma_f \subset A \times B$ részhalmaz, amelyre minden $a \in A$ esetén létezik egy és csak egy $b \in B$ úgy, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.
Hagyományos jelöléssel való kapcsolat:

$$f : A \to B$$
$$a \mapsto b = f(a).$$

Adott f függvény

- gráfja (grafikonja): Γ_f;
- értelmezési tartománya: $D_f = A$;
- értékkészlete: azon $b \in B$ elemek R_f halmaza, amelyekhez létezik olyan $a \in A$, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.

FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B rögzített halmazok.
Függvény: olyan $\Gamma_f \subset A \times B$ részhalmaz, amelyre minden $a \in A$ esetén létezik egy és csak egy $b \in B$ úgy, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.
Hagyományos jelöléssel való kapcsolat:

$$f : A \to B$$
$$a \mapsto b = f(a).$$

Adott f függvény

- gráfja (grafikonja): Γ_f;
- értelmezési tartománya: $D_f = A$;
- értékkészlete: azon $b \in B$ elemek R_f halmaza, amelyekhez létezik olyan $a \in A$, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.

FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B rögzített halmazok.
Függvény: olyan $\Gamma_f \subset A \times B$ részhalmaz, amelyre minden $a \in A$ esetén létezik egy és csak egy $b \in B$ úgy, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.
Hagyományos jelöléssel való kapcsolat:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto b = f(a). \end{aligned}$$

Adott f függvény

- gráfja (grafikonja): Γ_f;
- értelmezési tartománya: $D_f = A$;
- értékkészlete: azon $b \in B$ elemek R_f halmaza, amelyekhez létezik olyan $a \in A$, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.

FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B rögzített halmazok.
Függvény: olyan $\Gamma_f \subset A \times B$ részhalmaz, amelyre minden $a \in A$ esetén létezik egy és csak egy $b \in B$ úgy, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.
Hagyományos jelöléssel való kapcsolat:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto b = f(a). \end{aligned}$$

Adott f függvény

- gráfja (grafikonja): Γ_f;
- értelmezési tartománya: $D_f = A$;
- értékkészlete: azon $b \in B$ elemek R_f halmaza, amelyekhez létezik olyan $a \in A$, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.

FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B rögzített halmazok.
Függvény: olyan $\Gamma_f \subset A \times B$ részhalmaz, amelyre minden $a \in A$ esetén létezik egy és csak egy $b \in B$ úgy, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.
Hagyományos jelöléssel való kapcsolat:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto b = f(a). \end{aligned}$$

Adott f függvény

- gráfja (grafikonja): Γ_f;
- értelmezési tartománya: $D_f = A$;
- értékkészlete: azon $b \in B$ elemek R_f halmaza, amelyekhez létezik olyan $a \in A$, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.

FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B rögzített halmazok.
Függvény: olyan $\Gamma_f \subset A \times B$ részhalmaz, amelyre minden $a \in A$ esetén létezik egy és csak egy $b \in B$ úgy, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.
Hagyományos jelöléssel való kapcsolat:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto b = f(a). \end{aligned}$$

Adott f függvény

- gráfja (grafikonja): Γ_f;
- értelmezési tartománya: $D_f = A$;
- értékkészlete: azon $b \in B$ elemek R_f halmaza, amelyekhez létezik olyan $a \in A$, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI, INVERZ FÜGGVÉNY

- Ha $R_f = B$, akkor f-et szürjektívnek hívjuk.
- Ha bármely $a_1 \neq a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$, akkor f-et injektívnek hívjuk.
- Ha f injektív és szürjektív is, akkor azt mondjuk hogy f bijektív (kölcsönösen egyértelmű).
- Ha f bijektív, akkor minden $b \in B$-hez létezik pontosan egy olyan $a \in A$, amelyre $b = f(a)$. Ekkor tehát értelmezhetjük f inverz függvényét:

$$\begin{aligned} f^{-1} &: B \to A \\ &b \mapsto \text{ az egyetlen olyan } a \in A, \text{amelyre } b = f(a). \end{aligned}$$

Ha f bijektív, akkor f^{-1} is az.

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI, INVERZ FÜGGVÉNY

- Ha $R_f = B$, akkor f-et szürjektívnek hívjuk.
- Ha bármely $a_1 \neq a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$, akkor f-et injektívnek hívjuk.
- Ha f injektív és szürjektív is, akkor azt mondjuk hogy f bijektív (kölcsönösen egyértelmű).
- Ha f bijektív, akkor minden $b \in B$-hez létezik pontosan egy olyan $a \in A$, amelyre $b = f(a)$. Ekkor tehát értelmezhetjük f inverz függvényét:

$$f^{-1} : B \to A$$
$$b \mapsto \text{ az egyetlen olyan } a \in A, \text{amelyre } b = f(a).$$

Ha f bijektív, akkor f^{-1} is az.

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI, INVERZ FÜGGVÉNY

- Ha $R_f = B$, akkor f-et szürjektívnek hívjuk.
- Ha bármely $a_1 \neq a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$, akkor f-et injektívnek hívjuk.
- Ha f injektív és szürjektív is, akkor azt mondjuk hogy f bijektív (kölcsönösen egyértelmű).
- Ha f bijektív, akkor minden $b \in B$-hez létezik pontosan egy olyan $a \in A$, amelyre $b = f(a)$. Ekkor tehát értelmezhetjük f inverz függvényét:

$$f^{-1} : B \to A$$
$$b \mapsto \text{ az egyetlen olyan } a \in A, \text{amelyre } b = f(a).$$

Ha f bijektív, akkor f^{-1} is az.

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI, INVERZ FÜGGVÉNY

- Ha $R_f = B$, akkor f-et szürjektívnek hívjuk.
- Ha bármely $a_1 \neq a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$, akkor f-et injektívnek hívjuk.
- Ha f injektív és szürjektív is, akkor azt mondjuk hogy f bijektív (kölcsönösen egyértelmű).
- Ha f bijektív, akkor minden $b \in B$-hez létezik pontosan egy olyan $a \in A$, amelyre $b = f(a)$. Ekkor tehát értelmezhetjük f inverz függvényét:

$$\begin{aligned} f^{-1} &: B \to A \\ & b \mapsto \text{ az egyetlen olyan } a \in A, \text{amelyre } b = f(a). \end{aligned}$$

Ha f bijektív, akkor f^{-1} is az.

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI, INVERZ FÜGGVÉNY

- Ha $R_f = B$, akkor f-et szürjektívnek hívjuk.
- Ha bármely $a_1 \neq a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$, akkor f-et injektívnek hívjuk.
- Ha f injektív és szürjektív is, akkor azt mondjuk hogy f bijektív (kölcsönösen egyértelmű).
- Ha f bijektív, akkor minden $b \in B$-hez létezik pontosan egy olyan $a \in A$, amelyre $b = f(a)$. Ekkor tehát értelmezhetjük f inverz függvényét:

$$f^{-1} : B \to A$$
$$b \mapsto \text{ az egyetlen olyan } a \in A, \text{amelyre } b = f(a).$$

Ha f bijektív, akkor f^{-1} is az.

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI, INVERZ FÜGGVÉNY

- Ha $R_f = B$, akkor f-et szürjektívnek hívjuk.
- Ha bármely $a_1 \neq a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$, akkor f-et injektívnek hívjuk.
- Ha f injektív és szürjektív is, akkor azt mondjuk hogy f bijektív (kölcsönösen egyértelmű).
- Ha f bijektív, akkor minden $b \in B$-hez létezik pontosan egy olyan $a \in A$, amelyre $b = f(a)$. Ekkor tehát értelmezhetjük f inverz függvényét:

$$\begin{aligned} f^{-1} &: B \to A \\ & b \mapsto \text{ az egyetlen olyan } a \in A, \text{amelyre } b = f(a). \end{aligned}$$

Ha f bijektív, akkor f^{-1} is az.

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI, INVERZ FÜGGVÉNY

- Ha $R_f = B$, akkor f-et szürjektívnek hívjuk.
- Ha bármely $a_1 \neq a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$, akkor f-et injektívnek hívjuk.
- Ha f injektív és szürjektív is, akkor azt mondjuk hogy f bijektív (kölcsönösen egyértelmű).
- Ha f bijektív, akkor minden $b \in B$-hez létezik pontosan egy olyan $a \in A$, amelyre $b = f(a)$. Ekkor tehát értelmezhetjük f inverz függvényét:

$$\begin{aligned} f^{-1} &: B \to A \\ & b \mapsto \text{ az egyetlen olyan } a \in A, \text{amelyre } b = f(a). \end{aligned}$$

Ha f bijektív, akkor f^{-1} is az.

ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B, C rögzített halmazok és

$$f : A \to B, \quad g : B \to C$$

függvények. Ekkor értelmezhetjük a következő függvényt

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

$g \circ f$: f és g összetett (komponált) függvénye.

PÉLDA

Ha $f(x) = \sqrt{x} - 1$ *és* $g(x) = x^3 + 1$*, akkor*
$(g \circ f)(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^3 + 1$ *és* $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 1$.

ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B, C rögzített halmazok és

$$f : A \to B, \quad g : B \to C$$

függvények. Ekkor értelmezhetjük a következő függvényt

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

$g \circ f$: f és g összetett (komponált) függvénye.

PÉLDA

Ha $f(x) = \sqrt{x} - 1$ *és* $g(x) = x^3 + 1$, *akkor*
$(g \circ f)(x) = (\sqrt{x} - 1)^3 + 1$ *és* $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 1$.

ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B, C rögzített halmazok és

$$f : A \to B, \quad g : B \to C$$

függvények. Ekkor értelmezhetjük a következő függvényt

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

$g \circ f$: f és g összetett (komponált) függvénye.

PÉLDA

Ha $f(x) = \sqrt{x} - 1$ és $g(x) = x^3 + 1$, akkor $(g \circ f)(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^3 + 1$ és $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 1$.

ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B, C rögzített halmazok és

$$f : A \to B, \quad g : B \to C$$

függvények. Ekkor értelmezhetjük a következő függvényt

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

$g \circ f$: f és g összetett (komponált) függvénye.

PÉLDA

Ha $f(x) = \sqrt{x} - 1$ *és* $g(x) = x^3 + 1$, *akkor* $(g \circ f)(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^3 + 1$ *és* $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 1$.

ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B, C rögzített halmazok és

$$f : A \to B, \quad g : B \to C$$

függvények. Ekkor értelmezhetjük a következő függvényt

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

$g \circ f$: f és g összetett (komponált) függvénye.

PÉLDA

Ha $f(x) = \sqrt{x} - 1$ *és* $g(x) = x^3 + 1$, *akkor*
$(g \circ f)(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^3 + 1$ *és* $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 1.$

ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK

Legyenek A, B, C rögzített halmazok és

$$f : A \to B, \quad g : B \to C$$

függvények. Ekkor értelmezhetjük a következő függvényt

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

$g \circ f$: f és g **összetett (komponált) függvénye**.

PÉLDA

Ha $f(x) = \sqrt{x} - 1$ *és* $g(x) = x^3 + 1$, *akkor*
$(g \circ f)(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^3 + 1$ *és* $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 1$.

SZÁMSOROZATOK

Egy olyan f függvényt, amelynek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$ (esetleg $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$), és értékkészlete részhalmaza a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának, (végtelen) számsorozatnak nevezünk.

JELÖLÉS

$f(n) = a_n, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra;
- $$\left(1, -\frac{1}{2}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\right)$$

SZÁMSOROZATOK

Egy olyan f függvényt, amelynek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$ (esetleg $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$), és értékkészlete részhalmaza a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának, (végtelen) számsorozatnak nevezünk.

JELÖLÉS

$f(n) = a_n, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra;
- $$\left(1, -\frac{1}{2}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\right)$$

SZÁMSOROZATOK

Egy olyan f függvényt, amelynek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$ (esetleg $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$), és értékkészlete részhalmaza a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának, (végtelen) számsorozatnak nevezünk.

JELÖLÉS

$f(n) = a_n, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n}$ *minden* $n \in \mathbb{N}^+$*-ra;*
- $$\left(1, -\frac{1}{2}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\right)$$

SZÁMSOROZATOK

Egy olyan f függvényt, amelynek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$ (esetleg $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$), és értékkészlete részhalmaza a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának, (végtelen) számsorozatnak nevezünk.

JELÖLÉS

$f(n) = a_n, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra;
- $$\left(1, -\frac{1}{2}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\right)$$

SZÁMSOROZATOK

Egy olyan f függvényt, amelynek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$ (esetleg $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$), és értékkészlete részhalmaza a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának, (végtelen) számsorozatnak nevezünk.

JELÖLÉS

$f(n) = a_n, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n}$ *minden* $n \in \mathbb{N}^+$*-ra;*
- $$\left(1, -\frac{1}{2}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\right)$$

MONOTON SOROZATOK

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat (monoton) növő, ha minden n esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Hasonlóan, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat csökkenő, ha minden n esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Továbbá, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, ha növő vagy csökkenő.

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat szigorúan növő (illetve csökkenő), ha minden n esetén $a_n < a_{n+1}$ (illetve $a_n > a_{n+1}$). Végül, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton, ha szigorúan növő vagy szigorúan csökkenő (e két lehetőség legfeljebb egyike teljesülhet).

Minden szigorúan monoton sorozat egyúttal monoton is.

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n} (n \geq 1)$ *szigorúan csökkenő.*
- $b_n = 1$ *csökkenő és növő is, de nem szigorúan.*
- $c_n = (-1)^n$ *nem monoton.*

MONOTON SOROZATOK

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat (monoton) növő, ha minden n esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Hasonlóan, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat csökkenő, ha minden n esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

Továbbá, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, ha növő vagy csökkenő.

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat szigorúan növő (illetve csökkenő), ha minden n esetén $a_n < a_{n+1}$ (illetve $a_n > a_{n+1}$). Végül, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton, ha szigorúan növő vagy szigorúan csökkenő (e két lehetőség legfeljebb egyike teljesülhet).

Minden szigorúan monoton sorozat egyúttal monoton is.

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n} (n \geq 1)$ *szigorúan csökkenő.*
- $b_n = 1$ *csökkenő és növő is, de nem szigorúan.*
- $c_n = (-1)^n$ *nem monoton.*

MONOTON SOROZATOK

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat (monoton) növő, ha minden n esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Hasonlóan, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat csökkenő, ha minden n esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Továbbá, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, ha növő vagy csökkenő.

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat szigorúan növő (illetve csökkenő), ha minden n esetén $a_n < a_{n+1}$ (illetve $a_n > a_{n+1}$). Végül, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton, ha szigorúan növő vagy szigorúan csökkenő (e két lehetőség legfeljebb egyike teljesülhet).

Minden szigorúan monoton sorozat egyúttal monoton is.

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n} (n \geq 1)$ *szigorúan csökkenő.*
- $b_n = 1$ *csökkenő és növő is, de nem szigorúan.*
- $c_n = (-1)^n$ *nem monoton.*

MONOTON SOROZATOK

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat (monoton) növő, ha minden n esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Hasonlóan, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat csökkenő, ha minden n esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Továbbá, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, ha növő vagy csökkenő.
Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat szigorúan növő (illetve csökkenő), ha minden n esetén $a_n < a_{n+1}$ (illetve $a_n > a_{n+1}$). Végül, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton, ha szigorúan növő vagy szigorúan csökkenő (e két lehetőség legfeljebb egyike teljesülhet).
Minden szigorúan monoton sorozat egyúttal monoton is.

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n} (n \geq 1)$ *szigorúan csökkenő.*
- $b_n = 1$ *csökkenő és növő is, de nem szigorúan.*
- $c_n = (-1)^n$ *nem monoton.*

MONOTON SOROZATOK

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat (monoton) növő, ha minden n esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Hasonlóan, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat csökkenő, ha minden n esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Továbbá, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, ha növő vagy csökkenő.
Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat szigorúan növő (illetve csökkenő), ha minden n esetén $a_n < a_{n+1}$ (illetve $a_n > a_{n+1}$). Végül, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton, ha szigorúan növő vagy szigorúan csökkenő (e két lehetőség legfeljebb egyike teljesülhet).
Minden szigorúan monoton sorozat egyúttal monoton is.

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n} (n \geq 1)$ *szigorúan csökkenő.*
- $b_n = 1$ *csökkenő és növő is, de nem szigorúan.*
- $c_n = (-1)^n$ *nem monoton.*

MONOTON SOROZATOK

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat (monoton) növő, ha minden n esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Hasonlóan, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat csökkenő, ha minden n esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Továbbá, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, ha növő vagy csökkenő.
Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat szigorúan növő (illetve csökkenő), ha minden n esetén $a_n < a_{n+1}$ (illetve $a_n > a_{n+1}$). Végül, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton, ha szigorúan növő vagy szigorúan csökkenő (e két lehetőség legfeljebb egyike teljesülhet).
Minden szigorúan monoton sorozat egyúttal monoton is.

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n} (n \geq 1)$ *szigorúan csökkenő.*
- $b_n = 1$ *csökkenő és növő is, de nem szigorúan.*
- $c_n = (-1)^n$ *nem monoton.*

MONOTON SOROZATOK

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat (monoton) növő, ha minden n esetén $a_n \le a_{n+1}$. Hasonlóan, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat csökkenő, ha minden n esetén $a_n \ge a_{n+1}$. Továbbá, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, ha növő vagy csökkenő.
Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat szigorúan növő (illetve csökkenő), ha minden n esetén $a_n < a_{n+1}$ (illetve $a_n > a_{n+1}$). Végül, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton, ha szigorúan növő vagy szigorúan csökkenő (e két lehetőség legfeljebb egyike teljesülhet).
Minden szigorúan monoton sorozat egyúttal monoton is.

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n} (n \ge 1)$ *szigorúan csökkenő.*
- $b_n = 1$ *csökkenő és növő is, de nem szigorúan.*
- $c_n = (-1)^n$ *nem monoton.*

MONOTON SOROZATOK

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat (monoton) növő, ha minden n esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Hasonlóan, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat csökkenő, ha minden n esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Továbbá, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, ha növő vagy csökkenő.
Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat szigorúan növő (illetve csökkenő), ha minden n esetén $a_n < a_{n+1}$ (illetve $a_n > a_{n+1}$). Végül, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton, ha szigorúan növő vagy szigorúan csökkenő (e két lehetőség legfeljebb egyike teljesülhet).
Minden szigorúan monoton sorozat egyúttal monoton is.

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n} (n \geq 1)$ *szigorúan csökkenő.*
- $b_n = 1$ *csökkenő és növő is, de nem szigorúan.*
- $c_n = (-1)^n$ *nem monoton.*

MONOTON SOROZATOK

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat (monoton) növő, ha minden n esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Hasonlóan, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat csökkenő, ha minden n esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Továbbá, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, ha növő vagy csökkenő.
Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat szigorúan növő (illetve csökkenő), ha minden n esetén $a_n < a_{n+1}$ (illetve $a_n > a_{n+1}$). Végül, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton, ha szigorúan növő vagy szigorúan csökkenő (e két lehetőség legfeljebb egyike teljesülhet).
Minden szigorúan monoton sorozat egyúttal monoton is.

PÉLDA

- $a_n = \frac{1}{n} (n \geq 1)$ *szigorúan csökkenő.*
- $b_n = 1$ *csökkenő és növő is, de nem szigorúan.*
- $c_n = (-1)^n$ *nem monoton.*

KORLÁTOS SZÁMHALMAZOK, SOROZATOK

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- H felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $x \leq K$. Egy ilyen K: egy felső korlát.
- H alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $k \leq x$. Egy ilyen k: egy alsó korlát.
- H korlátos, ha felülről korlátos és alulról korlátos.

Egy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ végtelen számsorozat

- felülről korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos;
- alulról korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos;
- korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos.

KORLÁTOS SZÁMHALMAZOK, SOROZATOK

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- H felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $x \leq K$. Egy ilyen K: egy felső korlát.
- H alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $k \leq x$. Egy ilyen k: egy alsó korlát.
- H korlátos, ha felülről korlátos és alulról korlátos.

Egy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ végtelen számsorozat

- felülről korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos;
- alulról korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos;
- korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos.

KORLÁTOS SZÁMHALMAZOK, SOROZATOK

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- H felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $x \leq K$. Egy ilyen K: egy felső korlát.
- H alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $k \leq x$. Egy ilyen k: egy alsó korlát.
- H korlátos, ha felülről korlátos és alulról korlátos.

Egy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ végtelen számsorozat

- felülről korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos;
- alulról korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos;
- korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos.

KORLÁTOS SZÁMHALMAZOK, SOROZATOK

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- H felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $x \leq K$. Egy ilyen K: egy felső korlát.
- H alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $k \leq x$. Egy ilyen k: egy alsó korlát.
- H korlátos, ha felülről korlátos és alulról korlátos.

Egy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ végtelen számsorozat

- felülről korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos;
- alulról korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos;
- korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos.

KORLÁTOS SZÁMHALMAZOK, SOROZATOK

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- H felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $x \leq K$. Egy ilyen K: egy felső korlát.
- H alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $k \leq x$. Egy ilyen k: egy alsó korlát.
- H korlátos, ha felülről korlátos és alulról korlátos.

Egy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ végtelen számsorozat

- felülről korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos;
- alulról korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos;
- korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos.

KORLÁTOS SZÁMHALMAZOK, SOROZATOK

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- H felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $x \leq K$. Egy ilyen K: egy felső korlát.
- H alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $k \leq x$. Egy ilyen k: egy alsó korlát.
- H korlátos, ha felülről korlátos és alulról korlátos.

Egy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ végtelen számsorozat

- felülről korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos;
- alulról korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos;
- korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos.

KORLÁTOS SZÁMHALMAZOK, SOROZATOK

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- H felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $x \leq K$. Egy ilyen K: egy felső korlát.
- H alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $k \leq x$. Egy ilyen k: egy alsó korlát.
- H korlátos, ha felülről korlátos és alulról korlátos.

Egy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ végtelen számsorozat

- felülről korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos;
- alulról korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos;
- korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos.

KORLÁTOS SZÁMHALMAZOK, SOROZATOK

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- H felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $x \leq K$. Egy ilyen K: egy felső korlát.
- H alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $k \leq x$. Egy ilyen k: egy alsó korlát.
- H korlátos, ha felülről korlátos és alulról korlátos.

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen számsorozat

- felülről korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos;
- alulról korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos;
- korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos.

KORLÁTOS SZÁMHALMAZOK, SOROZATOK

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- H felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $x \leq K$. Egy ilyen K: egy felső korlát.
- H alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $k \leq x$. Egy ilyen k: egy alsó korlát.
- H korlátos, ha felülről korlátos és alulról korlátos.

Egy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ végtelen számsorozat

- felülről korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos;
- alulról korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos;
- korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos.

KORLÁTOS SZÁMHALMAZOK, SOROZATOK

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- H felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $x \leq K$. Egy ilyen K: egy felső korlát.
- H alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $k \leq x$. Egy ilyen k: egy alsó korlát.
- H korlátos, ha felülről korlátos és alulról korlátos.

Egy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ végtelen számsorozat

- felülről korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos;
- alulról korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos;
- korlátos, ha $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos.

LEGKISEBB FELSŐ ÉS LEGNAGYOBB ALSÓ KORLÁT

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ekkor $K \in \mathbb{R}$ legkisebb felső korlátja H-nak, ha

- K felső korlátja H-nak,
- és minden más $M \neq K$ felső korlátjára H-nak igaz, hogy $K < M$.

Hasonlóan értelmezhető egy alulról korlátos számhalmaz legnagyobb alsó korlátja.

TÉTEL

Minden $H \subset \mathbb{R}$ felülről (illetve alulról) korlátos számhalmaznak létezik legkisebb felső (illetve legnagyobb alsó) korlátja $\mathbb{R}$-ben.

A H halmaz legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátját rendre $\sup(H)$ és $\inf(H)$ jelöli.

LEGKISEBB FELSŐ ÉS LEGNAGYOBB ALSÓ KORLÁT

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ekkor $K \in \mathbb{R}$ legkisebb felső korlátja H-nak, ha

- K felső korlátja H-nak,
- és minden más $M \neq K$ felső korlátjára H-nak igaz, hogy $K < M$.

Hasonlóan értelmezhető egy alulról korlátos számhalmaz legnagyobb alsó korlátja.

TÉTEL

Minden $H \subset \mathbb{R}$ felülről (illetve alulról) korlátos számhalmaznak létezik legkisebb felső (illetve legnagyobb alsó) korlátja $\mathbb{R}$-ben.

A H halmaz legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátját rendre $\sup(H)$ és $\inf(H)$ jelöli.

LEGKISEBB FELSŐ ÉS LEGNAGYOBB ALSÓ KORLÁT

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ekkor $K \in \mathbb{R}$ legkisebb felső korlátja H-nak, ha

- K felső korlátja H-nak,
- és minden más $M \neq K$ felső korlátjára H-nak igaz, hogy $K < M$.

Hasonlóan értelmezhető egy alulról korlátos számhalmaz legnagyobb alsó korlátja.

TÉTEL

Minden $H \subset \mathbb{R}$ felülről (illetve alulról) korlátos számhalmaznak létezik legkisebb felső (illetve legnagyobb alsó) korlátja $\mathbb{R}$-ben.

A H halmaz legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátját rendre $\sup(H)$ és $\inf(H)$ jelöli.

LEGKISEBB FELSŐ ÉS LEGNAGYOBB ALSÓ KORLÁT

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ekkor $K \in \mathbb{R}$ legkisebb felső korlátja H-nak, ha

- K felső korlátja H-nak,
- és minden más $M \neq K$ felső korlátjára H-nak igaz, hogy $K < M$.

Hasonlóan értelmezhető egy alulról korlátos számhalmaz legnagyobb alsó korlátja.

TÉTEL

Minden $H \subset \mathbb{R}$ felülről (illetve alulról) korlátos számhalmaznak létezik legkisebb felső (illetve legnagyobb alsó) korlátja $\mathbb{R}$-ben.

A H halmaz legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátját rendre $\sup(H)$ és $\inf(H)$ jelöli.

LEGKISEBB FELSŐ ÉS LEGNAGYOBB ALSÓ KORLÁT

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ekkor $K \in \mathbb{R}$ legkisebb felső korlátja H-nak, ha

- K felső korlátja H-nak,
- és minden más $M \neq K$ felső korlátjára H-nak igaz, hogy $K < M$.

Hasonlóan értelmezhető egy alulról korlátos számhalmaz legnagyobb alsó korlátja.

TÉTEL

Minden $H \subset \mathbb{R}$ felülről (illetve alulról) korlátos számhalmaznak létezik legkisebb felső (illetve legnagyobb alsó) korlátja $\mathbb{R}$-ben.

A H halmaz legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátját rendre $\sup(H)$ és $\inf(H)$ jelöli.

Legkisebb felső és legnagyobb alsó korlát

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ekkor $K \in \mathbb{R}$ legkisebb felső korlátja H-nak, ha

- K felső korlátja H-nak,
- és minden más $M \neq K$ felső korlátjára H-nak igaz, hogy $K < M$.

Hasonlóan értelmezhető egy alulról korlátos számhalmaz legnagyobb alsó korlátja.

Tétel

Minden $H \subset \mathbb{R}$ felülről (illetve alulról) korlátos számhalmaznak létezik legkisebb felső (illetve legnagyobb alsó) korlátja $\mathbb{R}$-ben.

A H halmaz legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátját rendre $\sup(H)$ és $\inf(H)$ jelöli.

KONVERGENCIA

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál a-hoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

JELÖLÉS

$$a_n \to a \ (n \to \infty), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ amelyre $a_n \to a$ $(n \to \infty)$; az a számot ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértékének hívjuk. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens, azt mondjuk, hogy divergens.

Minden állandó $a_n = a$ sorozat nyilvánvalóan tart a-hoz.

KONVERGENCIA

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál a-hoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

JELÖLÉS

$$a_n \to a \ (n \to \infty), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ amelyre $a_n \to a$ $(n \to \infty)$; az a számot ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértékének hívjuk. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens, azt mondjuk, hogy divergens.

Minden állandó $a_n = a$ sorozat nyilvánvalóan tart a-hoz.

KONVERGENCIA

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál a-hoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

JELÖLÉS

$$a_n \to a\ (n \to \infty), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ amelyre $a_n \to a$ $(n \to \infty)$; az a számot ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértékének hívjuk. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens, azt mondjuk, hogy divergens.

Minden állandó $a_n = a$ sorozat nyilvánvalóan tart a-hoz.

KONVERGENCIA

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál a-hoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

JELÖLÉS

$$a_n \to a \ (n \to \infty), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ amelyre $a_n \to a$ $(n \to \infty)$; az a számot ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértékének hívjuk. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens, azt mondjuk, hogy divergens.

Minden állandó $a_n = a$ sorozat nyilvánvalóan tart a-hoz.

KONVERGENCIA

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál a-hoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

JELÖLÉS

$$a_n \to a \ (n \to \infty), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ amelyre $a_n \to a$ $(n \to \infty)$; az a számot ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértékének hívjuk. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens, azt mondjuk, hogy divergens.

Minden állandó $a_n = a$ sorozat nyilvánvalóan tart a-hoz.

KONVERGENCIA

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál a-hoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

JELÖLÉS

$$a_n \to a \; (n \to \infty), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ amelyre $a_n \to a$ $(n \to \infty)$; az a számot ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértékének hívjuk. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens, azt mondjuk, hogy divergens.

Minden állandó $a_n = a$ sorozat nyilvánvalóan tart a-hoz.

KONVERGENCIA

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál a-hoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

JELÖLÉS

$$a_n \to a \ (n \to \infty), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ amelyre $a_n \to a$ $(n \to \infty)$; az a számot ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértékének hívjuk. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens, azt mondjuk, hogy divergens.

Minden állandó $a_n = a$ sorozat nyilvánvalóan tart a-hoz.

KONVERGENCIA

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál a-hoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

JELÖLÉS

$$a_n \to a \ (n \to \infty), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ amelyre $a_n \to a$ $(n \to \infty)$; az a számot ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértékének hívjuk. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens, azt mondjuk, hogy divergens.

Minden állandó $a_n = a$ sorozat nyilvánvalóan tart a-hoz.

Konvergencia

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál a-hoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Jelölés

$$a_n \to a \ (n \to \infty), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ amelyre $a_n \to a$ $(n \to \infty)$; az a számot ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértékének hívjuk. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens, azt mondjuk, hogy divergens.

Minden állandó $a_n = a$ sorozat nyilvánvalóan tart a-hoz.

KONVERGENCIA

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál a-hoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

JELÖLÉS

$$a_n \to a\ (n \to \infty), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ amelyre $a_n \to a$ $(n \to \infty)$; az a számot ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértékének hívjuk. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens, azt mondjuk, hogy divergens.

Minden állandó $a_n = a$ sorozat nyilvánvalóan tart a-hoz.

KONVERGENCIA

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál a-hoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

JELÖLÉS

$$a_n \to a \ (n \to \infty), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ amelyre $a_n \to a \ (n \to \infty)$; az a számot ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértékének hívjuk. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens, azt mondjuk, hogy divergens.

Minden állandó $a_n = a$ sorozat nyilvánvalóan tart a-hoz.

PÉLDA KONVERGENS SOROZATRA

Legyen $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Legyen ekkor

$$n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Látjuk, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \left|\frac{1}{n_\varepsilon}\right| = \varepsilon.$$

Ugyanez a gondolatmenet mutatja azt is, hogy $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ is tart 0-hoz.

PÉLDA KONVERGENS SOROZATRA

Legyen $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Legyen ekkor

$$n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Látjuk, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \left|\frac{1}{n_\varepsilon}\right| = \varepsilon.$$

Ugyanez a gondolatmenet mutatja azt is, hogy $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ is tart 0-hoz.

PÉLDA KONVERGENS SOROZATRA

Legyen $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Legyen ekkor

$$n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Látjuk, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \left|\frac{1}{n_\varepsilon}\right| = \varepsilon.$$

Ugyanez a gondolatmenet mutatja azt is, hogy $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ is tart 0-hoz.

PÉLDA KONVERGENS SOROZATRA

Legyen $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Legyen ekkor

$$n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Látjuk, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \left|\frac{1}{n_\varepsilon}\right| = \varepsilon.$$

Ugyanez a gondolatmenet mutatja azt is, hogy $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ is tart 0-hoz.

PÉLDA KONVERGENS SOROZATRA

Legyen $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Legyen ekkor

$$n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Látjuk, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \left|\frac{1}{n_\varepsilon}\right| = \varepsilon.$$

Ugyanez a gondolatmenet mutatja azt is, hogy $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ is tart 0-hoz.

Példa konvergens sorozatra

Legyen $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Legyen ekkor

$$n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Látjuk, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \left|\frac{1}{n_\varepsilon}\right| = \varepsilon.$$

Ugyanez a gondolatmenet mutatja azt is, hogy $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ is tart 0-hoz.

PÉLDA KONVERGENS SOROZATRA

Legyen $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Legyen ekkor

$$n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Látjuk, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \left| \frac{1}{n_\varepsilon} \right| = \varepsilon.$$

Ugyanez a gondolatmenet mutatja azt is, hogy $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ is tart 0-hoz.

PÉLDA KONVERGENS SOROZATRA

Legyen $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Legyen ekkor

$$n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Látjuk, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \left|\frac{1}{n_\varepsilon}\right| = \varepsilon.$$

Ugyanez a gondolatmenet mutatja azt is, hogy $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ is tart 0-hoz.

PÉLDA KONVERGENS SOROZATRA

Legyen $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Legyen ekkor

$$n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Látjuk, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \left|\frac{1}{n_\varepsilon}\right| = \varepsilon.$$

Ugyanez a gondolatmenet mutatja azt is, hogy $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ is tart 0-hoz.

Konvergencia a végtelenbe

Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy divergál $+\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n > K.$$

Hasonlóan, a_n tart vagy divergál $-\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n < K.$$

KONVERGENCIA A VÉGTELENBE

Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy divergál $+\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n > K.$$

Hasonlóan, a_n tart vagy divergál $-\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n < K.$$

KONVERGENCIA A VÉGTELENBE

Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy divergál $+\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n > K.$$

Hasonlóan, a_n tart vagy divergál $-\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n < K.$$

KONVERGENCIA A VÉGTELENBE

Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy divergál $+\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n > K.$$

Hasonlóan, a_n tart vagy divergál $-\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n < K.$$

KONVERGENCIA A VÉGTELENBE

Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy divergál $+\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n > K.$$

Hasonlóan, a_n tart vagy divergál $-\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n < K.$$

Konvergencia a végtelenbe

Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy divergál $+\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n > K.$$

Hasonlóan, a_n tart vagy divergál $-\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n < K.$$

KONVERGENCIA A VÉGTELENBE

Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy divergál $+\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n > K.$$

Hasonlóan, a_n tart vagy divergál $-\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n < K.$$

KONVERGENCIA A VÉGTELENBE

Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy divergál $+\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n > K.$$

Hasonlóan, a_n tart vagy divergál $-\infty$-be, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $n_K \in \mathbb{R}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > n_K$ esetén

$$a_n < K.$$

PÉLDÁK VÉGTELENBE DIVERGÁLÓ SOROZATRA

- Az $a_n = n$ sorozat divergál $+\infty$-be.
- A $b_n = -n^2$ sorozat divergál $-\infty$-be.
- A $c_n = (-1)^n n$ sorozat nem divergál sem $+\infty$-be sem $-\infty$-be.

Példák végtelenbe divergáló sorozatra

- Az $a_n = n$ sorozat divergál $+\infty$-be.
- A $b_n = -n^2$ sorozat divergál $-\infty$-be.
- A $c_n = (-1)^n n$ sorozat nem divergál sem $+\infty$-be sem $-\infty$-be.

PÉLDÁK VÉGTELENBE DIVERGÁLÓ SOROZATRA

- Az $a_n = n$ sorozat divergál $+\infty$-be.
- A $b_n = -n^2$ sorozat divergál $-\infty$-be.
- A $c_n = (-1)^n n$ sorozat nem divergál sem $+\infty$-be sem $-\infty$-be.

MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK KONVERGENCIÁJA

TÉTEL

Minden monoton és korlátos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Emellett ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértéke $\sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, és ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökkenő, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértéke $\inf(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bizonyítás.
Tegyük fel például, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növekvő. Jelöljük a-val a legkisebb felső korlátját. Be kell látnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Tegyük fel, hogy (a_n) határértéke nem a, azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ számhoz alkalmas $n > n_\varepsilon$ esetén

$$a - a_n = |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK KONVERGENCIÁJA

TÉTEL

Minden monoton és korlátos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens. Emellett ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton növő, akkor* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *határértéke* $\sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *és ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton csökkenő, akkor* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *határértéke* $\inf(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bizonyítás.

Tegyük fel például, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növekvő. Jelöljük a-val a legkisebb felső korlátját. Be kell látnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Tegyük fel, hogy (a_n) határértéke nem a, azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ számhoz alkalmas $n > n_\varepsilon$ esetén

$$a - a_n = |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK KONVERGENCIÁJA

TÉTEL

Minden monoton és korlátos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Emellett ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértéke $\sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, és ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökkenő, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértéke $\inf(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bizonyítás.

Tegyük fel például, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növekvő. Jelöljük a-val a legkisebb felső korlátját. Be kell látnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Tegyük fel, hogy (a_n) határértéke nem a, azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ számhoz alkalmas $n > n_\varepsilon$ esetén

$$a - a_n = |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK KONVERGENCIÁJA

TÉTEL

Minden monoton és korlátos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens. Emellett ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton növő, akkor* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *határértéke* $\sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, és ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton csökkenő, akkor* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *határértéke* $\inf(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bizonyítás.

Tegyük fel például, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növekvő. Jelöljük a-val a legkisebb felső korlátját. Be kell látnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Tegyük fel, hogy (a_n) határértéke nem a, azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ számhoz alkalmas $n > n_\varepsilon$ esetén

$$a - a_n = |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK KONVERGENCIÁJA

TÉTEL

Minden monoton és korlátos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Emellett ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértéke $\sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, és ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökkenő, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértéke* $\inf(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bizonyítás.

Tegyük fel például, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növekvő. Jelöljük a-val a legkisebb felső korlátját. Be kell látnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Tegyük fel, hogy (a_n) határértéke nem a, azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ számhoz alkalmas $n > n_\varepsilon$ esetén

$$a - a_n = |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK KONVERGENCIÁJA

TÉTEL

Minden monoton és korlátos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens. Emellett ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton növő, akkor* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *határértéke* $\sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, és ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton csökkenő, akkor* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *határértéke* $\inf(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bizonyítás.

Tegyük fel például, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növekvő. Jelöljük a-val a legkisebb felső korlátját. Be kell látnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Tegyük fel, hogy (a_n) határértéke nem a, azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ számhoz alkalmas $n > n_\varepsilon$ esetén

$$a - a_n = |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Monoton és korlátos sorozatok konvergenciája

Tétel

Minden monoton és korlátos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Emellett ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértéke $\sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, és ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökkenő, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértéke $\inf(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bizonyítás.

Tegyük fel például, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növekvő. Jelöljük a-val a legkisebb felső korlátját. Be kell látnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Tegyük fel, hogy (a_n) határértéke nem a, azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ számhoz alkalmas $n > n_\varepsilon$ esetén

$$a - a_n = |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK KONVERGENCIÁJA

TÉTEL

Minden monoton és korlátos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens. Emellett ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton növő, akkor* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *határértéke* $\sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *és ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton csökkenő, akkor* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *határértéke* $\inf(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bizonyítás.

Tegyük fel például, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növekvő. Jelöljük a-val a legkisebb felső korlátját. Be kell látnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Tegyük fel, hogy (a_n) határértéke nem a, azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ számhoz alkalmas $n > n_\varepsilon$ esetén

$$a - a_n = |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK KONVERGENCIÁJA

TÉTEL

Minden monoton és korlátos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Emellett ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértéke $\sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, és ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökkenő, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértéke $\inf(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bizonyítás.

Tegyük fel például, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növekvő. Jelöljük a-val a legkisebb felső korlátját. Be kell látnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Tegyük fel, hogy (a_n) határértéke nem a, azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ számhoz alkalmas $n > n_\varepsilon$ esetén

$$a - a_n = |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK KONVERGENCIÁJA 2.

Bizonyítás vége.
De ekkor a monotonitás miatt minden n_ε-ra

$$a - a_{n_\varepsilon} \geq a - a_n \geq \varepsilon$$

is teljesülne.
Előbbi egyenlőtlenség átrendezéséből azt kapnánk, hogy minden n_ε-ra teljesül

$$a_{n_\varepsilon} \leq a - \varepsilon.$$

Ebből viszont az következne, hogy $a - \varepsilon$ is felső korlátja lenne (a_n)-nek, ellentmondva a választásának.

MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK KONVERGENCIÁJA 2.

Bizonyítás vége.
De ekkor a monotonitás miatt minden n_ε-ra

$$a - a_{n_\varepsilon} \geq a - a_n \geq \varepsilon$$

is teljesülne.
Előbbi egyenlőtlenség átrendezéséből azt kapnánk, hogy minden n_ε-ra teljesül

$$a_{n_\varepsilon} \leq a - \varepsilon.$$

Ebből viszont az következne, hogy $a - \varepsilon$ is felső korlátja lenne (a_n)-nek, ellentmondva a választásának.

MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK KONVERGENCIÁJA 2.

Bizonyítás vége.
De ekkor a monotonitás miatt minden n_ε-ra

$$a - a_{n_\varepsilon} \geq a - a_n \geq \varepsilon$$

is teljesülne.
Előbbi egyenlőtlenség átrendezéséből azt kapnánk, hogy minden n_ε-ra teljesül

$$a_{n_\varepsilon} \leq a - \varepsilon.$$

Ebből viszont az következne, hogy $a - \varepsilon$ is felső korlátja lenne (a_n)-nek, ellentmondva a választásának.

MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK KONVERGENCIÁJA 2.

Bizonyítás vége.
De ekkor a monotonitás miatt minden n_ε-ra

$$a - a_{n_\varepsilon} \geq a - a_n \geq \varepsilon$$

is teljesülne.
Előbbi egyenlőtlenség átrendezéséből azt kapnánk, hogy minden n_ε-ra teljesül

$$a_{n_\varepsilon} \leq a - \varepsilon.$$

Ebből viszont az következne, hogy $a - \varepsilon$ is felső korlátja lenne (a_n)-nek, ellentmondva a választásának.

KONVERGENS SOROZATOK KORLÁTOSSÁGA

TÉTEL

Minden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat korlátos (de nem feltétlenül monoton!).

Bizonyítás.
Legyen például $\varepsilon = 1$; definíció szerint van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ amelyre minden $n > n_1$ esetén

$$|a_n - a| < 1.$$

Ebből látjuk, hogy minden $n > n_1$ esetén $|a_n| < |a| + 1$. Ekkor a

$$K = \max(|a_1|, \ldots, |a_{n_1}|, |a| + 1)$$

választással minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|a_n| < K.$$

KONVERGENS SOROZATOK KORLÁTOSSÁGA

TÉTEL

Minden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat korlátos (de nem feltétlenül monoton!).

Bizonyítás.
Legyen például $\varepsilon = 1$; definíció szerint van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ amelyre minden $n > n_1$ esetén

$$|a_n - a| < 1.$$

Ebből látjuk, hogy minden $n > n_1$ esetén $|a_n| < |a| + 1$. Ekkor a

$$K = \max(|a_1|, \dots, |a_{n_1}|, |a| + 1)$$

választással minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|a_n| < K.$$

KONVERGENS SOROZATOK KORLÁTOSSÁGA

TÉTEL

Minden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat korlátos (de nem feltétlenül monoton!).

Bizonyítás.
Legyen például $\varepsilon = 1$; definíció szerint van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ amelyre minden $n > n_1$ esetén

$$|a_n - a| < 1.$$

Ebből látjuk, hogy minden $n > n_1$ esetén $|a_n| < |a| + 1$. Ekkor a

$$K = \max(|a_1|, \ldots, |a_{n_1}|, |a| + 1)$$

választással minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|a_n| < K.$$

KONVERGENS SOROZATOK KORLÁTOSSÁGA

TÉTEL

Minden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat korlátos (de nem feltétlenül monoton!).

Bizonyítás.
Legyen például $\varepsilon = 1$; definíció szerint van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ amelyre minden $n > n_1$ esetén

$$|a_n - a| < 1.$$

Ebből látjuk, hogy minden $n > n_1$ esetén $|a_n| < |a| + 1$. Ekkor a

$$K = \max(|a_1|, \ldots, |a_{n_1}|, |a| + 1)$$

választással minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|a_n| < K.$$

KONVERGENS SOROZATOK KORLÁTOSSÁGA

TÉTEL

Minden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat korlátos (de nem feltétlenül monoton!).

Bizonyítás.
Legyen például $\varepsilon = 1$; definíció szerint van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ amelyre minden $n > n_1$ esetén

$$|a_n - a| < 1.$$

Ebből látjuk, hogy minden $n > n_1$ esetén $|a_n| < |a| + 1$. Ekkor a

$$K = \max(|a_1|, \ldots, |a_{n_1}|, |a| + 1)$$

választással minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|a_n| < K.$$

KONVERGENS SOROZATOK KORLÁTOSSÁGA

TÉTEL

Minden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat korlátos (de nem feltétlenül monoton!).

Bizonyítás.
Legyen például $\varepsilon = 1$; definíció szerint van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ amelyre minden $n > n_1$ esetén

$$|a_n - a| < 1.$$

Ebből látjuk, hogy minden $n > n_1$ esetén $|a_n| < |a| + 1$. Ekkor a

$$K = \max(|a_1|, \ldots, |a_{n_1}|, |a| + 1)$$

választással minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|a_n| < K.$$

CAUCHY-FÉLE KONVERGENCIA KRITÉRIUM

TÉTEL

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n, m > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Nem bizonyítjuk.

CAUCHY-FÉLE KONVERGENCIA KRITÉRIUM

TÉTEL

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n, m > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Nem bizonyítjuk.

CAUCHY-FÉLE KONVERGENCIA KRITÉRIUM

TÉTEL

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n, m > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Nem bizonyítjuk.

CAUCHY-FÉLE KONVERGENCIA KRITÉRIUM

TÉTEL

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n, m > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Nem bizonyítjuk.

MŰVELETEK SOROZATOKKAL

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok. Ekkor e két sorozat összege az

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat; különbségük:

$$(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}};$$

szorzatuk pedig az

$$(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat. Továbbá, amennyiben $b_n \neq 0$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, a két sorozat hányadosa

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Többek között, ha $b_n = b$ minden n esetén, akkor a szorzat:

$$(ba_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

MŰVELETEK SOROZATOKKAL

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok. Ekkor e két sorozat összege az

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat; különbségük:

$$(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}};$$

szorzatuk pedig az

$$(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat. Továbbá, amennyiben $b_n \neq 0$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, a két sorozat hányadosa

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Többek között, ha $b_n = b$ minden n esetén, akkor a szorzat:

$$(ba_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

MŰVELETEK SOROZATOKKAL

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok. Ekkor e két sorozat összege az

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat; különbségük:

$$(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}};$$

szorzatuk pedig az

$$(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat. Továbbá, amennyiben $b_n \neq 0$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, a két sorozat hányadosa

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Többek között, ha $b_n = b$ minden n esetén, akkor a szorzat:

$$(ba_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

MŰVELETEK SOROZATOKKAL

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok. Ekkor e két sorozat összege az

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat; különbségük:

$$(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}};$$

szorzatuk pedig az

$$(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat. Továbbá, amennyiben $b_n \neq 0$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, a két sorozat hányadosa

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Többek között, ha $b_n = b$ minden n esetén, akkor a szorzat:

$$(ba_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

MŰVELETEK SOROZATOKKAL

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok. Ekkor e két sorozat összege az

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat; különbségük:

$$(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}};$$

szorzatuk pedig az

$$(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat. Továbbá, amennyiben $b_n \neq 0$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, a két sorozat hányadosa

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Többek között, ha $b_n = b$ minden n esetén, akkor a szorzat:

$$(ba_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

MŰVELETEK SOROZATOKKAL

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok. Ekkor e két sorozat összege az

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat; különbségük:

$$(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}};$$

szorzatuk pedig az

$$(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat. Továbbá, amennyiben $b_n \neq 0$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, a két sorozat hányadosa

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Többek között, ha $b_n = b$ minden n esetén, akkor a szorzat:

$$(ba_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

KONVERGENCIA VISELKEDÉSE ÖSSZEGRE ÉS KÜLÖNBSÉGRE

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozatok, amelyek rendre a-hoz illetve b-hez tartanak, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

TÉTEL

- *Az $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

- *Az $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b.$$

Konvergencia viselkedése összegre és különbségre

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozatok, amelyek rendre a-hoz illetve b-hez tartanak, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

Tétel

- *Az $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b.$$

- *Az $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b.$$

KONVERGENCIA VISELKEDÉSE ÖSSZEGRE ÉS KÜLÖNBSÉGRE

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozatok, amelyek rendre a-hoz illetve b-hez tartanak, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

TÉTEL

- *Az* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b.$$

- *Az* $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b.$$

KONVERGENCIA VISELKEDÉSE SZORZATRA ÉS HÁNYADOSRA

Megtartjuk az eddigi feltételeinket.

TÉTEL

- *Az $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Többek között, ha b állandó sorozat akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n b = ab.$$

- *Ha minden n esetén $b_n \neq 0$ és $b \neq 0$ akkor az $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

KONVERGENCIA VISELKEDÉSE SZORZATRA ÉS HÁNYADOSRA

Megtartjuk az eddigi feltételeinket.

TÉTEL

- *Az $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Többek között, ha b állandó sorozat akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n b = ab.$$

- *Ha minden n esetén $b_n \neq 0$ és $b \neq 0$ akkor az $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

KONVERGENCIA VISELKEDÉSE SZORZATRA ÉS HÁNYADOSRA

Megtartjuk az eddigi feltételeinket.

TÉTEL

- *Az $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és*

  $$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

  Többek között, ha b állandó sorozat akkor

  $$\lim_{n\to\infty} a_n b = ab.$$

- *Ha minden n esetén $b_n \neq 0$ és $b \neq 0$ akkor az $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és*

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

KONVERGENCIA VISELKEDÉSE SZORZATRA ÉS HÁNYADOSRA

Megtartjuk az eddigi feltételeinket.

TÉTEL

- *Az $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és*

  $$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

  Többek között, ha b állandó sorozat akkor

  $$\lim_{n\to\infty} a_n b = ab.$$

- *Ha minden n esetén $b_n \neq 0$ és $b \neq 0$ akkor az $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és*

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

VÉGTELENBE TARTÓ SOROZATOK SZORZATA ÉS HÁNYADOSA

TÉTEL

- *Ha* $a_n \to +\infty$ *és* $b_n \to b > 0$ *akkor* $a_n b_n \to +\infty$.
- *Ha* $a_n \to +\infty$ *és* $b_n \to b < 0$ *akkor* $a_n b_n \to -\infty$.
- $|a_n| \to \infty$ *akkor és csak akkor, ha* $\frac{1}{a_n} \to 0$.

VÉGTELENBE TARTÓ SOROZATOK SZORZATA ÉS HÁNYADOSA

TÉTEL

- *Ha* $a_n \to +\infty$ *és* $b_n \to b > 0$ *akkor* $a_n b_n \to +\infty$.
- *Ha* $a_n \to +\infty$ *és* $b_n \to b < 0$ *akkor* $a_n b_n \to -\infty$.
- $|a_n| \to \infty$ *akkor és csak akkor, ha* $\frac{1}{a_n} \to 0$.

VÉGTELENBE TARTÓ SOROZATOK SZORZATA ÉS HÁNYADOSA

TÉTEL

- *Ha* $a_n \to +\infty$ *és* $b_n \to b > 0$ *akkor* $a_n b_n \to +\infty$.
- *Ha* $a_n \to +\infty$ *és* $b_n \to b < 0$ *akkor* $a_n b_n \to -\infty$.
- $|a_n| \to \infty$ *akkor és csak akkor, ha* $\frac{1}{a_n} \to 0$.

KRITIKUS HATÁRÉRTÉKEK

MEGJEGYZÉS

Általában két sorozat összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának, hatványának a határértéke "értelemszerűen" számolható a műveletben résztvevő sorozatok határértékeiből, néhány kivétellel. Ezeket a kivételeket hívjuk kritikus határértékeknek. Ezek listája: $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0.

PÉLDA

Ha $a_n = a + n$ *és* $b_n = n$*, ahol* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$*, és* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a$*. Ha* $a_n = 2n$, $b_n = n$*, akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$*. Ha* $a_n = (-1)^n + n$, $b_n = n$*, akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ *nem létezik.*

KRITIKUS HATÁRÉRTÉKEK

MEGJEGYZÉS

Általában két sorozat összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának, hatványának a határértéke "értelemszerűen" számolható a műveletben résztvevő sorozatok határértékeiből, néhány kivétellel. Ezeket a kivételeket hívjuk kritikus határértékeknek. Ezek listája: $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0.

PÉLDA

Ha $a_n = a + n$ *és* $b_n = n$, *ahol* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *és* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a$. *Ha* $a_n = 2n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$. *Ha* $a_n = (-1)^n + n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ *nem létezik.*

KRITIKUS HATÁRÉRTÉKEK

MEGJEGYZÉS

Általában két sorozat összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának, hatványának a határértéke "értelemszerűen" számolható a műveletben résztvevő sorozatok határértékeiből, néhány kivétellel. Ezeket a kivételeket hívjuk kritikus határértékeknek. Ezek listája:
$\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0.

PÉLDA

Ha $a_n = a + n$ *és* $b_n = n$, *ahol* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *és* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a$. *Ha* $a_n = 2n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$. *Ha* $a_n = (-1)^n + n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ *nem létezik.*

KRITIKUS HATÁRÉRTÉKEK

MEGJEGYZÉS

Általában két sorozat összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának, hatványának a határértéke "értelemszerűen" számolható a műveletben résztvevő sorozatok határértékeiből, néhány kivétellel. Ezeket a kivételeket hívjuk kritikus határértékeknek. Ezek listája:
$\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0.

PÉLDA

Ha $a_n = a + n$ és $b_n = n$, ahol $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, és $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a$. Ha $a_n = 2n$, $b_n = n$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$. Ha $a_n = (-1)^n + n$, $b_n = n$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ nem létezik.

KRITIKUS HATÁRÉRTÉKEK

MEGJEGYZÉS

Általában két sorozat összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának, hatványának a határértéke "értelemszerűen" számolható a műveletben résztvevő sorozatok határértékeiből, néhány kivétellel. Ezeket a kivételeket hívjuk kritikus határértékeknek. Ezek listája:
$\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0.

PÉLDA

Ha $a_n = a + n$ *és* $b_n = n$, *ahol* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *és* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a$. *Ha* $a_n = 2n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$. *Ha* $a_n = (-1)^n + n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ *nem létezik.*

KRITIKUS HATÁRÉRTÉKEK

MEGJEGYZÉS

Általában két sorozat összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának, hatványának a határértéke "értelemszerűen" számolható a műveletben résztvevő sorozatok határértékeiből, néhány kivétellel. Ezeket a kivételeket hívjuk kritikus határértékeknek. Ezek listája:
$\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0.

PÉLDA

Ha $a_n = a + n$ *és* $b_n = n$, *ahol* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *és* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a$. *Ha* $a_n = 2n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$. *Ha* $a_n = (-1)^n + n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ *nem létezik.*

KRITIKUS HATÁRÉRTÉKEK

MEGJEGYZÉS

Általában két sorozat összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának, hatványának a határértéke "értelemszerűen" számolható a műveletben résztvevő sorozatok határértékeiből, néhány kivétellel. Ezeket a kivételeket hívjuk kritikus határértékeknek. Ezek listája:
$\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0.

PÉLDA

Ha $a_n = a + n$ *és* $b_n = n$, *ahol* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *és* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a$. *Ha* $a_n = 2n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$. *Ha* $a_n = (-1)^n + n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ *nem létezik.*

KRITIKUS HATÁRÉRTÉKEK

MEGJEGYZÉS

Általában két sorozat összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának, hatványának a határértéke "értelemszerűen" számolható a műveletben résztvevő sorozatok határértékeiből, néhány kivétellel. Ezeket a kivételeket hívjuk kritikus határértékeknek. Ezek listája:
$\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0.

PÉLDA

Ha $a_n = a + n$ *és* $b_n = n$, *ahol* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *és* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a$. *Ha* $a_n = 2n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$. *Ha* $a_n = (-1)^n + n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ *nem létezik.*

KRITIKUS HATÁRÉRTÉKEK

MEGJEGYZÉS

Általában két sorozat összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának, hatványának a határértéke "értelemszerűen" számolható a műveletben résztvevő sorozatok határértékeiből, néhány kivétellel. Ezeket a kivételeket hívjuk kritikus határértékeknek. Ezek listája:
$\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0.

PÉLDA

Ha $a_n = a + n$ *és* $b_n = n$, *ahol* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *és* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a$. *Ha* $a_n = 2n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$. *Ha* $a_n = (-1)^n + n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ *nem létezik.*

KRITIKUS HATÁRÉRTÉKEK

MEGJEGYZÉS

Általában két sorozat összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának, hatványának a határértéke "értelemszerűen" számolható a műveletben résztvevő sorozatok határértékeiből, néhány kivétellel. Ezeket a kivételeket hívjuk kritikus határértékeknek. Ezek listája:
$\infty-\infty$, $0\cdot(\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0.

PÉLDA

Ha $a_n = a+n$ *és* $b_n = n$, *ahol* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *és* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a$. *Ha* $a_n = 2n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$. *Ha* $a_n = (-1)^n + n$, $b_n = n$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ *nem létezik.*