5. ELŐADÁS: SZÁMSOROZATOK 2. — NEVEZETES SOROZATOK

BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG

TÉTEL

Legyen $x > -1$, és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Bizonyítás.

Teljes indukcióval igazoljuk n-re. Ha $n = 0$, akkor $1 = (1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x = 1$. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Belátjuk, hogy ekkor $n = k+1$ esetén is igaz, azaz

$$(1+x)^k \geq 1 + kx \Longrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG

TÉTEL

Legyen $x > -1$, és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Bizonyítás.

Teljes indukcióval igazoljuk n-re. Ha $n = 0$, akkor $1 = (1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x = 1$. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Belátjuk, hogy ekkor $n = k+1$ esetén is igaz, azaz

$$(1+x)^k \geq 1 + kx \Longrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG

TÉTEL

Legyen $x > -1$, és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Bizonyítás.

Teljes indukcióval igazoljuk n-re. Ha $n = 0$, akkor $1 = (1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x = 1$. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Belátjuk, hogy ekkor $n = k+1$ esetén is igaz, azaz

$$(1+x)^k \geq 1 + kx \Longrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG

TÉTEL

Legyen $x > -1$, és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Bizonyítás.
Teljes indukcióval igazoljuk n-re. Ha $n = 0$, akkor $1 = (1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x = 1$. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Belátjuk, hogy ekkor $n = k+1$ esetén is igaz, azaz

$$(1+x)^k \geq 1 + kx \Longrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG

TÉTEL

Legyen $x > -1$, és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Bizonyítás.
Teljes indukcióval igazoljuk n-re. Ha $n = 0$, akkor $1 = (1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x = 1$. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Belátjuk, hogy ekkor $n = k+1$ esetén is igaz, azaz

$$(1+x)^k \geq 1 + kx \Longrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG

TÉTEL

Legyen $x > -1$, és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Bizonyítás.
Teljes indukcióval igazoljuk n-re. Ha $n = 0$, akkor $1 = (1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x = 1$. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Belátjuk, hogy ekkor $n = k+1$ esetén is igaz, azaz

$$(1+x)^k \geq 1 + kx \Longrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG

TÉTEL

Legyen $x > -1$, és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Bizonyítás.
Teljes indukcióval igazoljuk n-re. Ha $n = 0$, akkor $1 = (1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x = 1$. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Belátjuk, hogy ekkor $n = k+1$ esetén is igaz, azaz

$$(1+x)^k \geq 1 + kx \Longrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG

Bizonyítás.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x) =$$

$$1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG

Bizonyítás.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x) =$$

$$1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG

Bizonyítás.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x) =$$

$$1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG

Bizonyítás.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x) =$$

$$1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG

Bizonyítás.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x) =$$

$$1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL

TÉTEL

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_+$, $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

Speciális esetek:
Ha $n = 1$, $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$.
Ha $n = 2$, $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Ha $n = 3$,
$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

A BINOMIÁLIS TÉTEL

TÉTEL

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_+$, $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

Speciális esetek:
Ha $n = 1$, $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$.
Ha $n = 2$, $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Ha $n = 3$,
$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

A BINOMIÁLIS TÉTEL

TÉTEL

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_+$, $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

Speciális esetek:

Ha $n = 1$, $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$.

Ha $n = 2$, $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ha $n = 3$,

$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

A BINOMIÁLIS TÉTEL

TÉTEL

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_+$, $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

Speciális esetek:

Ha $n = 1$, $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$.

Ha $n = 2$, $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ha $n = 3$,

$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

A BINOMIÁLIS TÉTEL

TÉTEL

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_+$, $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

Speciális esetek:
Ha $n = 1$, $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$.
Ha $n = 2$, $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Ha $n = 3$,
$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

A BINOMIÁLIS TÉTEL

TÉTEL

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_+$, $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

Speciális esetek:
Ha $n = 1$, $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$.
Ha $n = 2$, $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Ha $n = 3$,
$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

EMLÉKEZTETŐ

Minden $0 \leq k \leq n$ *esetén* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, *és* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Bizonyítás.

Ha $n = 1$, az állítás igaz. Tegyük fel, hogy $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, és belátjuk, hogy $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) =$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

EMLÉKEZTETŐ

Minden $0 \leq k \leq n$ *esetén* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, *és* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Bizonyítás.

Ha $n = 1$, az állítás igaz. Tegyük fel, hogy $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, és belátjuk, hogy $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) =$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

EMLÉKEZTETŐ

Minden $0 \leq k \leq n$ *esetén* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, *és* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Bizonyítás.

Ha $n = 1$, az állítás igaz. Tegyük fel, hogy $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, és belátjuk, hogy $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) =$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

EMLÉKEZTETŐ

Minden $0 \leq k \leq n$ *esetén* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, *és* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Bizonyítás.

Ha $n = 1$, az állítás igaz. Tegyük fel, hogy $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, és belátjuk, hogy $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) =$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

EMLÉKEZTETŐ

Minden $0 \leq k \leq n$ *esetén* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, *és* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Bizonyítás.

Ha $n = 1$, az állítás igaz. Tegyük fel, hogy $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, és belátjuk, hogy $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) =$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

EMLÉKEZTETŐ

Minden $0 \leq k \leq n$ *esetén* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, *és* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Bizonyítás.

Ha $n = 1$, az állítás igaz. Tegyük fel, hogy $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, és belátjuk, hogy $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) =$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

EMLÉKEZTETŐ

Minden $0 \leq k \leq n$ *esetén* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, *és* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Bizonyítás.

Ha $n = 1$, az állítás igaz. Tegyük fel, hogy $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, és belátjuk, hogy $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) =$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

EMLÉKEZTETŐ

Minden $0 \leq k \leq n$ *esetén* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, *és* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Bizonyítás.

Ha $n = 1$, az állítás igaz. Tegyük fel, hogy $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, és belátjuk, hogy $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) =$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás.

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{(k+1)-1} \cdot a^{n+1-(k+1)} \cdot b^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k =$$

$$\binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás.

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{(k+1)-1} \cdot a^{n+1-(k+1)} \cdot b^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k =$$

$$\binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás.

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{(k+1)-1} \cdot a^{n+1-(k+1)} \cdot b^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k =$$

$$\binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás.

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{(k+1)-1} \cdot a^{n+1-(k+1)} \cdot b^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k =$$

$$\binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

A BINOMIÁLIS TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás.

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{(k+1)-1} \cdot a^{n+1-(k+1)} \cdot b^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k =$$

$$\binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

A RENDŐR-ELV (VÉGES HATÁRÉRTÉK)

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok.

TÉTEL

Ha minden n esetén teljesülnek az

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

egyenlőtlenségek, az (a_n) *és* (c_n) *sorozatok konvergensek, valamint*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

A RENDŐR-ELV (VÉGES HATÁRÉRTÉK)

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok.

TÉTEL

Ha minden n esetén teljesülnek az

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

egyenlőtlenségek, az (a_n) és (c_n) sorozatok konvergensek, valamint

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

A RENDŐR-ELV (VÉGES HATÁRÉRTÉK)

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok.

TÉTEL

Ha minden n esetén teljesülnek az

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

egyenlőtlenségek, az (a_n) és (c_n) sorozatok konvergensek, valamint

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

A RENDŐR-ELV (VÉGES HATÁRÉRTÉK)

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok.

TÉTEL

Ha minden n esetén teljesülnek az

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

egyenlőtlenségek, az (a_n) és (c_n) sorozatok konvergensek, valamint

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

A RENDŐR-ELV (VÉGES HATÁRÉRTÉK)

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok.

TÉTEL

Ha minden n esetén teljesülnek az

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

egyenlőtlenségek, az (a_n) és (c_n) sorozatok konvergensek, valamint

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

A RENDŐR-ELV (VÉGTELEN HATÁRÉRTÉK)

TÉTEL

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatok, és tegyük fel hogy minden n esetén teljesül az*

$$a_n \leq b_n$$

egyenlőtlenség.

- $$\text{Ha} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \text{akkor} \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

- $$\text{Ha} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty, \quad \text{akkor} \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

A RENDŐR-ELV (VÉGTELEN HATÁRÉRTÉK)

TÉTEL

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatok, és tegyük fel hogy minden n esetén teljesül az*

$$a_n \leq b_n$$

egyenlőtlenség.

- $$\text{Ha} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \text{akkor} \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

- $$\text{Ha} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty, \quad \text{akkor} \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

A RENDŐR-ELV (VÉGTELEN HATÁRÉRTÉK)

TÉTEL

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok, és tegyük fel hogy minden n esetén teljesül az

$$a_n \leq b_n$$

egyenlőtlenség.

- *Ha* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.
- *Ha* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

A RENDŐR-ELV (VÉGTELEN HATÁRÉRTÉK)

TÉTEL

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatok, és tegyük fel hogy minden n esetén teljesül az*

$$a_n \leq b_n$$

egyenlőtlenség.

- $$\text{Ha} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \text{akkor} \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

- $$\text{Ha} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty, \quad \text{akkor} \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

A RENDŐR-ELV (VÉGTELEN HATÁRÉRTÉK)

TÉTEL

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatok, és tegyük fel hogy minden n esetén teljesül az*

$$a_n \leq b_n$$

egyenlőtlenség.

- $$\textit{Ha} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \textit{akkor} \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

- $$\textit{Ha} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty, \quad \textit{akkor} \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

A RENDŐR-ELV (VÉGTELEN HATÁRÉRTÉK)

TÉTEL

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatok, és tegyük fel hogy minden n esetén teljesül az*

$$a_n \leq b_n$$

egyenlőtlenség.

- $$\textit{Ha} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \textit{akkor} \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

- $$\textit{Ha} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty, \quad \textit{akkor} \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

PÉLDA RENDŐR-ELVRE

Megmutatjuk, hogy a

$$b_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

sorozat konvergál 0-hoz. Legyen ehhez

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n}.$$

Mivel minden n-re

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

azért a rendőr-elv alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

PÉLDA RENDŐR-ELVRE

Megmutatjuk, hogy a

$$b_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

sorozat konvergál 0-hoz. Legyen ehhez

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n}.$$

Mivel minden n-re

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

azért a rendőr-elv alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

PÉLDA RENDŐR-ELVRE

Megmutatjuk, hogy a

$$b_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

sorozat konvergál 0-hoz. Legyen ehhez

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n}.$$

Mivel minden n-re

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

azért a rendőr-elv alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

PÉLDA RENDŐR-ELVRE

Megmutatjuk, hogy a

$$b_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

sorozat konvergál 0-hoz. Legyen ehhez

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n}.$$

Mivel minden n-re

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

azért a rendőr-elv alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

PÉLDA RENDŐR-ELVRE

Megmutatjuk, hogy a

$$b_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

sorozat konvergál 0-hoz. Legyen ehhez

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n}.$$

Mivel minden n-re

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

azért a rendőr-elv alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

NEVEZETES SOROZATOK I.

TÉTEL

Minden $p < 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} n^p = 0$$

és minden $p > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty.$$

Bizonyítás.

Ha $p < 0$ és $\varepsilon > 0$ akkor legyen

$$n_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}.$$

Ha $p > 0$ és $K > 0$ akkor legyen

$$n_K = K^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}.$$

NEVEZETES SOROZATOK I.

TÉTEL

Minden $p < 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} n^p = 0$$

és minden $p > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty.$$

Bizonyítás.

Ha $p < 0$ és $\varepsilon > 0$ akkor legyen

$$n_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}.$$

Ha $p > 0$ és $K > 0$ akkor legyen

$$n_K = K^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}.$$

NEVEZETES SOROZATOK I.

TÉTEL

Minden $p < 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} n^p = 0$$

és minden $p > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty.$$

Bizonyítás.

Ha $p < 0$ és $\varepsilon > 0$ akkor legyen

$$n_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}.$$

Ha $p > 0$ és $K > 0$ akkor legyen

$$n_K = K^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}.$$

NEVEZETES SOROZATOK I.

TÉTEL

Minden $p < 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} n^p = 0$$

és minden $p > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty.$$

Bizonyítás.

Ha $p < 0$ és $\varepsilon > 0$ akkor legyen

$$n_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}.$$

Ha $p > 0$ és $K > 0$ akkor legyen

$$n_K = K^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}.$$

NEVEZETES SOROZATOK I.

TÉTEL

Minden $p < 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} n^p = 0$$

és minden $p > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty.$$

Bizonyítás.

Ha $p < 0$ és $\varepsilon > 0$ akkor legyen

$$n_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}.$$

Ha $p > 0$ és $K > 0$ akkor legyen

$$n_K = K^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}.$$

NEVEZETES SOROZATOK II.

TÉTEL

Minden $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $x > 1$ (a $x = 1$ eset nyilvánvaló, a $x < 1$ eset pedig a $x > 1$ eset reciproka). Legyen $x_n = \sqrt[n]{x} - 1 > 0$; ekkor

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = x$$

a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt, amiből átrendezéssel

$$0 < x_n \leq \frac{x-1}{n}.$$

A rendőr-elvet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK II.

TÉTEL

Minden $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $x > 1$ (a $x = 1$ eset nyilvánvaló, a $x < 1$ eset pedig a $x > 1$ eset reciproka). Legyen $x_n = \sqrt[n]{x} - 1 > 0$; ekkor

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = x$$

a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt, amiből átrendezéssel

$$0 < x_n \leq \frac{x-1}{n}.$$

A rendőr-elvet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK II.

TÉTEL

Minden $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $x > 1$ (a $x = 1$ eset nyilvánvaló, a $x < 1$ eset pedig a $x > 1$ eset reciproka). Legyen $x_n = \sqrt[n]{x} - 1 > 0$; ekkor

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = x$$

a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt, amiből átrendezéssel

$$0 < x_n \leq \frac{x-1}{n}.$$

A rendőr-elvet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK II.

TÉTEL

Minden $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $x > 1$ (a $x = 1$ eset nyilvánvaló, a $x < 1$ eset pedig a $x > 1$ eset reciproka). Legyen $x_n = \sqrt[n]{x} - 1 > 0$; ekkor

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = x$$

a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt, amiből átrendezéssel

$$0 < x_n \leq \frac{x-1}{n}.$$

A rendőr-elvet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK II.

TÉTEL

Minden $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $x > 1$ (a $x = 1$ eset nyilvánvaló, a $x < 1$ eset pedig a $x > 1$ eset reciproka). Legyen $x_n = \sqrt[n]{x} - 1 > 0$; ekkor

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = x$$

a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt, amiből átrendezéssel

$$0 < x_n \leq \frac{x-1}{n}.$$

A rendőr-elvet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK II.

TÉTEL

Minden $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $x > 1$ (a $x = 1$ eset nyilvánvaló, a $x < 1$ eset pedig a $x > 1$ eset reciproka). Legyen $x_n = \sqrt[n]{x} - 1 > 0$; ekkor

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = x$$

a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt, amiből átrendezéssel

$$0 < x_n \leq \frac{x-1}{n}.$$

A rendőr-elvet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK II.

TÉTEL

Minden $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $x > 1$ (a $x = 1$ eset nyilvánvaló, a $x < 1$ eset pedig a $x > 1$ eset reciproka). Legyen $x_n = \sqrt[n]{x} - 1 > 0$; ekkor

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = x$$

a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt, amiből átrendezéssel

$$0 < x_n \leq \frac{x-1}{n}.$$

A rendőr-elvet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK II.

TÉTEL

Minden $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $x > 1$ (a $x = 1$ eset nyilvánvaló, a $x < 1$ eset pedig a $x > 1$ eset reciproka). Legyen $x_n = \sqrt[n]{x} - 1 > 0$; ekkor

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = x$$

a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt, amiből átrendezéssel

$$0 < x_n \leq \frac{x-1}{n}.$$

A rendőr-elvet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK III.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás.

Legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$; ekkor a binomiális tétel szerint

$$\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 = \binom{n}{2} x_n^2 \leq (1 + x_n)^n = n.$$

Ebből ($n \geq 2$) esetén átrendezéssel

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{n}} = 2n^{-\frac{1}{2}},$$

és a rendőr-elv alapján

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK III.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás.

Legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$; ekkor a binomiális tétel szerint

$$\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 = \binom{n}{2} x_n^2 \leq (1 + x_n)^n = n.$$

Ebből ($n \geq 2$) esetén átrendezéssel

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{n}} = 2n^{-\frac{1}{2}},$$

és a rendőr-elv alapján

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK III.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás.

Legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$; ekkor a binomiális tétel szerint

$$\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 = \binom{n}{2} x_n^2 \leq (1 + x_n)^n = n.$$

Ebből ($n \geq 2$) esetén átrendezéssel

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{n}} = 2n^{-\frac{1}{2}},$$

és a rendőr-elv alapján

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK III.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás.

Legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$; ekkor a binomiális tétel szerint

$$\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 = \binom{n}{2} x_n^2 \leq (1 + x_n)^n = n.$$

Ebből ($n \geq 2$) esetén átrendezéssel

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{n}} = 2n^{-\frac{1}{2}},$$

és a rendőr-elv alapján

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK III.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás.

Legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$; ekkor a binomiális tétel szerint

$$\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 = \binom{n}{2} x_n^2 \leq (1 + x_n)^n = n.$$

Ebből ($n \geq 2$) esetén átrendezéssel

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{n}} = 2n^{-\frac{1}{2}},$$

és a rendőr-elv alapján

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK III.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás.

Legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$; ekkor a binomiális tétel szerint

$$\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 = \binom{n}{2} x_n^2 \leq (1 + x_n)^n = n.$$

Ebből ($n \geq 2$) esetén átrendezéssel

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{n}} = 2n^{-\frac{1}{2}},$$

és a rendőr-elv alapján

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK III.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás.

Legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$; ekkor a binomiális tétel szerint

$$\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 = \binom{n}{2} x_n^2 \leq (1 + x_n)^n = n.$$

Ebből ($n \geq 2$) esetén átrendezéssel

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{n}} = 2n^{-\frac{1}{2}},$$

és a rendőr-elv alapján

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK III.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás.

Legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$; ekkor a binomiális tétel szerint

$$\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 = \binom{n}{2} x_n^2 \leq (1 + x_n)^n = n.$$

Ebből ($n \geq 2$) esetén átrendezéssel

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{n}} = 2n^{-\frac{1}{2}},$$

és a rendőr-elv alapján

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK III.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás.

Legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$; ekkor a binomiális tétel szerint

$$\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 = \binom{n}{2} x_n^2 \leq (1 + x_n)^n = n.$$

Ebből ($n \geq 2$) esetén átrendezéssel

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{n}} = 2n^{-\frac{1}{2}},$$

és a rendőr-elv alapján

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK III.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás.

Legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$; ekkor a binomiális tétel szerint

$$\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 = \binom{n}{2} x_n^2 \leq (1 + x_n)^n = n.$$

Ebből ($n \geq 2$) esetén átrendezéssel

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{n}} = 2n^{-\frac{1}{2}},$$

és a rendőr-elv alapján

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

NEVEZETES SOROZATOK IV.

TÉTEL

Minden $p \in \mathbb{R}$ és $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(1+x)^n} = 0.$$

Bizonyítás.

Rögzítsünk egy olyan $k \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $k > p$. A binomiális tétel alapján minden $n > 2k$ esetén

$$(1+x)^n > \binom{n}{k} x^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} x^k > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!},$$

ami átrendezés után

$$0 < \frac{n^k}{(1+x)^n} < \frac{2^k k!}{x^k}.$$

NEVEZETES SOROZATOK IV.

TÉTEL

Minden $p \in \mathbb{R}$ és $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(1+x)^n} = 0.$$

Bizonyítás.

Rögzítsünk egy olyan $k \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $k > p$. A binomiális tétel alapján minden $n > 2k$ esetén

$$(1+x)^n > \binom{n}{k} x^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} x^k > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!},$$

ami átrendezés után

$$0 < \frac{n^k}{(1+x)^n} < \frac{2^k k!}{x^k}.$$

NEVEZETES SOROZATOK IV.

TÉTEL

Minden $p \in \mathbb{R}$ és $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(1+x)^n} = 0.$$

Bizonyítás.

Rögzítsünk egy olyan $k \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $k > p$. A binomiális tétel alapján minden $n > 2k$ esetén

$$(1+x)^n > \binom{n}{k} x^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} x^k > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!},$$

ami átrendezés után

$$0 < \frac{n^k}{(1+x)^n} < \frac{2^k k!}{x^k}.$$

NEVEZETES SOROZATOK IV.

TÉTEL

Minden $p \in \mathbb{R}$ és $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(1+x)^n} = 0.$$

Bizonyítás.

Rögzítsünk egy olyan $k \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $k > p$. A binomiális tétel alapján minden $n > 2k$ esetén

$$(1+x)^n > \binom{n}{k} x^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} x^k > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!},$$

ami átrendezés után

$$0 < \frac{n^k}{(1+x)^n} < \frac{2^k k!}{x^k}.$$

NEVEZETES SOROZATOK IV.

TÉTEL

Minden $p \in \mathbb{R}$ és $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(1+x)^n} = 0.$$

Bizonyítás.

Rögzítsünk egy olyan $k \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $k > p$. A binomiális tétel alapján minden $n > 2k$ esetén

$$(1+x)^n > \binom{n}{k} x^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} x^k > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!},$$

ami átrendezés után

$$0 < \frac{n^k}{(1+x)^n} < \frac{2^k k!}{x^k}.$$

NEVEZETES SOROZATOK IV.

TÉTEL

Minden $p \in \mathbb{R}$ és $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(1+x)^n} = 0.$$

Bizonyítás.

Rögzítsünk egy olyan $k \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $k > p$. A binomiális tétel alapján minden $n > 2k$ esetén

$$(1+x)^n > \binom{n}{k} x^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} x^k > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!},$$

ami átrendezés után

$$0 < \frac{n^k}{(1+x)^n} < \frac{2^k k!}{x^k}.$$

NEVEZETES SOROZATOK IV.

TÉTEL

Minden $p \in \mathbb{R}$ és $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(1+x)^n} = 0.$$

Bizonyítás.

Rögzítsünk egy olyan $k \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $k > p$. A binomiális tétel alapján minden $n > 2k$ esetén

$$(1+x)^n > \binom{n}{k} x^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} x^k > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!},$$

ami átrendezés után

$$0 < \frac{n^k}{(1+x)^n} < \frac{2^k k!}{x^k}.$$

NEVEZETES SOROZATOK IV.(FOLYT.)

Bizonyítás.
Innen

$$0 < \frac{n^p}{(1+x)^n} < \frac{2^k k!}{x^k} n^{p-k}.$$

A jobb oldalon a tört egy rögzített érték, és mivel $p - k < 0$ ebből a rendőr-elv alapján kapjuk a tételt.

NEVEZETES SOROZATOK IV.(FOLYT.)

Bizonyítás.
Innen

$$0 < \frac{n^p}{(1+x)^n} < \frac{2^k k!}{x^k} n^{p-k}.$$

A jobb oldalon a tört egy rögzített érték, és mivel $p - k < 0$ ebből a rendőr-elv alapján kapjuk a tételt.

A SZÁMTANI ÉS MÉRTANI KÖZÉP KÖZÖTTI EGYENLŐTLENSÉG

Tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ esetén legyen

$$A_n(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

e számok számtani közepe, és

$$G_n(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

e számok mértani közepe.

ÁLLÍTÁS

Minden $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$A_n(a_1, \ldots, a_n) \geq G_n(a_1, \ldots, a_n).$$

A SZÁMTANI ÉS MÉRTANI KÖZÉP KÖZÖTTI EGYENLŐTLENSÉG

Tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ esetén legyen

$$A_n(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

e számok számtani közepe, és

$$G_n(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

e számok mértani közepe.

ÁLLÍTÁS

Minden $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$A_n(a_1, \ldots, a_n) \geq G_n(a_1, \ldots, a_n).$$

A SZÁMTANI ÉS MÉRTANI KÖZÉP KÖZÖTTI EGYENLŐTLENSÉG

Tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ esetén legyen

$$A_n(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

e számok számtani közepe, és

$$G_n(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

e számok mértani közepe.

ÁLLÍTÁS

Minden $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$A_n(a_1, \ldots, a_n) \geq G_n(a_1, \ldots, a_n).$$

NEVEZETES SOROZATOK V.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Bizonyítás.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \dots, a_n = \frac{1}{n}$ számokra:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n}.$$

Ennek reciproka:

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}},$$

ezért a rendőr-elv miatt elég megmutatni, hogy a jobb oldal a végtelenbe tart.

NEVEZETES SOROZATOK V.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Bizonyítás.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \ldots, a_n = \frac{1}{n}$ számokra:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}.$$

Ennek reciproka:

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}},$$

ezért a rendőr-elv miatt elég megmutatni, hogy a jobb oldal a végtelenbe tart.

NEVEZETES SOROZATOK V.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Bizonyítás.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \ldots, a_n = \frac{1}{n}$ számokra:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}.$$

Ennek reciproka:

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}},$$

ezért a rendőr-elv miatt elég megmutatni, hogy a jobb oldal a végtelenbe tart.

NEVEZETES SOROZATOK V.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Bizonyítás.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \dots, a_n = \frac{1}{n}$ számokra:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n}.$$

Ennek reciproka:

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}},$$

ezért a rendőr-elv miatt elég megmutatni, hogy a jobb oldal a végtelenbe tart.

NEVEZETES SOROZATOK V.

TÉTEL

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Bizonyítás.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \ldots, a_n = \frac{1}{n}$ számokra:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}.$$

Ennek reciproka:

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}},$$

ezért a rendőr-elv miatt elég megmutatni, hogy a jobb oldal a végtelenbe tart.

NEVEZETES SOROZATOK V.(FOLYT.)

Bizonyítás.
Legyen $k \in \mathbb{N}$ az egyetlen olyan egész szám, amelyre

$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

Ekkor

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}\right)$$
$$< 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right),$$

ahol az alsó sorban minden $\frac{1}{2^l}$ éppen 2^l-szer szerepel.

NEVEZETES SOROZATOK V.(FOLYT.)

Bizonyítás.
Legyen $k \in \mathbb{N}$ az egyetlen olyan egész szám, amelyre

$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

Ekkor

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}\right)$$
$$< 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right),$$

ahol az alsó sorban minden $\frac{1}{2^l}$ éppen 2^l-szer szerepel.

NEVEZETES SOROZATOK V.(FOLYT.)

Bizonyítás.
Legyen $k \in \mathbb{N}$ az egyetlen olyan egész szám, amelyre

$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

Ekkor

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}\right)$$
$$< 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right),$$

ahol az alsó sorban minden $\frac{1}{2^l}$ éppen 2^l-szer szerepel.

NEVEZETES SOROZATOK V.(FOLYT.)

Bizonyítás.
Legyen $k \in \mathbb{N}$ az egyetlen olyan egész szám, amelyre

$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} &\leq 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}\right) \\ &< 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right), \end{aligned}$$

ahol az alsó sorban minden $\frac{1}{2^l}$ éppen 2^l-szer szerepel.

NEVEZETES SOROZATOK V.(FOLYT.)

Bizonyítás.
Így tehát

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\overbrace{1+1+\cdots+1}^{k+1}=k+1,$$

ahonnan

$$\frac{n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}>\frac{2^k}{k+1}\to+\infty\quad(n\to\infty)$$

mert ahogy $n\to\infty$ úgy k is tart a végtelenbe.

NEVEZETES SOROZATOK V.(FOLYT.)

Bizonyítás.
Így tehát

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\overbrace{1+1+\cdots+1}^{k+1}=k+1,$$

ahonnan

$$\frac{n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}>\frac{2^k}{k+1}\to+\infty\quad(n\to\infty)$$

mert ahogy $n\to\infty$ úgy k is tart a végtelenbe.

NEVEZETES SOROZATOK V.(FOLYT.)

Bizonyítás.
Így tehát

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\overbrace{1+1+\cdots+1}^{k+1}=k+1,$$

ahonnan

$$\frac{n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}>\frac{2^k}{k+1}\to+\infty\quad(n\to\infty)$$

mert ahogy $n\to\infty$ úgy k is tart a végtelenbe.

NEVEZETES SOROZATOK V.(FOLYT.)

Bizonyítás.
Így tehát

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\overbrace{1+1+\cdots+1}^{k+1}=k+1,$$

ahonnan

$$\frac{n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}>\frac{2^k}{k+1}\to+\infty\quad(n\to\infty)$$

mert ahogy $n\to\infty$ úgy k is tart a végtelenbe.

KAMATOS KAMAT

Tegyük fel, hogy egy bizonyos pénzintézetben lekötött összegekre $100p\%$-os a kamatláb, azaz, a lekötött összeg helyett egy év után az $(1+p)$-szeresét kapjuk vissza. Feltesszük, hogy nincs kezelési költség. Ha fél év után kivesszük, akkor $(1+\frac{p}{2})$-szörösét kapjuk vissza. Ha most ezt ismét lekötjük fél évre, akkor ennek leteltével ennek az új összegnek kapjuk vissza az $(1+\frac{p}{2})$-szörösét, ami tehát az eredeti összegünk $(1+\frac{p}{2})^2$-szerese. Hasonlóan látjuk, hogy ha minden hónapban újra lekötjük a teljes addig felhalmozott összeget, akkor egy év elteltével az eredeti összegünk a

$$\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12} -$$

szorosára növekszik.

KAMATOS KAMAT

Tegyük fel, hogy egy bizonyos pénzintézetben lekötött összegekre $100p\%$-os a kamatláb, azaz, a lekötött összeg helyett egy év után az $(1+p)$-szeresét kapjuk vissza. Feltesszük, hogy nincs kezelési költség. Ha fél év után kivesszük, akkor $(1+\frac{p}{2})$-szörösét kapjuk vissza. Ha most ezt ismét lekötjük fél évre, akkor ennek leteltével ennek az új összegnek kapjuk vissza az $(1+\frac{p}{2})$-szörösét, ami tehát az eredeti összegünk $(1+\frac{p}{2})^2$-szerese. Hasonlóan látjuk, hogy ha minden hónapban újra lekötjük a teljes addig felhalmozott összeget, akkor egy év elteltével az eredeti összegünk a

$$\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12} -$$

szorosára növekszik.

KAMATOS KAMAT

Tegyük fel, hogy egy bizonyos pénzintézetben lekötött összegekre $100p\%$-os a kamatláb, azaz, a lekötött összeg helyett egy év után az $(1+p)$-szeresét kapjuk vissza. Feltesszük, hogy nincs kezelési költség. Ha fél év után kivesszük, akkor $(1+\frac{p}{2})$-szörösét kapjuk vissza. Ha most ezt ismét lekötjük fél évre, akkor ennek leteltével ennek az új összegnek kapjuk vissza az $(1+\frac{p}{2})$-szörösét, ami tehát az eredeti összegünk $(1+\frac{p}{2})^2$-szerese. Hasonlóan látjuk, hogy ha minden hónapban újra lekötjük a teljes addig felhalmozott összeget, akkor egy év elteltével az eredeti összegünk a

$$\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12} -$$

szorosára növekszik.

KAMATOS KAMAT

Tegyük fel, hogy egy bizonyos pénzintézetben lekötött összegekre $100p\%$-os a kamatláb, azaz, a lekötött összeg helyett egy év után az $(1+p)$-szeresét kapjuk vissza. Feltesszük, hogy nincs kezelési költség. Ha fél év után kivesszük, akkor $(1+\frac{p}{2})$-szörösét kapjuk vissza. Ha most ezt ismét lekötjük fél évre, akkor ennek leteltével ennek az új összegnek kapjuk vissza az $(1+\frac{p}{2})$-szörösét, ami tehát az eredeti összegünk $(1+\frac{p}{2})^2$-szerese. Hasonlóan látjuk, hogy ha minden hónapban újra lekötjük a teljes addig felhalmozott összeget, akkor egy év elteltével az eredeti összegünk a

$$\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12} -$$

szorosára növekszik.

KAMATOS KAMAT

Tegyük fel, hogy egy bizonyos pénzintézetben lekötött összegekre $100p\%$-os a kamatláb, azaz, a lekötött összeg helyett egy év után az $(1+p)$-szeresét kapjuk vissza. Feltesszük, hogy nincs kezelési költség. Ha fél év után kivesszük, akkor $(1+\frac{p}{2})$-szörösét kapjuk vissza. Ha most ezt ismét lekötjük fél évre, akkor ennek leteltével ennek az új összegnek kapjuk vissza az $(1+\frac{p}{2})$-szörösét, ami tehát az eredeti összegünk $(1+\frac{p}{2})^2$-szerese. Hasonlóan látjuk, hogy ha minden hónapban újra lekötjük a teljes addig felhalmozott összeget, akkor egy év elteltével az eredeti összegünk a

$$\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12} -$$

szorosára növekszik.

KAMATOS KAMAT

Tegyük fel, hogy egy bizonyos pénzintézetben lekötött összegekre $100p\%$-os a kamatláb, azaz, a lekötött összeg helyett egy év után az $(1+p)$-szeresét kapjuk vissza. Feltesszük, hogy nincs kezelési költség. Ha fél év után kivesszük, akkor $(1+\frac{p}{2})$-szörösét kapjuk vissza. Ha most ezt ismét lekötjük fél évre, akkor ennek leteltével ennek az új összegnek kapjuk vissza az $(1+\frac{p}{2})$-szörösét, ami tehát az eredeti összegünk $(1+\frac{p}{2})^2$-szerese. Hasonlóan látjuk, hogy ha minden hónapban újra lekötjük a teljes addig felhalmozott összeget, akkor egy év elteltével az eredeti összegünk a

$$\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12} -$$

szorosára növekszik.

KAMATOS KAMAT

Tegyük fel, hogy egy bizonyos pénzintézetben lekötött összegekre $100p\%$-os a kamatláb, azaz, a lekötött összeg helyett egy év után az $(1+p)$-szeresét kapjuk vissza. Feltesszük, hogy nincs kezelési költség. Ha fél év után kivesszük, akkor $(1+\frac{p}{2})$-szörösét kapjuk vissza. Ha most ezt ismét lekötjük fél évre, akkor ennek leteltével ennek az új összegnek kapjuk vissza az $(1+\frac{p}{2})$-szörösét, ami tehát az eredeti összegünk $(1+\frac{p}{2})^2$-szerese. Hasonlóan látjuk, hogy ha minden hónapban újra lekötjük a teljes addig felhalmozott összeget, akkor egy év elteltével az eredeti összegünk a

$$\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12} -$$

szorosára növekszik.

KAMATOS KAMAT

KÉRDÉS

Létezik-e az alábbi határérték?

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$$

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA

TÉTEL

Az

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat monoton növekvő és felülről korlátos. Többek közt, létezik az

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

határérték.

$e = 2,718\ldots$, neve: Euler-féle szám, vagy a természetes logaritmus alapja.

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA

TÉTEL

Az

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat monoton növekvő és felülről korlátos. Többek közt, létezik az

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

határérték.

$e = 2,718\ldots$, neve: Euler-féle szám, vagy a természetes logaritmus alapja.

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA

TÉTEL

Az

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat monoton növekvő és felülről korlátos. Többek közt, létezik az

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

határérték.

$e = 2,718\ldots$, neve: Euler-féle szám, vagy a természetes logaritmus alapja.

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA

TÉTEL

Az

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat monoton növekvő és felülről korlátos. Többek közt, létezik az

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

határérték.

$e = 2,718\ldots$, neve: Euler-féle szám, vagy a természetes logaritmus alapja.

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA, MONOTONITÁS

Megmutatjuk, hogy e_n monoton növekvő. A számtani és mértani közép közti összefüggést alkalmazzuk az

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = 1$$

számokra:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Átrendezve, és mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emelve, kapjuk:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA, MONOTONITÁS

Megmutatjuk, hogy e_n monoton növekvő. A számtani és mértani közép közti összefüggést alkalmazzuk az

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = 1$$

számokra:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Átrendezve, és mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emelve, kapjuk:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA, MONOTONITÁS

Megmutatjuk, hogy e_n monoton növekvő. A számtani és mértani közép közti összefüggést alkalmazzuk az

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = 1$$

számokra:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Átrendezve, és mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emelve, kapjuk:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA, MONOTONITÁS

Megmutatjuk, hogy e_n monoton növekvő. A számtani és mértani közép közti összefüggést alkalmazzuk az

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = 1$$

számokra:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Átrendezve, és mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emelve, kapjuk:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA, KORLÁTOSSÁG

Megmutatjuk, hogy e_n felülről korlátos. A számtani és mértani közép közti összefüggést alkalmazzuk az

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$$

számokra:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+2} \geq \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4}}.$$

A bal oldalon álló érték 1, ezért mindkét oldalt $(n+2)$-edik hatványra emelve, kapjuk hogy:

$$1 \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4} \Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4.$$

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA, KORLÁTOSSÁG

Megmutatjuk, hogy e_n felülről korlátos. A számtani és mértani közép közti összefüggést alkalmazzuk az

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$$

számokra:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+2} \geq \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4}}.$$

A bal oldalon álló érték 1, ezért mindkét oldalt $(n+2)$-edik hatványra emelve, kapjuk hogy:

$$1 \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4} \Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4.$$

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA, KORLÁTOSSÁG

Megmutatjuk, hogy e_n felülről korlátos. A számtani és mértani közép közti összefüggést alkalmazzuk az

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$$

számokra:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+2} \geq \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4}}.$$

A bal oldalon álló érték 1, ezért mindkét oldalt $(n+2)$-edik hatványra emelve, kapjuk hogy:

$$1 \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4} \Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4.$$

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA, KORLÁTOSSÁG

Megmutatjuk, hogy e_n felülről korlátos. A számtani és mértani közép közti összefüggést alkalmazzuk az

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$$

számokra:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+2} \geq \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4}}.$$

A bal oldalon álló érték 1, ezért mindkét oldalt $(n+2)$-edik hatványra emelve, kapjuk hogy:

$$1 \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4} \Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4.$$

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJA, KORLÁTOSSÁG

Megmutatjuk, hogy e_n felülről korlátos. A számtani és mértani közép közti összefüggést alkalmazzuk az

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$$

számokra:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+2} \geq \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4}}.$$

A bal oldalon álló érték 1, ezért mindkét oldalt $(n+2)$-edik hatványra emelve, kapjuk hogy:

$$1 \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4} \Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4.$$

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJÁNAK HATVÁNYAI

TÉTEL

Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}.$$

Nem bizonyítjuk.

A TERMÉSZETES LOGARITMUS ALAPJÁNAK HATVÁNYAI

TÉTEL

Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}.$$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{2n-\sqrt[3]{n^3-2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{n\left(2-\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2-\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}} = \frac{1+\sqrt{1+0}}{2-\sqrt[3]{1-0}} = 2.$$

PÉLDÁK 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{2n-\sqrt[3]{n^3-2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{n\left(2-\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2-\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}} = \frac{1+\sqrt{1+0}}{2-\sqrt[3]{1-0}} = 2.$$

PÉLDÁK 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{2n-\sqrt[3]{n^3-2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{n\left(2-\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2-\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}} = \frac{1+\sqrt{1+0}}{2-\sqrt[3]{1-0}} = 2.$$

PÉLDÁK 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{2n-\sqrt[3]{n^3-2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{n\left(2-\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2-\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}} = \frac{1+\sqrt{1+0}}{2-\sqrt[3]{1-0}} = 2.$$

PÉLDÁK 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{2n-\sqrt[3]{n^3-2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{n\left(2-\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2-\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}} = \frac{1+\sqrt{1+0}}{2-\sqrt[3]{1-0}} = 2.$$

PÉLDÁK 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right)\right)=\infty\cdot(1-1)$$

KRITIKUS HATÁRTÉRTÉK!

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=0$$

PÉLDÁK 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right)\right)=\infty\cdot(1-1)$$

KRITIKUS HATÁRTÉRTÉK!

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=0$$

PÉLDÁK 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right)\right)=\infty\cdot(1-1)$$

KRITIKUS HATÁRTÉRTÉK!

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=0$$

PÉLDÁK 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right)\right)=\infty\cdot(1-1)$$

KRITIKUS HATÁRTÉRTÉK!

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=0$$

PÉLDÁK 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right)\right)=\infty\cdot(1-1)$$

KRITIKUS HATÁRTÉRTÉK!

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=0$$

PÉLDÁK 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right)\right)=\infty\cdot(1-1)$$

KRITIKUS HATÁRTÉRTÉK!

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=0$$

PÉLDÁK 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right)\right)=\infty\cdot(1-1)$$

KRITIKUS HATÁRTÉRTÉK!

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=0$$

PÉLDÁK 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right)\right)=\infty\cdot(1-1)$$

KRITIKUS HATÁRTÉRTÉK!

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-2}\right)\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(n+\sqrt{n^2-2}\right)}=0$$

PÉLDÁK 3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+3)-4}{2n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{n}{2n+3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{1}{2+\frac{3}{n}}} = \left(e^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^2}.$$

PÉLDÁK 3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+3)-4}{2n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{n}{2n+3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{1}{2+\frac{3}{n}}} = \left(e^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^2}.$$

PÉLDÁK 3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+3)-4}{2n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{n}{2n+3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{1}{2+\frac{3}{n}}} = \left(e^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^2}.$$

PÉLDÁK 3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+3)-4}{2n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{n}{2n+3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{1}{2+\frac{3}{n}}} = \left(e^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^2}.$$

PÉLDÁK 3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+3)-4}{2n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{n}{2n+3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{1}{2+\frac{3}{n}}} = \left(e^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^2}.$$

PÉLDÁK 3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+3)-4}{2n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{n}{2n+3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{1}{2+\frac{3}{n}}} = \left(e^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^2}.$$

PÉLDÁK 3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+3)-4}{2n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{n}{2n+3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{1}{2+\frac{3}{n}}} = \left(e^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^2}.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1.$

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1.$

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$

PÉLDÁK 4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = ?$$

Megpróbáljuk a rendőr-elvet alkalmazni.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \leq n^3 + n + 1 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3,$$

ha $n \geq 1$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$.

$$n^3 - n^2 + n + 1 \geq n^3 - n^2 \geq n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2},$$

ha $n \geq 2$. De $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1^3}{1} = 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + n + 1} = 1.$$