6. ELŐADÁS: SZÁMSOROZATOK 3. — TORLÓDÁSI PONTOK

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

DEFINÍCIÓ

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$. Az x szám ε sugarú (nyílt) környezete az $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ intervallum.

1. $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$: x ε sugarú zárt környezete
2. $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}$: x ε sugarú (nyílt) pontozott környezete
3. $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \setminus \{x\}$: x ε sugarú zárt pontozott környezete
4. $[x, x + \varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) környezete
5. $(x - \varepsilon, x]$: x ε sugarú baloldali (nyílt) környezete
6. $[x, x + \varepsilon]$: x ε sugarú jobboldali zárt környezete
7. $(x, x + \varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) pontozott környezete

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

DEFINÍCIÓ

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$. Az x szám ε sugarú (nyílt) környezete az $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ intervallum.

1. $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$: x ε sugarú zárt környezete
2. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}$: x ε sugarú (nyílt) pontozott környezete
3. $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \setminus \{x\}$: x ε sugarú zárt pontozott környezete
4. $[x, x+\varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) környezete
5. $(x-\varepsilon, x]$: x ε sugarú baloldali (nyílt) környezete
6. $[x, x+\varepsilon]$: x ε sugarú jobboldali zárt környezete
7. $(x, x+\varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) pontozott környezete

Konvergencia másképp

Definíció

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$. Az x szám ε sugarú (nyílt) környezete az $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ intervallum.

1. $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$: x ε sugarú zárt környezete
2. $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}$: x ε sugarú (nyílt) pontozott környezete
3. $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \setminus \{x\}$: x ε sugarú zárt pontozott környezete
4. $[x, x + \varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) környezete
5. $(x - \varepsilon, x]$: x ε sugarú baloldali (nyílt) környezete
6. $[x, x + \varepsilon]$: x ε sugarú jobboldali zárt környezete
7. $(x, x + \varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) pontozott környezete

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

DEFINÍCIÓ

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$. Az x szám ε sugarú (nyílt) környezete az $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ intervallum.

1. $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$: x ε sugarú zárt környezete
2. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}$: x ε sugarú (nyílt) pontozott környezete
3. $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \setminus \{x\}$: x ε sugarú zárt pontozott környezete
4. $[x, x+\varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) környezete
5. $(x-\varepsilon, x]$: x ε sugarú baloldali (nyílt) környezete
6. $[x, x+\varepsilon]$: x ε sugarú jobboldali zárt környezete
7. $(x, x+\varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) pontozott környezete

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

DEFINÍCIÓ

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$. Az x szám ε sugarú (nyílt) környezete az $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ intervallum.

1. $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$: x ε sugarú zárt környezete
2. $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}$: x ε sugarú (nyílt) pontozott környezete
3. $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \setminus \{x\}$: x ε sugarú zárt pontozott környezete
4. $[x, x + \varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) környezete
5. $(x - \varepsilon, x]$: x ε sugarú baloldali (nyílt) környezete
6. $[x, x + \varepsilon]$: x ε sugarú jobboldali zárt környezete
7. $(x, x + \varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) pontozott környezete

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

DEFINÍCIÓ

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$. Az x szám ε sugarú (nyílt) környezete az $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ intervallum.

1. $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$: x ε sugarú zárt környezete
2. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}$: x ε sugarú (nyílt) pontozott környezete
3. $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \setminus \{x\}$: x ε sugarú zárt pontozott környezete
4. $[x, x+\varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) környezete
5. $(x-\varepsilon, x]$: x ε sugarú baloldali (nyílt) környezete
6. $[x, x+\varepsilon]$: x ε sugarú jobboldali zárt környezete
7. $(x, x+\varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) pontozott környezete

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

DEFINÍCIÓ

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$. Az x szám ε sugarú (nyílt) környezete az $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ intervallum.

1. $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$: x ε sugarú zárt környezete
2. $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}$: x ε sugarú (nyílt) pontozott környezete
3. $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \setminus \{x\}$: x ε sugarú zárt pontozott környezete
4. $[x, x + \varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) környezete
5. $(x - \varepsilon, x]$: x ε sugarú baloldali (nyílt) környezete
6. $[x, x + \varepsilon]$: x ε sugarú jobboldali zárt környezete
7. $(x, x + \varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) pontozott környezete

Konvergencia másképp

Definíció

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$. Az x szám ε sugarú (nyílt) környezete az $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ intervallum.

1. $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$: x ε sugarú zárt környezete
2. $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}$: x ε sugarú (nyílt) pontozott környezete
3. $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \setminus \{x\}$: x ε sugarú zárt pontozott környezete
4. $[x, x + \varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) környezete
5. $(x - \varepsilon, x]$: x ε sugarú baloldali (nyílt) környezete
6. $[x, x + \varepsilon]$: x ε sugarú jobboldali zárt környezete
7. $(x, x + \varepsilon)$: x ε sugarú jobboldali (nyílt) pontozott környezete

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

EMLÉKEZTETŐ

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergens és határértéke* $a \in \mathbb{R}$: *minden* $\varepsilon > 0$ *esetén van olyan* $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ *szám, hogy ha* $n > n_\varepsilon$, *akkor* $|a_n - a| < \varepsilon$.

ÁLLÍTÁS

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat pontosan akkor konvergens és határértéke* $a \in \mathbb{R}$, *ha a minden környezete* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *minden elemét tartalmazza véges sok kivételével.*

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

EMLÉKEZTETŐ

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens és határértéke $a \in \mathbb{R}$: minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ szám, hogy ha $n > n_\varepsilon$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$.

ÁLLÍTÁS

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens és határértéke $a \in \mathbb{R}$, ha a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minden elemét tartalmazza véges sok kivételével.

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

EMLÉKEZTETŐ

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergens és határértéke* $a \in \mathbb{R}$: *minden* $\varepsilon > 0$ *esetén van olyan* $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ *szám, hogy ha* $n > n_\varepsilon$, *akkor* $|a_n - a| < \varepsilon$.

ÁLLÍTÁS

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat pontosan akkor konvergens és határértéke* $a \in \mathbb{R}$, *ha a minden környezete* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *minden elemét tartalmazza véges sok kivételével.*

Konvergencia másképp

Bizonyítás

Egyik irány: legyen $a_n \to a$, és legyen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ egy ε-hoz tartozó küszöbszám. Ekkor a ε sugarú környezete minden elemet tartalmaz, kivéve legfeljebb az $a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varepsilon}$ elemeket.

Másik irány: Ha a egy ε sugarú környezete csak véges sok elemet nem tartalmaz, akkor van köztük legutolsó elem. Ennek indexét jelölje n_ε. Ekkor minden $n > n_\varepsilon$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$.

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

BIZONYÍTÁS

Egyik irány: legyen $a_n \to a$, és legyen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ egy ε-hoz tartozó küszöbszám. Ekkor a ε sugarú környezete minden elemet tartalmaz, kivéve legfeljebb az $a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varepsilon}$ elemeket.

Másik irány: Ha a egy ε sugarú környezete csak véges sok elemet nem tartalmaz, akkor van köztük legutolsó elem. Ennek indexét jelölje n_ε. Ekkor minden $n > n_\varepsilon$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$.

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

BIZONYÍTÁS

Egyik irány: legyen $a_n \to a$*, és legyen* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *egy* ε*-hoz tartozó küszöbszám. Ekkor a* ε *sugarú környezete minden elemet tartalmaz, kivéve legfeljebb az* $a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varepsilon}$ *elemeket.*
Másik irány: Ha a egy ε *sugarú környezete csak véges sok elemet nem tartalmaz, akkor van köztük legutolsó elem. Ennek indexét jelölje* n_ε*. Ekkor minden* $n > n_\varepsilon$ *esetén* $|a_n - a| < \varepsilon$*.*

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

BIZONYÍTÁS

Egyik irány: legyen $a_n \to a$*, és legyen* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *egy* ε*-hoz tartozó küszöbszám. Ekkor a* ε *sugarú környezete minden elemet tartalmaz, kivéve legfeljebb az* $a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varepsilon}$ *elemeket.*
Másik irány: Ha a egy ε *sugarú környezete csak véges sok elemet nem tartalmaz, akkor van köztük legutolsó elem. Ennek indexét jelölje* n_ε*. Ekkor minden* $n > n_\varepsilon$ *esetén* $|a_n - a| < \varepsilon$*.*

KONVERGENCIA MÁSKÉPP

BIZONYÍTÁS

Egyik irány: legyen $a_n \to a$*, és legyen* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *egy* ε*-hoz tartozó küszöbszám. Ekkor a* ε *sugarú környezete minden elemet tartalmaz, kivéve legfeljebb az* $a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varepsilon}$ *elemeket.*
Másik irány: Ha a egy ε *sugarú környezete csak véges sok elemet nem tartalmaz, akkor van köztük legutolsó elem. Ennek indexét jelölje* n_ε*. Ekkor minden* $n > n_\varepsilon$ *esetén* $|a_n - a| < \varepsilon$*.*

Torlódási pont

Definíció

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja, ha a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

Példa

1. *Konvergens sorozat határértéke a sorozat torlódási pontja.*
2. *Az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak két torlódási pontja van: $1, -1$.*

TORLÓDÁSI PONT

DEFINÍCIÓ

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja, ha a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

PÉLDA

1. *Konvergens sorozat határértéke a sorozat torlódási pontja.*
2. *Az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak két torlódási pontja van: $1, -1$.*

TORLÓDÁSI PONT

DEFINÍCIÓ

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja, ha a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

PÉLDA

1. *Konvergens sorozat határértéke a sorozat torlódási pontja.*
2. *Az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak két torlódási pontja van: $1, -1$.*

TORLÓDÁSI PONT

DEFINÍCIÓ

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja, ha a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

PÉLDA

1. *Konvergens sorozat határértéke a sorozat torlódási pontja.*
2. *Az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak két torlódási pontja van: $1, -1$.*

RÉSZSOROZAT

DEFINÍCIÓ

Legyen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egy szigorúan növő sorozat, melynek elemei természetes számok, és $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy sorozat. Ekkor az $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy részsorozatának nevezzük.

PÉLDA

1. $a_n = (-1)^n$, és $n_k = 2k$, akkor $a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1$. *Tehát a* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat egy részsorozata* $(1, 1, 1, \ldots)$.
2. *Ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy tetszőleges sorozat, akkor* $(a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots, a_{k^2}, \ldots)$ *egy részsorozata, ahol* $n_k = k^2$.
3. *Minden sorozat önmagának egy részsorozata, ahol* $n_k = k$.

RÉSZSOROZAT

DEFINÍCIÓ

Legyen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egy szigorúan növő sorozat, melynek elemei természetes számok, és $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy sorozat. Ekkor az $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy részsorozatának nevezzük.

PÉLDA

1. $a_n = (-1)^n$, *és* $n_k = 2k$, *akkor* $a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1$. *Tehát a* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat egy részsorozata* $(1, 1, 1, \ldots)$.
2. *Ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy tetszőleges sorozat, akkor* $(a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots, a_{k^2}, \ldots)$ *egy részsorozata, ahol* $n_k = k^2$.
3. *Minden sorozat önmagának egy részsorozata, ahol* $n_k = k$.

RÉSZSOROZAT

DEFINÍCIÓ

Legyen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *egy szigorúan növő sorozat, melynek elemei természetes számok, és* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy sorozat. Ekkor az* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *sorozatot* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy* ***részsorozatának*** *nevezzük.*

PÉLDA

1. $a_n = (-1)^n$, *és* $n_k = 2k$, *akkor* $a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1$. *Tehát a* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat egy részsorozata* $(1, 1, 1, \dots)$.
2. *Ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy tetszőleges sorozat, akkor* $(a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots, a_{k^2}, \dots)$ *egy részsorozata, ahol* $n_k = k^2$.
3. *Minden sorozat önmagának egy részsorozata, ahol* $n_k = k$.

RÉSZSOROZAT

DEFINÍCIÓ

Legyen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *egy szigorúan növő sorozat, melynek elemei természetes számok, és* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy sorozat. Ekkor az* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *sorozatot* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy **részsorozatának** nevezzük.*

PÉLDA

1. $a_n = (-1)^n$, *és* $n_k = 2k$, *akkor* $a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1$. *Tehát a* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat egy részsorozata* $(1, 1, 1, \ldots)$.
2. *Ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy tetszőleges sorozat, akkor* $(a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots, a_{k^2}, \ldots)$ *egy részsorozata, ahol* $n_k = k^2$.
3. *Minden sorozat önmagának egy részsorozata, ahol* $n_k = k$.

RÉSZSOROZAT

DEFINÍCIÓ

Legyen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *egy szigorúan növő sorozat, melynek elemei természetes számok, és* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy sorozat. Ekkor az* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *sorozatot* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy* ***részsorozatának*** *nevezzük.*

PÉLDA

1. $a_n = (-1)^n$, *és* $n_k = 2k$, *akkor* $a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1$. *Tehát a* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat egy részsorozata* $(1, 1, 1, \ldots)$.
2. *Ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy tetszőleges sorozat, akkor* $(a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots, a_{k^2}, \ldots)$ *egy részsorozata, ahol* $n_k = k^2$.
3. *Minden sorozat önmagának egy részsorozata, ahol* $n_k = k$.

RÉSZSOROZAT

DEFINÍCIÓ

Legyen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egy szigorúan növő sorozat, melynek elemei természetes számok, és $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy sorozat. Ekkor az $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy részsorozatának nevezzük.

PÉLDA

1. $a_n = (-1)^n$, *és* $n_k = 2k$, *akkor* $a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1$. *Tehát a* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat egy részsorozata* $(1, 1, 1, \dots)$.
2. *Ha* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy tetszőleges sorozat, akkor* $(a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots, a_{k^2}, \dots)$ *egy részsorozata, ahol* $n_k = k^2$.
3. *Minden sorozat önmagának egy részsorozata, ahol* $n_k = k$.

Torlódási pont és részsorozat kapcsolata

Tétel

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in (a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k})$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

TORLÓDÁSI PONT ÉS RÉSZSOROZAT KAPCSOLATA

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in (a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k})$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

TORLÓDÁSI PONT ÉS RÉSZSOROZAT KAPCSOLATA

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in (a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k})$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

TORLÓDÁSI PONT ÉS RÉSZSOROZAT KAPCSOLATA

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in (a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k})$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

TORLÓDÁSI PONT ÉS RÉSZSOROZAT KAPCSOLATA

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in (a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k})$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

TORLÓDÁSI PONT ÉS RÉSZSOROZAT KAPCSOLATA

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in (a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k})$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

TORLÓDÁSI PONT ÉS RÉSZSOROZAT KAPCSOLATA

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $\left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right)$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in \left(a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}\right)$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

TORLÓDÁSI PONT ÉS RÉSZSOROZAT KAPCSOLATA

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $\left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right)$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in \left(a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}\right)$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

TORLÓDÁSI PONT ÉS RÉSZSOROZAT KAPCSOLATA

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $\left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right)$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in \left(a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}\right)$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

TORLÓDÁSI PONT ÉS RÉSZSOROZAT KAPCSOLATA

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $\left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right)$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in \left(a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}\right)$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

TORLÓDÁSI PONT ÉS RÉSZSOROZAT KAPCSOLATA

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $\left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right)$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in \left(a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}\right)$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

TORLÓDÁSI PONT ÉS RÉSZSOROZAT KAPCSOLATA

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $\left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right)$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in \left(a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}\right)$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

TORLÓDÁSI PONT ÉS RÉSZSOROZAT KAPCSOLATA

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak $a \in \mathbb{R}$ pontosan akkor torlódási pontja, ha a sorozatnak van a-hoz tartó konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Mivel a torlódási pont, ezért $(a-1, a+1)$ a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen a_{n_1} egy ilyen elem. Hasonlóan, $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$ is a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, ezért kiválasztható innen egy a_{n_2} elem, melyre $n_2 > n_1$. Az eljárást folytatva minden $k \in \mathbb{N}_+$ számhoz van olyan n_k index, melyre $a_{n_k} \in (a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k})$, és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Az így konstruált $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat határértéke $a \in \mathbb{R}$.
Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz tart. Ekkor a minden környezete a részsorozat minden elemét tartalmazza, véges sok elem kivételével. Tehát a minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

TÉTEL

Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $k \le a_n \le K$ minden n-re. Legyen $k_1 = k$, $K_1 = K$. Ekkor a $\left[k_1, \frac{k_1+K_1}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_1+K_1}{2}, K_1\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_2, K_2]$ egy ilyen intervallumot a két intervallum közül. Hasonlóan, a $\left[k_2, \frac{k_2+K_2}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_2+K_2}{2}, K_2\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_3, K_3]$ egy ilyen intervallumot.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

TÉTEL

Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $k \leq a_n \leq K$ minden n-re. Legyen $k_1 = k$, $K_1 = K$. Ekkor a $\left[k_1, \frac{k_1+K_1}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_1+K_1}{2}, K_1\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_2, K_2]$ egy ilyen intervallumot a két intervallum közül. Hasonlóan, a $\left[k_2, \frac{k_2+K_2}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_2+K_2}{2}, K_2\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_3, K_3]$ egy ilyen intervallumot.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

TÉTEL

Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $k \leq a_n \leq K$ minden n-re. Legyen $k_1 = k$, $K_1 = K$. Ekkor a $\left[k_1, \frac{k_1+K_1}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_1+K_1}{2}, K_1\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_2, K_2]$ egy ilyen intervallumot a két intervallum közül. Hasonlóan, a $\left[k_2, \frac{k_2+K_2}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_2+K_2}{2}, K_2\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_3, K_3]$ egy ilyen intervallumot.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

TÉTEL

Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $k \leq a_n \leq K$ minden n-re. Legyen $k_1 = k$, $K_1 = K$. Ekkor a $\left[k_1, \frac{k_1+K_1}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_1+K_1}{2}, K_1\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_2, K_2]$ egy ilyen intervallumot a két intervallum közül. Hasonlóan, a $\left[k_2, \frac{k_2+K_2}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_2+K_2}{2}, K_2\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_3, K_3]$ egy ilyen intervallumot.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

TÉTEL

Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $k \leq a_n \leq K$ minden n-re. Legyen $k_1 = k$, $K_1 = K$. Ekkor a $\left[k_1, \frac{k_1+K_1}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_1+K_1}{2}, K_1\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_2, K_2]$ egy ilyen intervallumot a két intervallum közül. Hasonlóan, a $\left[k_2, \frac{k_2+K_2}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_2+K_2}{2}, K_2\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_3, K_3]$ egy ilyen intervallumot.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

TÉTEL

Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $k \leq a_n \leq K$ minden n-re. Legyen $k_1 = k$, $K_1 = K$. Ekkor a $\left[k_1, \frac{k_1+K_1}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_1+K_1}{2}, K_1\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_2, K_2]$ egy ilyen intervallumot a két intervallum közül. Hasonlóan, a $\left[k_2, \frac{k_2+K_2}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_2+K_2}{2}, K_2\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_3, K_3]$ egy ilyen intervallumot.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

TÉTEL

Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $k \leq a_n \leq K$ minden n-re. Legyen $k_1 = k$, $K_1 = K$. Ekkor a $\left[k_1, \frac{k_1+K_1}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_1+K_1}{2}, K_1\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_2, K_2]$ egy ilyen intervallumot a két intervallum közül. Hasonlóan, a $\left[k_2, \frac{k_2+K_2}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_2+K_2}{2}, K_2\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_3, K_3]$ egy ilyen intervallumot.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

TÉTEL

Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $k \leq a_n \leq K$ minden n-re. Legyen $k_1 = k$, $K_1 = K$. Ekkor a $\left[k_1, \frac{k_1+K_1}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_1+K_1}{2}, K_1\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_2, K_2]$ egy ilyen intervallumot a két intervallum közül. Hasonlóan, a $\left[k_2, \frac{k_2+K_2}{2}\right]$ és $\left[\frac{k_2+K_2}{2}, K_2\right]$ intervallumok legalább egyike a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Jelöljön $[k_3, K_3]$ egy ilyen intervallumot.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

Bizonyítás. Az eljárást folytatva kapunk egy $[k_1, K_1] \supset [k_2, K_2] \supset [k_3, K_3] \supset \ldots$ végtelen intervallumsorozatot, melyek hossza minden lépésben feleződik, és mindegyik a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen $x = \sup\{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$. Ekkor x mindegyik intervallumnak eleme. Mivel az intervallumok hossza nullához tart, x minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

Bizonyítás. Az eljárást folytatva kapunk egy $[k_1, K_1] \supset [k_2, K_2] \supset [k_3, K_3] \supset \ldots$ végtelen intervallumsorozatot, melyek hossza minden lépésben feleződik, és mindegyik a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen $x = \sup\{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$. Ekkor x mindegyik intervallumnak eleme. Mivel az intervallumok hossza nullához tart, x minden környezete $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

Bizonyítás. Az eljárást folytatva kapunk egy $[k_1, K_1] \supset [k_2, K_2] \supset [k_3, K_3] \supset \ldots$ végtelen intervallumsorozatot, melyek hossza minden lépésben feleződik, és mindegyik a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen $x = \sup\{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$. Ekkor x mindegyik intervallumnak eleme. Mivel az intervallumok hossza nullához tart, x minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

Bizonyítás. Az eljárást folytatva kapunk egy $[k_1, K_1] \supset [k_2, K_2] \supset [k_3, K_3] \supset \dots$ végtelen intervallumsorozatot, melyek hossza minden lépésben feleződik, és mindegyik a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen $x = \sup\{k_1, k_2, k_3, \dots\}$. Ekkor x mindegyik intervallumnak eleme. Mivel az intervallumok hossza nullához tart, x minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

A BOLZANO-WEIERSTRASS TÉTEL

Bizonyítás. Az eljárást folytatva kapunk egy $[k_1, K_1] \supset [k_2, K_2] \supset [k_3, K_3] \supset \dots$ végtelen intervallumsorozatot, melyek hossza minden lépésben feleződik, és mindegyik a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza. Legyen $x = \sup\{k_1, k_2, k_3, \dots\}$. Ekkor x mindegyik intervallumnak eleme. Mivel az intervallumok hossza nullához tart, x minden környezete $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ végtelen sok elemét tartalmazza.

KAPCSOLAT A KONVERGENCIÁVAL

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos és egy torlódási pontja van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, és határértéke $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és a a sorozat egy torlódási pontja. Ha $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$ is torlódási pontja lenne a sorozatnak, akkor az $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ jelöléssel a és b ε sugarú környezetei diszjunktak, és mindegyik végtelen sok elemet tartalmazna. De ez ellent mondana annak, hogy a minden környezete minden elemet tartalmaz, véges sok kivételével. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és egy torlódási pontja van, akkor a Bolzano-Weierstrass tétel bizonyításában található intervallumfelezéses eljárással igazolható, hogy konvergens.

KAPCSOLAT A KONVERGENCIÁVAL

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos és egy torlódási pontja van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, és határértéke $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és a a sorozat egy torlódási pontja. Ha $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$ is torlódási pontja lenne a sorozatnak, akkor az $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ jelöléssel a és b ε sugarú környezetei diszjunktak, és mindegyik végtelen sok elemet tartalmazna. De ez ellent mondana annak, hogy a minden környezete minden elemet tartalmaz, véges sok kivételével. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és egy torlódási pontja van, akkor a Bolzano-Weierstrass tétel bizonyításában található intervallumfelezéses eljárással igazolható, hogy konvergens.

KAPCSOLAT A KONVERGENCIÁVAL

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos és egy torlódási pontja van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, és határértéke $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és a a sorozat egy torlódási pontja. Ha $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$ is torlódási pontja lenne a sorozatnak, akkor az $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ jelöléssel a és b ε sugarú környezetei diszjunktak, és mindegyik végtelen sok elemet tartalmazna. De ez ellent mondana annak, hogy a minden környezete minden elemet tartalmaz, véges sok kivételével. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és egy torlódási pontja van, akkor a Bolzano-Weierstrass tétel bizonyításában található intervallumfelezéses eljárással igazolható, hogy konvergens.

KAPCSOLAT A KONVERGENCIÁVAL

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos és egy torlódási pontja van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, és határértéke $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és a a sorozat egy torlódási pontja. Ha $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$ is torlódási pontja lenne a sorozatnak, akkor az $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ jelöléssel a és b ε sugarú környezetei diszjunktak, és mindegyik végtelen sok elemet tartalmazna. De ez ellent mondana annak, hogy a minden környezete minden elemet tartalmaz, véges sok kivételével. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és egy torlódási pontja van, akkor a Bolzano-Weierstrass tétel bizonyításában található intervallumfelezéses eljárással igazolható, hogy konvergens.

KAPCSOLAT A KONVERGENCIÁVAL

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos és egy torlódási pontja van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, és határértéke $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és a a sorozat egy torlódási pontja. Ha $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$ is torlódási pontja lenne a sorozatnak, akkor az $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ jelöléssel a és b ε sugarú környezetei diszjunktak, és mindegyik végtelen sok elemet tartalmazna. De ez ellent mondana annak, hogy a minden környezete minden elemet tartalmaz, véges sok kivételével. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és egy torlódási pontja van, akkor a Bolzano-Weierstrass tétel bizonyításában található intervallumfelezéses eljárással igazolható, hogy konvergens.

KAPCSOLAT A KONVERGENCIÁVAL

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos és egy torlódási pontja van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, és határértéke $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és a a sorozat egy torlódási pontja. Ha $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$ is torlódási pontja lenne a sorozatnak, akkor az $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ jelöléssel a és b ε sugarú környezetei diszjunktak, és mindegyik végtelen sok elemet tartalmazna. De ez ellent mondana annak, hogy a minden környezete minden elemet tartalmaz, véges sok kivételével. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és egy torlódási pontja van, akkor a Bolzano-Weierstrass tétel bizonyításában található intervallumfelezéses eljárással igazolható, hogy konvergens.

KAPCSOLAT A KONVERGENCIÁVAL

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos és egy torlódási pontja van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, és határértéke $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és a a sorozat egy torlódási pontja. Ha $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$ is torlódási pontja lenne a sorozatnak, akkor az $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ jelöléssel a és b ε sugarú környezetei diszjunktak, és mindegyik végtelen sok elemet tartalmazna. De ez ellent mondana annak, hogy a minden környezete minden elemet tartalmaz, véges sok kivételével. Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és egy torlódási pontja van, akkor a Bolzano-Weierstrass tétel bizonyításában található intervallumfelezéses eljárással igazolható, hogy konvergens.

KAPCSOLAT A KONVERGENCIÁVAL

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos és egy torlódási pontja van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, és határértéke $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és a a sorozat egy torlódási pontja. Ha $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$ is torlódási pontja lenne a sorozatnak, akkor az $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ jelöléssel a és b ε sugarú környezetei diszjunktak, és mindegyik végtelen sok elemet tartalmazna. De ez ellent mondana annak, hogy a minden környezete minden elemet tartalmaz, véges sok kivételével.
Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és egy torlódási pontja van, akkor a Bolzano-Weierstrass tétel bizonyításában található intervallumfelezéses eljárással igazolható, hogy konvergens.

KAPCSOLAT A KONVERGENCIÁVAL

TÉTEL

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos és egy torlódási pontja van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, és határértéke $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és a a sorozat egy torlódási pontja. Ha $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$ is torlódási pontja lenne a sorozatnak, akkor az $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ jelöléssel a és b ε sugarú környezetei diszjunktak, és mindegyik végtelen sok elemet tartalmazna. De ez ellent mondana annak, hogy a minden környezete minden elemet tartalmaz, véges sok kivételével.
Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és egy torlódási pontja van, akkor a Bolzano-Weierstrass tétel bizonyításában található intervallumfelezéses eljárással igazolható, hogy konvergens.

Kapcsolat a konvergenciával

Tétel

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos és egy torlódási pontja van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, és határértéke $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és a a sorozat egy torlódási pontja. Ha $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$ is torlódási pontja lenne a sorozatnak, akkor az $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ jelöléssel a és b ε sugarú környezetei diszjunktak, és mindegyik végtelen sok elemet tartalmazna. De ez ellent mondana annak, hogy a minden környezete minden elemet tartalmaz, véges sok kivételével.
Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és egy torlódási pontja van, akkor a Bolzano-Weierstrass tétel bizonyításában található intervallumfelezéses eljárással igazolható, hogy konvergens.

SOROZATOK SOK TORLÓDÁSI PONTTAL

KÉRDÉS

Milyen sok torlódási pontja lehet egy sorozatnak?

MEGJEGYZÉS

Tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ számokra van olyan sorozat, pl. az

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k, \ldots)$$

sorozat, melynek torlódási pontjai éppen ezen számok.

SOROZATOK SOK TORLÓDÁSI PONTTAL

KÉRDÉS

Milyen sok torlódási pontja lehet egy sorozatnak?

MEGJEGYZÉS

Tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ *számokra van olyan sorozat, pl. az*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k, \ldots)$$

sorozat, melynek torlódási pontjai éppen ezen számok.

SOROZATOK SOK TORLÓDÁSI PONTTAL

TÉTEL

Van olyan sorozat, aminek minden valós szám torlódási pontja.

Bizonyítás. Olyan sorozatot gyártunk le, aminek minden tizedestört eleme. Csoportokba osztjuk a tizedestörteket:

1. Első csoport: $-1; 0; 1$.
2. Második csoport: $-2,0; -1,9; -1,8; \ldots, 1,9; 2,0$.
3. Harmadik csoport: $-3,00; -2,99; \ldots, 2,99; 3,00$, stb.

A fenti felsorolásban minden tizedestört előfordul valahol, és mindegyik csoport véges sok elemből áll, tehát minden csoport minden elemét felsorolhatjuk egymás után.

SOROZATOK SOK TORLÓDÁSI PONTTAL

TÉTEL

Van olyan sorozat, aminek minden valós szám torlódási pontja.

Bizonyítás. Olyan sorozatot gyártunk le, aminek minden tizedestört eleme. Csoportokba osztjuk a tizedestörteket:

1. Első csoport: $-1; 0; 1$.
2. Második csoport: $-2,0; -1,9; -1,8; \ldots, 1,9; 2,0$.
3. Harmadik csoport: $-3,00; -2,99; \ldots, 2,99; 3,00$, stb.

A fenti felsorolásban minden tizedestört előfordul valahol, és mindegyik csoport véges sok elemből áll, tehát minden csoport minden elemét felsorolhatjuk egymás után.

SOROZATOK SOK TORLÓDÁSI PONTTAL

TÉTEL

Van olyan sorozat, aminek minden valós szám torlódási pontja.

Bizonyítás. Olyan sorozatot gyártunk le, aminek minden tizedestört eleme. Csoportokba osztjuk a tizedestörteket:

1. Első csoport: $-1; 0; 1$.
2. Második csoport: $-2,0; -1,9; -1,8; \ldots, 1,9; 2,0$.
3. Harmadik csoport: $-3,00; -2,99; \ldots, 2,99; 3,00$, stb.

A fenti felsorolásban minden tizedestört előfordul valahol, és mindegyik csoport véges sok elemből áll, tehát minden csoport minden elemét felsorolhatjuk egymás után.

SOROZATOK SOK TORLÓDÁSI PONTTAL

TÉTEL

Van olyan sorozat, aminek minden valós szám torlódási pontja.

Bizonyítás. Olyan sorozatot gyártunk le, aminek minden tizedestört eleme. Csoportokba osztjuk a tizedestörteket:

1. Első csoport: $-1; 0; 1$.
2. Második csoport: $-2,0; -1,9; -1,8; \ldots, 1,9; 2,0$.
3. Harmadik csoport: $-3,00; -2,99; \ldots, 2,99; 3,00$, stb.

A fenti felsorolásban minden tizedestört előfordul valahol, és mindegyik csoport véges sok elemből áll, tehát minden csoport minden elemét felsorolhatjuk egymás után.

SOROZATOK SOK TORLÓDÁSI PONTTAL

TÉTEL

Van olyan sorozat, aminek minden valós szám torlódási pontja.

Bizonyítás. Olyan sorozatot gyártunk le, aminek minden tizedestört eleme. Csoportokba osztjuk a tizedestörteket:

1. Első csoport: $-1; 0; 1$.
2. Második csoport: $-2,0; -1,9; -1,8; \ldots, 1,9; 2,0$.
3. Harmadik csoport: $-3,00; -2,99; \ldots, 2,99; 3,00$, stb.

A fenti felsorolásban minden tizedestört előfordul valahol, és mindegyik csoport véges sok elemből áll, tehát minden csoport minden elemét felsorolhatjuk egymás után.

SOROZATOK SOK TORLÓDÁSI PONTTAL

TÉTEL

Van olyan sorozat, aminek minden valós szám torlódási pontja.

Bizonyítás. Olyan sorozatot gyártunk le, aminek minden tizedestört eleme. Csoportokba osztjuk a tizedestörteket:

1. Első csoport: $-1; 0; 1$.
2. Második csoport: $-2,0; -1,9; -1,8; \ldots, 1,9; 2,0$.
3. Harmadik csoport: $-3,00; -2,99; \ldots, 2,99; 3,00$, stb.

A fenti felsorolásban minden tizedestört előfordul valahol, és mindegyik csoport véges sok elemből áll, tehát minden csoport minden elemét felsorolhatjuk egymás után.

SOROZATOK SOK TORLÓDÁSI PONTTAL

TÉTEL

Van olyan sorozat, aminek minden valós szám torlódási pontja.

Bizonyítás. Olyan sorozatot gyártunk le, aminek minden tizedestört eleme. Csoportokba osztjuk a tizedestörteket:

1. Első csoport: $-1; 0; 1$.
2. Második csoport: $-2,0; -1,9; -1,8; \dots, 1,9; 2,0$.
3. Harmadik csoport: $-3,00; -2,99; \dots, 2,99; 3,00$, stb.

A fenti felsorolásban minden tizedestört előfordul valahol, és mindegyik csoport véges sok elemből áll, tehát minden csoport minden elemét felsorolhatjuk egymás után.

SOROZATOK SOK TORLÓDÁSI PONTTAL

TÉTEL

Van olyan sorozat, aminek minden valós szám torlódási pontja.

Bizonyítás. Olyan sorozatot gyártunk le, aminek minden tizedestört eleme. Csoportokba osztjuk a tizedestörteket:

1. Első csoport: $-1; 0; 1$.
2. Második csoport: $-2,0; -1,9; -1,8; \dots, 1,9; 2,0$.
3. Harmadik csoport: $-3,00; -2,99; \dots, 2,99; 3,00$, stb.

A fenti felsorolásban minden tizedestört előfordul valahol, és mindegyik csoport véges sok elemből áll, tehát minden csoport minden elemét felsorolhatjuk egymás után.

SOROZATOK SOK TORLÓDÁSI PONTTAL

TÉTEL

Van olyan sorozat, aminek minden valós szám torlódási pontja.

Bizonyítás. Olyan sorozatot gyártunk le, aminek minden tizedestört eleme. Csoportokba osztjuk a tizedestörteket:

1. Első csoport: $-1; 0; 1$.
2. Második csoport: $-2,0; -1,9; -1,8; \ldots, 1,9; 2,0$.
3. Harmadik csoport: $-3,00; -2,99; \ldots, 2,99; 3,00$, stb.

A fenti felsorolásban minden tizedestört előfordul valahol, és mindegyik csoport véges sok elemből áll, tehát minden csoport minden elemét felsorolhatjuk egymás után.