7. ELŐADÁS: SZÁMSOROK 1.

SZÁMSOROK

Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vagy $n \geq 1$) valós számok. Célunk: értelmet adni a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

végtelen összegnek, amit végtelen számsornak nevezünk.

PÉLDA

Mennyi $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots$?

$1-1+1-1+\ldots+=(1-1)+(1-1)+\ldots=0$?

$1-1+1-1+\ldots+=1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1$?

SZÁMSOROK

Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vagy $n \geq 1$) valós számok. Célunk: értelmet adni a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

végtelen összegnek, amit végtelen számsornak nevezünk.

PÉLDA

Mennyi $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$*?*

$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0$?

$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1$?

SZÁMSOROK

Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vagy $n \geq 1$) valós számok. Célunk: értelmet adni a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

végtelen összegnek, amit végtelen számsornak nevezünk.

PÉLDA

Mennyi $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$*?*

$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0$*?*

$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1$*?*

SZÁMSOROK

Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vagy $n \geq 1$) valós számok. Célunk: értelmet adni a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

végtelen összegnek, amit végtelen számsornak nevezünk.

PÉLDA

Mennyi $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots ?$
$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0\,?$
$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1\,?$

SZÁMSOROK

Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$$

a sor *k*-adik részletösszege. x_n neve: a sor (általános) tagja.

DEFINÍCIÓ

A fenti végtelen sor konvergens, ha az $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k,$$

amit a sor összegének hívunk (divergens = nem konvergens). Ha $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$ vagy $-\infty$, akkor a fenti sor összege ∞ vagy $-\infty$.

SZÁMSOROK

Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$$

a sor *k*-adik részletösszege. x_n neve: a sor (általános) tagja.

DEFINÍCIÓ

A fenti végtelen sor konvergens, ha az $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k,$$

amit a sor összegének hívunk (divergens = nem konvergens). Ha $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$ vagy $-\infty$, akkor a fenti sor összege ∞ vagy $-\infty$.

SZÁMSOROK

Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$$

a sor k-adik részletösszege. x_n neve: a sor (általános) tagja.

DEFINÍCIÓ

A fenti végtelen sor konvergens, ha az $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k,$$

amit a sor összegének hívunk (divergens = nem konvergens). Ha $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$ vagy $-\infty$, akkor a fenti sor összege ∞ vagy $-\infty$.

SZÁMSOROK

Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$$

a sor *k*-adik részletösszege. x_n neve: a sor (általános) tagja.

DEFINÍCIÓ

A fenti végtelen sor konvergens, ha az $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k,$$

amit a sor összegének hívunk (divergens = nem konvergens). Ha $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$ vagy $-\infty$, akkor a fenti sor összege ∞ vagy $-\infty$.

SZÁMSOROK

Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$$

a sor *k*-adik részletösszege. x_n neve: a sor (általános) tagja.

DEFINÍCIÓ

A fenti végtelen sor konvergens, ha az $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k,$$

amit a sor összegének hívunk (divergens = nem konvergens). Ha $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$ vagy $-\infty$, akkor a fenti sor összege ∞ vagy $-\infty$.

SZÁMSOROK

Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$$

a sor *k*-adik részletösszege. x_n neve: a sor (általános) tagja.

DEFINÍCIÓ

A fenti végtelen sor konvergens, ha az $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k,$$

amit a sor összegének hívunk (divergens = nem konvergens).

Ha $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$ vagy $-\infty$, akkor a fenti sor összege ∞ vagy $-\infty$.

SZÁMSOROK

Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$$

a sor k-adik részletösszege. x_n neve: a sor (általános) tagja.

DEFINÍCIÓ

A fenti végtelen sor konvergens, ha az $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k,$$

amit a sor összegének hívunk (divergens = nem konvergens). Ha $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$ vagy $-\infty$, akkor a fenti sor összege ∞ vagy $-\infty$.

SZÁMSOROK: PÉLDÁK

1. A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor esetén

$$s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

   Tehát a fenti sor divergens, és nincs összege.

2. A $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1$, és $\lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tehát a sor divergens és összege ∞.

3. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2 - \frac{1}{2^k}$, és $\lim_{k\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^k}\right) = 2$, tehát a sor konvergens, és összege 2.

SZÁMSOROK: PÉLDÁK

1. A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor esetén

$$s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

   Tehát a fenti sor divergens, és nincs összege.

2. A $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1$, és $\lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tehát a sor divergens és összege ∞.

3. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2 - \frac{1}{2^k}$, és $\lim_{k\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^k}\right) = 2$, tehát a sor konvergens, és összege 2.

SZÁMSOROK: PÉLDÁK

1. A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor esetén
$$s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$
Tehát a fenti sor divergens, és nincs összege.
2. A $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1$, és $\lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tehát a sor divergens és összege ∞.
3. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2 - \frac{1}{2^k}$, és $\lim_{k\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^k}\right) = 2$, tehát a sor konvergens, és összege 2.

SZÁMSOROK: PÉLDÁK

1. A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor esetén

$$s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

   Tehát a fenti sor divergens, és nincs összege.

2. A $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1$, és $\lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tehát a sor divergens és összege ∞.

3. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2 - \frac{1}{2^k}$, és $\lim_{k\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^k}\right) = 2$, tehát a sor konvergens, és összege 2.

SZÁMSOROK: PÉLDÁK

1. A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor esetén
$$s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$
Tehát a fenti sor divergens, és nincs összege.
2. A $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1$, és $\lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tehát a sor divergens és összege ∞.
3. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2 - \frac{1}{2^k}$, és $\lim_{k\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^k}\right) = 2$, tehát a sor konvergens, és összege 2.

SZÁMSOROK: PÉLDÁK

1. A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor esetén

$$s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

   Tehát a fenti sor divergens, és nincs összege.

2. A $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1$, és $\lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tehát a sor divergens és összege ∞.

3. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2 - \frac{1}{2^k}$, és $\lim_{k\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^k}\right) = 2$, tehát a sor konvergens, és összege 2.

SZÁMSOROK: PÉLDÁK

1. A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor esetén
$$s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$
Tehát a fenti sor divergens, és nincs összege.
2. A $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k + 1$, és $\lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tehát a sor divergens és összege ∞.
3. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{1}{2^k}$, és $\lim_{k\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^k}\right) = 2$, tehát a sor konvergens, és összege 2.

SZÁMSOROK: PÉLDÁK

1. A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor esetén

$$s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

   Tehát a fenti sor divergens, és nincs összege.

2. A $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1$, és $\lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tehát a sor divergens és összege ∞.

3. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2 - \frac{1}{2^k}$, és $\lim_{k\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^k}\right) = 2$, tehát a sor konvergens, és összege 2.

SZÁMSOROK: PÉLDÁK

1. A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor esetén

$$s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

   Tehát a fenti sor divergens, és nincs összege.

2. A $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1$, és $\lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tehát a sor divergens és összege ∞.

3. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2 - \frac{1}{2^k}$, és $\lim_{k\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^k}\right) = 2$, tehát a sor konvergens, és összege 2.

SZÁMSOROK: PÉLDÁK

1. A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor esetén

$$s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

   Tehát a fenti sor divergens, és nincs összege.

2. A $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1$, és $\lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tehát a sor divergens és összege ∞.

3. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2 - \frac{1}{2^k}$,
   és $\lim_{k\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^k}\right) = 2$, tehát a sor konvergens, és összege 2.

SZÁMSOROK: PÉLDÁK

1. A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor esetén

$$s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

   Tehát a fenti sor divergens, és nincs összege.

2. A $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k + 1$, és $\lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tehát a sor divergens és összege ∞.

3. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{1}{2^k}$, és $\lim_{k\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^k}\right) = 2$, tehát a sor konvergens, és összege 2.

SZÁMSOROK: PÉLDÁK

1. A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor esetén
$$s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$
Tehát a fenti sor divergens, és nincs összege.
2. A $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1$, és $\lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tehát a sor divergens és összege ∞.
3. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor esetén $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{1}{2^k}$, és $\lim_{k\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^k}\right) = 2$, tehát a sor konvergens, és összege 2.

SOROK KONVERGENCIÁJÁNAK TULAJDONSÁGAI

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens sorok és $\alpha \in \mathbb{R}$. A konvergens sorozatok tulajdonságaiból azonnal következik:

ÁLLÍTÁS

Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n)$ is konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

Hasonlóan, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n$ is konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

SOROK KONVERGENCIÁJÁNAK TULAJDONSÁGAI

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens sorok és $\alpha \in \mathbb{R}$. A konvergens sorozatok tulajdonságaiból azonnal következik:

ÁLLÍTÁS

Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n)$ is konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

Hasonlóan, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n$ is konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

SOROK KONVERGENCIÁJÁNAK TULAJDONSÁGAI

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens sorok és $\alpha \in \mathbb{R}$. A konvergens sorozatok tulajdonságaiból azonnal következik:

ÁLLÍTÁS

Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n)$ is konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

Hasonlóan, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n$ is konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

SOROK KONVERGENCIÁJÁNAK TULAJDONSÁGAI

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens sorok és $\alpha \in \mathbb{R}$. A konvergens sorozatok tulajdonságaiból azonnal következik:

ÁLLÍTÁS

Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n)$ is konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

Hasonlóan, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n$ is konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

SOROK KONVERGENCIÁJÁNAK TULAJDONSÁGAI

ÁLLÍTÁS

Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke a, akkor bármely részsorozata konvergens és határértéke a.

ÁLLÍTÁS

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergenciáját és határértékét a sorozat véges sok elemének megváltoztatása, elhagyása vagy hozzáadása nem befolyásolja.

Bizonyítás. Azon múlik, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontosan akkor konvergens és határértéke a, ha a minden környezete a sorozat minden elemét tartalmazza, véges sok kivételével.

SOROK KONVERGENCIÁJÁNAK TULAJDONSÁGAI

ÁLLÍTÁS

Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke a, akkor bármely részsorozata konvergens és határértéke a.

ÁLLÍTÁS

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergenciáját és határértékét a sorozat véges sok elemének megváltoztatása, elhagyása vagy hozzáadása nem befolyásolja.

Bizonyítás. Azon múlik, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontosan akkor konvergens és határértéke a, ha a minden környezete a sorozat minden elemét tartalmazza, véges sok kivételével.

SOROK KONVERGENCIÁJÁNAK TULAJDONSÁGAI

ÁLLÍTÁS

Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke a, akkor bármely részsorozata konvergens és határértéke a.

ÁLLÍTÁS

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergenciáját és határértékét a sorozat véges sok elemének megváltoztatása, elhagyása vagy hozzáadása nem befolyásolja.

Bizonyítás. Azon múlik, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontosan akkor konvergens és határértéke a, ha a minden környezete a sorozat minden elemét tartalmazza, véges sok kivételével.

SOROK KONVERGENCIÁJÁNAK TULAJDONSÁGAI

ÁLLÍTÁS

Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke a, akkor bármely részsorozata konvergens és határértéke a.

ÁLLÍTÁS

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergenciáját és határértékét a sorozat véges sok elemének megváltoztatása, elhagyása vagy hozzáadása nem befolyásolja.

Bizonyítás. Azon múlik, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontosan akkor konvergens és határértéke a, ha a minden környezete a sorozat minden elemét tartalmazza, véges sok kivételével.

SOROK KONVERGENCIÁJÁNAK TULAJDONSÁGAI

ÁLLÍTÁS

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergenciáját a sor véges sok elemének megváltoztatása, elhagyása vagy hozzáadása nem befolyásolja (de az összege változhat).

ÁLLÍTÁS

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens és összege $A \in \mathbb{R}$, akkor a sor bármely zárójelezése is konvergens, és összege A.

Bizonyítás. A sor egy zárójelezése annak felel meg, hogy a részletösszegek sorozatának egy részsorozatát vesszük.

SOROK KONVERGENCIÁJÁNAK TULAJDONSÁGAI

ÁLLÍTÁS

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergenciáját a sor véges sok elemének megváltoztatása, elhagyása vagy hozzáadása nem befolyásolja (de az összege változhat).

ÁLLÍTÁS

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens és összege $A \in \mathbb{R}$, akkor a sor bármely zárójelezése is konvergens, és összege A.

Bizonyítás. A sor egy zárójelezése annak felel meg, hogy a részletösszegek sorozatának egy részsorozatát vesszük.

SOROK KONVERGENCIÁJÁNAK TULAJDONSÁGAI

ÁLLÍTÁS

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergenciáját a sor véges sok elemének megváltoztatása, elhagyása vagy hozzáadása nem befolyásolja (de az összege változhat).

ÁLLÍTÁS

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens és összege $A \in \mathbb{R}$, akkor a sor bármely zárójelezése is konvergens, és összege A.

Bizonyítás. A sor egy zárójelezése annak felel meg, hogy a részletösszegek sorozatának egy részsorozatát vesszük.

Nevezetes számsorok: mértani sorok

Definíció

A $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ sort $q \in \mathbb{R}$ hányadosú mértani sornak nevezzük.

Tétel

A q hányadosú mértani sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor összege $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Nevezetes számsorok: mértani sorok

Definíció

A $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ sort $q \in \mathbb{R}$ hányadosú mértani sornak nevezzük.

Tétel

A q hányadosú mértani sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor összege $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

NEVEZETES SZÁMSOROK: MÉRTANI SOROK

Bizonyítás. A fenti sorra $s_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$, ha $q \neq 1$, és $s_k = k+1$, ha $q = 1$. De

$$\lim_{k\to\infty} q^{k+1} = \begin{cases} \infty, \text{ ha } q > 1, \\ 0, \text{ ha } |q| < 1, \\ \text{nem létezik, ha } q \leq -1. \end{cases}$$

Tehát

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \begin{cases} \infty, \text{ ha } q \geq 1, \\ \frac{1}{1-q}, \text{ ha } |q| < 1, \\ \text{nem létezik, ha } q \leq -1. \end{cases}$$

NEVEZETES SZÁMSOROK: MÉRTANI SOROK

Bizonyítás. A fenti sorra $s_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$, ha $q \neq 1$, és $s_k = k+1$, ha $q = 1$. De

$$\lim_{k\to\infty} q^{k+1} = \begin{cases} \infty, \text{ ha } q > 1, \\ 0, \text{ ha } |q| < 1, \\ \text{nem létezik, ha } q \leq -1. \end{cases}$$

Tehát

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \begin{cases} \infty, \text{ ha } q \geq 1, \\ \frac{1}{1-q}, \text{ ha } |q| < 1, \\ \text{nem létezik, ha } q \leq -1. \end{cases}$$

NEVEZETES SZÁMSOROK: MÉRTANI SOROK

Bizonyítás. A fenti sorra $s_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$, ha $q \neq 1$, és $s_k = k+1$, ha $q = 1$. De

$$\lim_{k\to\infty} q^{k+1} = \begin{cases} \infty, \text{ ha } q > 1, \\ 0, \text{ ha } |q| < 1, \\ \text{nem létezik, ha } q \leq -1. \end{cases}$$

Tehát

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \begin{cases} \infty, \text{ ha } q \geq 1, \\ \frac{1}{1-q}, \text{ ha } |q| < 1, \\ \text{nem létezik, ha } q \leq -1. \end{cases}$$

NEVEZETES SZÁMSOROK: MÉRTANI SOROK

Bizonyítás. A fenti sorra $s_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$, ha $q \neq 1$, és $s_k = k+1$, ha $q = 1$. De

$$\lim_{k\to\infty} q^{k+1} = \begin{cases} \infty, \text{ ha } q > 1, \\ 0, \text{ ha } |q| < 1, \\ \text{nem létezik, ha } q \leq -1. \end{cases}$$

Tehát

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \begin{cases} \infty, \text{ ha } q \geq 1, \\ \frac{1}{1-q}, \text{ ha } |q| < 1, \\ \text{nem létezik, ha } q \leq -1. \end{cases}$$

NEVEZETES SZÁMSOROK: MÉRTANI SOROK

Bizonyítás. A fenti sorra $s_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$, ha $q \neq 1$, és $s_k = k + 1$, ha $q = 1$. De

$$\lim_{k\to\infty} q^{k+1} = \begin{cases} \infty, \text{ ha } q > 1, \\ 0, \text{ ha } |q| < 1, \\ \text{nem létezik, ha } q \leq -1. \end{cases}$$

Tehát

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \begin{cases} \infty, \text{ ha } q \geq 1, \\ \frac{1}{1-q}, \text{ ha } |q| < 1, \\ \text{nem létezik, ha } q \leq -1. \end{cases}$$

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}}$?

Megoldás.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}}\right) - \frac{5}{4} + 1 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \frac{4^n}{4}}{\frac{5^n}{5}} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{5}\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{9} = -\frac{4}{9}.$$

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}}$?

Megoldás.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}}\right) - \frac{5}{4} + 1 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \frac{4^n}{4}}{\frac{5^n}{5}} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{5}\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{9} = -\frac{4}{9}.$$

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}}$?

Megoldás.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}}\right) - \frac{5}{4} + 1 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \frac{4^n}{4}}{\frac{5^n}{5}} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{5}\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{9} = -\frac{4}{9}.$$

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}}$ *?*

Megoldás.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}}\right) - \frac{5}{4} + 1 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \frac{4^n}{4}}{\frac{5^n}{5}} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{5}\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{9} = -\frac{4}{9}.$$

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}}$?

Megoldás.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}} \right) - \frac{5}{4} + 1 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \frac{4^n}{4}}{\frac{5^n}{5}} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{5} \right)^n =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{9} = -\frac{4}{9}.$$

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}}$?

Megoldás.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}} \right) - \frac{5}{4} + 1 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \frac{4^n}{4}}{\frac{5^n}{5}} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{5} \right)^n =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{9} = -\frac{4}{9}.$$

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}}$?

Megoldás.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}} \right) - \frac{5}{4} + 1 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \frac{4^n}{4}}{\frac{5^n}{5}} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{5} \right)^n =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{9} = -\frac{4}{9}.$$

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}}$ *?*

Megoldás.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-2}}{5^{n-1}} \right) - \frac{5}{4} + 1 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \frac{4^n}{4}}{\frac{5^n}{5}} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{5} \right)^n =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{9} = -\frac{4}{9}.$$

Példák

Példa

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ldots$*?*

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ldots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát
$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$.
Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \ldots$*?*

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát $s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$.

Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \dots$*?*

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \dots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát

$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$.

Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ldots$*?*

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \cdots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát $s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$.

Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ldots$*?*

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ldots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát

$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$

Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ldots ?$

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ldots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát

$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$

Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \dots$?

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \dots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát

$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$.

Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ldots$?

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \cdots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát
$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$.
Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \dots$*?*

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \dots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát

$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$.

Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ldots ?$

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \cdots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát
$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$.
Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ldots$*?*

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \cdots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát
$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$.
Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \dots$?

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \dots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát $s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$.

Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

PÉLDÁK

PÉLDA

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ldots$*?*

Megoldás.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \cdots + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tehát
$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$.
Ebből $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, azaz
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás.
Legyen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2} > 0$, ezért $(s_k)_{k \in \mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k \in \mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens. De $s_k = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k} = 2 - \frac{1}{k} < 2$.
Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás.
Legyen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2} > 0$, ezért $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens. De $s_k = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k} = 2 - \frac{1}{k} < 2.$
Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *sor konvergens.*

Bizonyítás.
Legyen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2} > 0$, ezért $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens. De $s_k = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2} < 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)k} = 2-\frac{1}{k} < 2$.
Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás.
Legyen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2} > 0$, ezért $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens. De $s_k = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2} < 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)k} = 2-\frac{1}{k} < 2$.
Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás.
Legyen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2} > 0$, ezért $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens. De $s_k = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2} < 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)k} = 2-\frac{1}{k} < 2$.
Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás.
Legyen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2} > 0$, ezért $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens. De
$s_k = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2} < 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)k} = 2-\frac{1}{k} < 2.$
Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás.
Legyen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2} > 0$, ezért $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens. De
$s_k = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k} = 2 - \frac{1}{k} < 2.$
Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás.

Legyen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2} > 0$, ezért $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens. De $s_k = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k} = 2 - \frac{1}{k} < 2.$

Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás.
Legyen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2} > 0$, ezért $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens. De
$s_k = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2} < 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)k} = 2-\frac{1}{k} < 2.$
Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás.
Legyen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2} > 0$, ezért $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens. De
$s_k = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k} = 2 - \frac{1}{k} < 2.$
Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás.
Legyen $s_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2}>0$, ezért $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ is konvergens. De $s_k=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)k}=2-\frac{1}{k}<2.$
Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás.
Legyen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2} > 0$, ezért $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens. De $s_k = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2} < 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)k} = 2-\frac{1}{k} < 2$.
Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

PÉLDÁK

KÖVETKEZMÉNY

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás.
Legyen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Mivel $\frac{1}{n^2} > 0$, ezért $(s_k)_{k \in \mathbb{N}_+}$ szigorúan növő és alulról korlátos. Ha belátjuk, hogy felülről is korlátos, akkor $(s_k)_{k \in \mathbb{N}_+}$ konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens. De $s_k = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k} = 2 - \frac{1}{k} < 2$.
Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,8449.$

Nem bizonyítjuk.

HARMONIKUS SOR

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort harmonikus sornak nevezzük.

TÉTEL

A harmonikus sor divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$ az az egyértelműen létező szám, melyre $2^k \le n < 2^{k+1}$. Ekkor

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) = 1+\frac{k}{2},$$

tehát (s_k) nem korlátos sorozat, azaz a harmonikus sor divergens, és összege ∞.

HARMONIKUS SOR

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort harmonikus sornak nevezzük.

TÉTEL

A harmonikus sor divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$ az az egyértelműen létező szám, melyre $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Ekkor

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)=1+\frac{k}{2},$$

tehát (s_k) nem korlátos sorozat, azaz a harmonikus sor divergens, és összege ∞.

HARMONIKUS SOR

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort harmonikus sornak nevezzük.

TÉTEL

A harmonikus sor divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$ az az egyértelműen létező szám, melyre $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Ekkor

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)=1+\frac{k}{2},$$

tehát (s_k) nem korlátos sorozat, azaz a harmonikus sor divergens, és összege ∞.

HARMONIKUS SOR

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort harmonikus sornak nevezzük.

TÉTEL

A harmonikus sor divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$ az az egyértelműen létező szám, melyre $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Ekkor

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)=1+\frac{k}{2},$$

tehát (s_k) nem korlátos sorozat, azaz a harmonikus sor divergens, és összege ∞.

HARMONIKUS SOR

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort harmonikus sornak nevezzük.

TÉTEL

A harmonikus sor divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$ az az egyértelműen létező szám, melyre $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Ekkor

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) = 1 + \frac{k}{2},$$

tehát (s_k) nem korlátos sorozat, azaz a harmonikus sor divergens, és összege ∞.

HARMONIKUS SOR

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort harmonikus sornak nevezzük.

TÉTEL

A harmonikus sor divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$ az az egyértelműen létező szám, melyre $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Ekkor

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) = 1+\frac{k}{2},$$

tehát (s_k) nem korlátos sorozat, azaz a harmonikus sor divergens, és összege ∞.

HARMONIKUS SOR

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *sort harmonikus sornak nevezzük.*

TÉTEL

A harmonikus sor divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$ az az egyértelműen létező szám, melyre $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Ekkor

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)=1+\frac{k}{2},$$

tehát (s_k) nem korlátos sorozat, azaz a harmonikus sor divergens, és összege ∞.

HARMONIKUS SOR

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *sort harmonikus sornak nevezzük.*

TÉTEL

A harmonikus sor divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$ az az egyértelműen létező szám, melyre $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Ekkor

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) = 1 + \frac{k}{2},$$

tehát (s_k) nem korlátos sorozat, azaz a harmonikus sor divergens, és összege ∞.

HARMONIKUS SOR

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *sort harmonikus sornak nevezzük.*

TÉTEL

A harmonikus sor divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$ az az egyértelműen létező szám, melyre $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Ekkor

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) = 1+\frac{k}{2},$$

tehát (s_k) nem korlátos sorozat, azaz a harmonikus sor divergens, és összege ∞.

FELTÉTEL SOROK KONVERGENCIÁJÁRA

EMLÉKEZTETŐ (CAUCHY-FÉLE KONVERGENCIA KRITÉRIUM)

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy ha $n, m > n_\varepsilon$, akkor $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

TÉTEL (CAUCHY-FÉLE KONVERGENCIA KRITÉRIUM SOROKRA)

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy ha $m > n > n_\varepsilon$, akkor $|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m| < \varepsilon$.

FELTÉTEL SOROK KONVERGENCIÁJÁRA

EMLÉKEZTETŐ (CAUCHY-FÉLE KONVERGENCIA KRITÉRIUM)

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy ha $n, m > n_\varepsilon$, akkor $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

TÉTEL (CAUCHY-FÉLE KONVERGENCIA KRITÉRIUM SOROKRA)

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy ha $m > n > n_\varepsilon$, akkor $|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m| < \varepsilon$.

SZÜKSÉGES FELTÉTEL SOROK KONVERGENCIÁJÁRA

ÁLLÍTÁS

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Bizonyítás. Az előző tétel következménye.

MEGJEGYZÉS

Az ellenkező irányú állítás nem igaz: léteznek olyan sorok, amelyek nem konvergensek, bár $\lim_n x_n = 0$. Példa ilyen sorra: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

SZÜKSÉGES FELTÉTEL SOROK KONVERGENCIÁJÁRA

ÁLLÍTÁS

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Bizonyítás. Az előző tétel következménye.

MEGJEGYZÉS

Az ellenkező irányú állítás nem igaz: léteznek olyan sorok, amelyek nem konvergensek, bár $\lim_n x_n = 0$. *Példa ilyen sorra:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

SZÜKSÉGES FELTÉTEL SOROK KONVERGENCIÁJÁRA

ÁLLÍTÁS

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Bizonyítás. Az előző tétel következménye.

MEGJEGYZÉS

Az ellenkező irányú állítás nem igaz: léteznek olyan sorok, amelyek nem konvergensek, bár $\lim_n x_n = 0$. Példa ilyen sorra: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

SZÜKSÉGES FELTÉTEL SOROK KONVERGENCIÁJÁRA

ÁLLÍTÁS

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Bizonyítás. Az előző tétel következménye.

MEGJEGYZÉS

Az ellenkező irányú állítás nem igaz: léteznek olyan sorok, amelyek nem konvergensek, bár $\lim_n x_n = 0$. Példa ilyen sorra: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

SZÜKSÉGES FELTÉTEL SOROK KONVERGENCIÁJÁRA

ÁLLÍTÁS

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Bizonyítás. Az előző tétel következménye.

MEGJEGYZÉS

Az ellenkező irányú állítás nem igaz: léteznek olyan sorok, amelyek nem konvergensek, bár $\lim_n x_n = 0$. Példa ilyen sorra: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

LEIBNIZ TÍPUSÚ SOROK

DEFINÍCIÓ

*A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor **Leibniz típusú**, ha*

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *váltakozó előjelű,*
2. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$,
3. $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton csökkenő.*

TÉTEL

Minden Leibniz típusú sor konvergens.

PÉLDA

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ sor konvergens.

LEIBNIZ TÍPUSÚ SOROK

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *sor* ***Leibniz típusú****, ha*

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *váltakozó előjelű,*
2. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$,
3. $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton csökkenő.*

TÉTEL

Minden Leibniz típusú sor konvergens.

PÉLDA

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ *sor konvergens.*

LEIBNIZ TÍPUSÚ SOROK

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor Leibniz típusú, ha

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *váltakozó előjelű,*
2. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0,$
3. $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton csökkenő.*

TÉTEL

Minden Leibniz típusú sor konvergens.

PÉLDA

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ *sor konvergens.*

LEIBNIZ TÍPUSÚ SOROK

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *sor* ***Leibniz típusú****, ha*

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *váltakozó előjelű,*
2. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$,
3. $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton csökkenő.*

TÉTEL

Minden Leibniz típusú sor konvergens.

PÉLDA

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ *sor konvergens.*

LEIBNIZ TÍPUSÚ SOROK

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *sor Leibniz típusú, ha*

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *váltakozó előjelű,*
2. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$,
3. $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton csökkenő.*

TÉTEL

Minden Leibniz típusú sor konvergens.

PÉLDA

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ *sor konvergens.*

LEIBNIZ TÍPUSÚ SOROK

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *sor* ***Leibniz típusú****, ha*

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *váltakozó előjelű,*
2. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$,
3. $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton csökkenő.*

TÉTEL

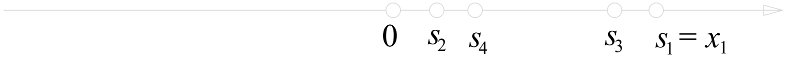
Minden Leibniz típusú sor konvergens.

PÉLDA

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ *sor konvergens.*

LEIBNIZ TÍPUSÚ SOROK

Bizonyítás.



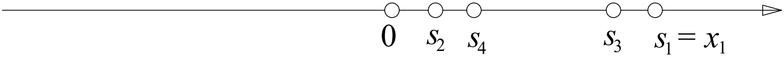
Az alábbi egyenlőtlenség következik abból, hogy $|x_n|$ monoton csökkenő, és váltakozó előjelű:
Tetszőleges $m > n$ esetén

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots x_m| \leq |x_n|.$$

De ebből $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ miatt teljesülnek a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritérium feltételei, tehát $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens.

LEIBNIZ TÍPUSÚ SOROK

Bizonyítás.



Az alábbi egyenlőtlenség következik abból, hogy $|x_n|$ monoton csökkenő, és váltakozó előjelű:

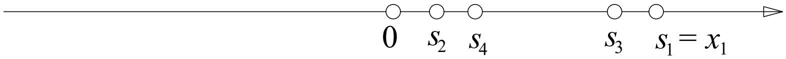
Tetszőleges $m > n$ esetén

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_m| \leq |x_n|.$$

De ebből $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ miatt teljesülnek a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritérium feltételei, tehát $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens.

LEIBNIZ TÍPUSÚ SOROK

Bizonyítás.



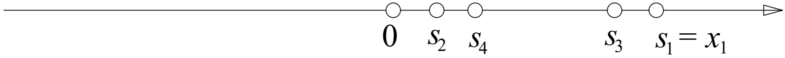
Az alábbi egyenlőtlenség következik abból, hogy $|x_n|$ monoton csökkenő, és váltakozó előjelű:
Tetszőleges $m > n$ esetén

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots x_m| \leq |x_n|.$$

De ebből $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ miatt teljesülnek a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritérium feltételei, tehát $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens.

LEIBNIZ TÍPUSÚ SOROK

Bizonyítás.



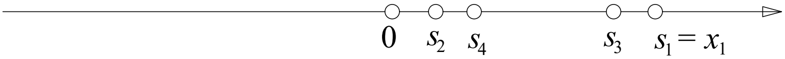
Az alábbi egyenlőtlenség következik abból, hogy $|x_n|$ monoton csökkenő, és váltakozó előjelű:
Tetszőleges $m > n$ esetén

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_m| \leq |x_n|.$$

De ebből $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ miatt teljesülnek a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritérium feltételei, tehát $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens.

LEIBNIZ TÍPUSÚ SOROK

Bizonyítás.



Az alábbi egyenlőtlenség következik abból, hogy $|x_n|$ monoton csökkenő, és váltakozó előjelű:
Tetszőleges $m > n$ esetén

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots x_m| \leq |x_n|.$$

De ebből $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ miatt teljesülnek a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritérium feltételei, tehát $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens.