8. ELŐADÁS: SZÁMSOROK 2.

Pozitív tagú sorok

Definíció

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor pozitív tagú, ha $x_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Megjegyzés

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor pozitív tagú, akkor az $s_k = \sum_{n=0}^{k} x_k$ sorozat monoton növő és alulról korlátos. Ha a sorozat felülről is korlátos, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens. Ha $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ felülről nem korlátos, akkor a monotonitás miatt $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k = \infty$.

POZITÍV TAGÚ SOROK

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor pozitív tagú, ha $x_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

MEGJEGYZÉS

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor pozitív tagú, akkor az $s_k = \sum_{n=0}^{k} x_k$ sorozat monoton növő és alulról korlátos. Ha a sorozat felülről is korlátos, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens. Ha $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ felülről nem korlátos, akkor a monotonitás miatt $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k = \infty$.

POZITÍV TAGÚ SOROK

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor pozitív tagú, ha $x_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

MEGJEGYZÉS

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor pozitív tagú, akkor az $s_k = \sum_{n=0}^{k} x_k$ sorozat monoton növő és alulról korlátos. Ha a sorozat felülről is korlátos, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens. Ha $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ felülről nem korlátos, akkor a monotonitás miatt $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k = \infty$.

POZITÍV TAGÚ SOROK

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor pozitív tagú, ha $x_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

MEGJEGYZÉS

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor pozitív tagú, akkor az $s_k = \sum_{n=0}^{k} x_k$ sorozat monoton növő és alulról korlátos. Ha a sorozat felülről is korlátos, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens. Ha $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ felülről nem korlátos, akkor a monotonitás miatt $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k = \infty$.

POZITÍV TAGÚ SOROK

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor pozitív tagú*, ha $x_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.*

MEGJEGYZÉS

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor pozitív tagú, akkor az $s_k = \sum_{n=0}^{k} x_k$ sorozat monoton növő és alulról korlátos. Ha a sorozat felülről is korlátos, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens. Ha $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ felülről nem korlátos, akkor a monotonitás miatt $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k = \infty$.

A majoráns- és minoráns-elv

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

Definíció

Azt mondjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ majorálja a $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sort, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \geq y_n.$$

Tétel

Tegyük fel, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ majorálja $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$-et.

1. *Majoráns-elv: Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ is az.*
2. *Minoráns-elv: Megfordítva, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ divergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ is az.*

A majoráns- és minoráns-elv

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

Definíció

Azt mondjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ majorálja a $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sort, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \geq y_n.$$

Tétel

Tegyük fel, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ majorálja $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$-et.

1. *Majoráns-elv: Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ is az.*
2. *Minoráns-elv: Megfordítva, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ divergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ is az.*

A MAJORÁNS- ÉS MINORÁNS-ELV

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ majorálja a $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sort, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \geq y_n.$$

TÉTEL

Tegyük fel, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ majorálja $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$-et.

1. *Majoráns-elv: Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ is az.*
2. *Minoráns-elv: Megfordítva, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ divergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ is az.*

A MAJORÁNS- ÉS MINORÁNS-ELV

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ majorálja a $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sort, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \geq y_n.$$

TÉTEL

Tegyük fel, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ majorálja $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$-et.

1. *Majoráns-elv: Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ is az.*
2. *Minoráns-elv: Megfordítva, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ divergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ is az.*

A MAJORÁNS- ÉS MINORÁNS-ELV

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *majorálja a* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *sort, ha minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$x_n \geq y_n.$$

TÉTEL

Tegyük fel, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *majorálja* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$*-et.*

1. *Majoráns-elv: Ha* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *konvergens, akkor* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *is az.*
2. *Minoráns-elv: Megfordítva, ha* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *divergens, akkor* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *is az.*

A MAJORÁNS- ÉS MINORÁNS-ELV BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n, \quad t_k = \sum_{n=0}^{k} y_n.$$

Ekkor (s_k) és (t_k) monoton növekednek, és feltétel szerint

$$0 \leq t_k \leq s_k.$$

Amennyiben (s_k) konvergál s-hez, akkor tehát s felső korlátja a (t_k) sorozatnak, így utóbbi is konvergens.

MEGJEGYZÉS

A tétel akkor is igaz, ha az $x_n \geq y_n$ egyenlőtlenség csak véges sok kivételtől eltekintve teljesül.

A MAJORÁNS- ÉS MINORÁNS-ELV BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n, \quad t_k = \sum_{n=0}^{k} y_n.$$

Ekkor (s_k) és (t_k) monoton növekednek, és feltétel szerint

$$0 \leq t_k \leq s_k.$$

Amennyiben (s_k) konvergál s-hez, akkor tehát s felső korlátja a (t_k) sorozatnak, így utóbbi is konvergens.

MEGJEGYZÉS

A tétel akkor is igaz, ha az $x_n \geq y_n$ egyenlőtlenség csak véges sok kivételtől eltekintve teljesül.

A MAJORÁNS- ÉS MINORÁNS-ELV BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n, \quad t_k = \sum_{n=0}^{k} y_n.$$

Ekkor (s_k) és (t_k) monoton növekednek, és feltétel szerint

$$0 \leq t_k \leq s_k.$$

Amennyiben (s_k) konvergál s-hez, akkor tehát s felső korlátja a (t_k) sorozatnak, így utóbbi is konvergens.

MEGJEGYZÉS

A tétel akkor is igaz, ha az $x_n \geq y_n$ egyenlőtlenség csak véges sok kivételtől eltekintve teljesül.

A MAJORÁNS- ÉS MINORÁNS-ELV BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n, \quad t_k = \sum_{n=0}^{k} y_n.$$

Ekkor (s_k) és (t_k) monoton növekednek, és feltétel szerint

$$0 \leq t_k \leq s_k.$$

Amennyiben (s_k) konvergál s-hez, akkor tehát s felső korlátja a (t_k) sorozatnak, így utóbbi is konvergens.

MEGJEGYZÉS

A tétel akkor is igaz, ha az $x_n \geq y_n$ egyenlőtlenség csak véges sok kivételtől eltekintve teljesül.

A MAJORÁNS- ÉS MINORÁNS-ELV BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n, \quad t_k = \sum_{n=0}^{k} y_n.$$

Ekkor (s_k) és (t_k) monoton növekednek, és feltétel szerint

$$0 \leq t_k \leq s_k.$$

Amennyiben (s_k) konvergál s-hez, akkor tehát s felső korlátja a (t_k) sorozatnak, így utóbbi is konvergens.

MEGJEGYZÉS

A tétel akkor is igaz, ha az $x_n \geq y_n$ egyenlőtlenség csak véges sok kivételtől eltekintve teljesül.

A MAJORÁNS- ÉS MINORÁNS-ELV BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n, \quad t_k = \sum_{n=0}^{k} y_n.$$

Ekkor (s_k) és (t_k) monoton növekednek, és feltétel szerint

$$0 \leq t_k \leq s_k.$$

Amennyiben (s_k) konvergál s-hez, akkor tehát s felső korlátja a (t_k) sorozatnak, így utóbbi is konvergens.

MEGJEGYZÉS

A tétel akkor is igaz, ha az $x_n \geq y_n$ egyenlőtlenség csak véges sok kivételtől eltekintve teljesül.

A MAJORÁNS- ÉS MINORÁNS-ELV BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n, \quad t_k = \sum_{n=0}^{k} y_n.$$

Ekkor (s_k) és (t_k) monoton növekednek, és feltétel szerint

$$0 \leq t_k \leq s_k.$$

Amennyiben (s_k) konvergál s-hez, akkor tehát s felső korlátja a (t_k) sorozatnak, így utóbbi is konvergens.

MEGJEGYZÉS

A tétel akkor is igaz, ha az $x_n \geq y_n$ egyenlőtlenség csak véges sok kivételtől eltekintve teljesül.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ *sor konvergens-e!*

Megoldás. A sorozat elemei pozitívak, ha $n \geq 2$. Másrészt

$$\frac{2n-1}{n^3-2n+1} \leq \frac{2n}{n^3-\frac{n^3}{2}} = \frac{4}{n^2},$$

ha $2n \leq \frac{n^3}{2}$, azaz $n \geq 2$. De $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, azaz a majoráns-elv szerint $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ konvergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ sor konvergens-e!

Megoldás. A sorozat elemei pozitívak, ha $n \geq 2$. Másrészt

$$\frac{2n-1}{n^3-2n+1} \leq \frac{2n}{n^3-\frac{n^3}{2}} = \frac{4}{n^2},$$

ha $2n \leq \frac{n^3}{2}$, azaz $n \geq 2$. De $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, azaz a majoráns-elv szerint $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ konvergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ *sor konvergens-e!*

Megoldás. A sorozat elemei pozitívak, ha $n \geq 2$. Másrészt

$$\frac{2n-1}{n^3-2n+1} \leq \frac{2n}{n^3-\frac{n^3}{2}} = \frac{4}{n^2},$$

ha $2n \leq \frac{n^3}{2}$, azaz $n \geq 2$. De $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, azaz a majoráns-elv szerint $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ konvergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ *sor konvergens-e!*

Megoldás. A sorozat elemei pozitívak, ha $n \geq 2$. Másrészt

$$\frac{2n-1}{n^3-2n+1} \leq \frac{2n}{n^3-\frac{n^3}{2}} = \frac{4}{n^2},$$

ha $2n \leq \frac{n^3}{2}$, azaz $n \geq 2$. De $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, azaz a majoráns-elv szerint $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ konvergens.

Példák

Példa

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ sor konvergens-e!

Megoldás. A sorozat elemei pozitívak, ha $n \geq 2$. Másrészt

$$\frac{2n-1}{n^3-2n+1} \leq \frac{2n}{n^3-\frac{n^3}{2}} = \frac{4}{n^2},$$

ha $2n \leq \frac{n^3}{2}$, azaz $n \geq 2$. De $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, azaz a majoráns-elv szerint $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ konvergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ sor konvergens-e!

Megoldás. A sorozat elemei pozitívak, ha $n \geq 2$. Másrészt

$$\frac{2n-1}{n^3-2n+1} \leq \frac{2n}{n^3-\frac{n^3}{2}} = \frac{4}{n^2},$$

ha $2n \leq \frac{n^3}{2}$, azaz $n \geq 2$. De $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, azaz a majoráns-elv szerint $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ konvergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ *sor konvergens-e!*

Megoldás. A sorozat elemei pozitívak, ha $n \geq 2$. Másrészt

$$\frac{2n-1}{n^3-2n+1} \leq \frac{2n}{n^3 - \frac{n^3}{2}} = \frac{4}{n^2},$$

ha $2n \leq \frac{n^3}{2}$, azaz $n \geq 2$. De $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, azaz a majoráns-elv szerint $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ konvergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ *sor konvergens-e!*

Megoldás. A sorozat elemei pozitívak, ha $n \geq 2$. Másrészt

$$\frac{2n-1}{n^2-2n+1} \geq \frac{2n-n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

De $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, azaz a minoráns-elv szerint $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ sor konvergens-e!

Megoldás. A sorozat elemei pozitívak, ha $n \geq 2$. Másrészt

$$\frac{2n-1}{n^2-2n+1} \geq \frac{2n-n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

De $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, azaz a minoráns-elv szerint $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ sor konvergens-e!

Megoldás. A sorozat elemei pozitívak, ha $n \geq 2$. Másrészt

$$\frac{2n-1}{n^2-2n+1} \geq \frac{2n-n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

De $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, azaz a minoráns-elv szerint $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ *sor konvergens-e!*

Megoldás. A sorozat elemei pozitívak, ha $n \geq 2$. Másrészt

$$\frac{2n-1}{n^2-2n+1} \geq \frac{2n-n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

De $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, azaz a minoráns-elv szerint $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ sor konvergens-e!

Megoldás. A sorozat elemei pozitívak, ha $n \geq 2$. Másrészt

$$\frac{2n-1}{n^2-2n+1} \geq \frac{2n-n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

De $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, azaz a minoráns-elv szerint $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ divergens.

A p-SOROK

DEFINÍCIÓ

A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

alakú sorokat, ahol $p \in \mathbb{R}$, p-sornak hívjuk.

TÉTEL

Egy p-sor akkor és csak akkor konvergens, ha $p > 1$.

A p-SOROK

DEFINÍCIÓ

A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

alakú sorokat, ahol $p \in \mathbb{R}$, p-sornak hívjuk.

TÉTEL

Egy p-sor akkor és csak akkor konvergens, ha $p > 1$.

A p-SOROK

Bizonyítás.
Ha $p = 1$, akkor a p-sor a harmonikus sor, amelyről már láttuk hogy divergens. Ha $p < 1$, akkor

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n},$$

ezért a minoráns-elv miatt a p-sor divergens.
Ha $p \geq 2$, akkor $0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$, így a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens volta és a majoráns-elv miatt a p-sor konvergens.
Kimaradó eset: $1 < p < 2$. Ezt nem bizonyítjuk.

A p-SOROK

Bizonyítás.
Ha $p = 1$, akkor a p-sor a harmonikus sor, amelyről már láttuk hogy divergens. Ha $p < 1$, akkor

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n},$$

ezért a minoráns-elv miatt a p-sor divergens.
Ha $p \geq 2$, akkor $0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$, így a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens volta és a majoráns-elv miatt a p-sor konvergens.
Kimaradó eset: $1 < p < 2$. Ezt nem bizonyítjuk.

A p-SOROK

Bizonyítás.
Ha $p = 1$, akkor a p-sor a harmonikus sor, amelyről már láttuk hogy divergens. Ha $p < 1$, akkor

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n},$$

ezért a minoráns-elv miatt a p-sor divergens.
Ha $p \geq 2$, akkor $0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$, így a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens volta és a majoráns-elv miatt a p-sor konvergens.
Kimaradó eset: $1 < p < 2$. Ezt nem bizonyítjuk.

A p-SOROK

Bizonyítás.
Ha $p = 1$, akkor a p-sor a harmonikus sor, amelyről már láttuk hogy divergens. Ha $p < 1$, akkor

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n},$$

ezért a minoráns-elv miatt a p-sor divergens.
Ha $p \geq 2$, akkor $0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$, így a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens volta és a majoráns-elv miatt a p-sor konvergens.
Kimaradó eset: $1 < p < 2$. Ezt nem bizonyítjuk.

A p-SOROK

Bizonyítás.
Ha $p = 1$, akkor a p-sor a harmonikus sor, amelyről már láttuk hogy divergens. Ha $p < 1$, akkor

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n},$$

ezért a minoráns-elv miatt a p-sor divergens.
Ha $p \geq 2$, akkor $0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$, így a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens volta és a majoráns-elv miatt a p-sor konvergens.
Kimaradó eset: $1 < p < 2$. Ezt nem bizonyítjuk.

A p-SOROK

Bizonyítás.
Ha $p = 1$, akkor a p-sor a harmonikus sor, amelyről már láttuk hogy divergens. Ha $p < 1$, akkor

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n},$$

ezért a minoráns-elv miatt a p-sor divergens.
Ha $p \geq 2$, akkor $0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$, így a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens volta és a majoráns-elv miatt a p-sor konvergens.
Kimaradó eset: $1 < p < 2$. Ezt nem bizonyítjuk.

A p-SOROK

Bizonyítás.
Ha $p = 1$, akkor a p-sor a harmonikus sor, amelyről már láttuk hogy divergens. Ha $p < 1$, akkor

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n},$$

ezért a minoráns-elv miatt a p-sor divergens.
Ha $p \geq 2$, akkor $0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$, így a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens volta és a majoráns-elv miatt a p-sor konvergens.
Kimaradó eset: $1 < p < 2$. Ezt nem bizonyítjuk.

A HATÁRÉRTÉK-KRITÉRIUM

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

TÉTEL

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \neq 0$$

létezik és 0-tól különbözik. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens.

Bizonyítás. Legyen a hányadosok határértéke $c > 0$, és válasszunk $\varepsilon = \frac{c}{2}$-höz $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot: minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$0 < c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} < \frac{x_n}{y_n} < c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}.$$

A HATÁRÉRTÉK-KRITÉRIUM

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

TÉTEL

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \neq 0$$

létezik és 0-tól különbözik. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens.

Bizonyítás. Legyen a hányadosok határértéke $c > 0$, és válasszunk $\varepsilon = \frac{c}{2}$-höz $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot: minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$0 < c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} < \frac{x_n}{y_n} < c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}.$$

A HATÁRÉRTÉK-KRITÉRIUM

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

TÉTEL

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \neq 0$$

létezik és 0-tól különbözik. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens.

Bizonyítás. Legyen a hányadosok határértéke $c > 0$, és válasszunk $\varepsilon = \frac{c}{2}$-höz $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot: minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$0 < c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} < \frac{x_n}{y_n} < c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}.$$

A HATÁRÉRTÉK-KRITÉRIUM

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

TÉTEL

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \neq 0$$

létezik és 0-tól különbözik. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens.

Bizonyítás. Legyen a hányadosok határértéke $c > 0$, és válasszunk $\varepsilon = \frac{c}{2}$-höz $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot: minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$0 < c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} < \frac{x_n}{y_n} < c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}.$$

A HATÁRÉRTÉK-KRITÉRIUM

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

TÉTEL

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \neq 0$$

létezik és 0-tól különbözik. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens.

Bizonyítás. Legyen a hányadosok határértéke $c > 0$, és válasszunk $\varepsilon = \frac{c}{2}$-höz $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot: minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$0 < c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} < \frac{x_n}{y_n} < c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}.$$

A HATÁRÉRTÉK-KRITÉRIUM

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

TÉTEL

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \neq 0$$

létezik és 0-tól különbözik. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens.

Bizonyítás. Legyen a hányadosok határértéke $c > 0$, és válasszunk $\varepsilon = \frac{c}{2}$-höz $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot: minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$0 < c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} < \frac{x_n}{y_n} < c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}.$$

A HATÁRÉRTÉK-KRITÉRIUM

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

TÉTEL

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \neq 0$$

létezik és 0-tól különbözik. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens.

Bizonyítás. Legyen a hányadosok határértéke $c > 0$, és válasszunk $\varepsilon = \frac{c}{2}$-höz $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot: minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$0 < c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} < \frac{x_n}{y_n} < c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}.$$

A HATÁRÉRTÉK-KRITÉRIUM

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

TÉTEL

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \neq 0$$

létezik és 0-tól különbözik. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens.

Bizonyítás. Legyen a hányadosok határértéke $c > 0$, és válasszunk $\varepsilon = \frac{c}{2}$-höz $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot: minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$0 < c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} < \frac{x_n}{y_n} < c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}.$$

A HATÁRÉRTÉK-KRITÉRIUM

Bizonyítás. Ezt átrendezve:

$$\frac{c}{2}y_n < x_n < \frac{3c}{2}y_n.$$

A majoráns- és a minoráns-elvből nyerjük az állítást.

A HATÁRÉRTÉK-KRITÉRIUM

Bizonyítás. Ezt átrendezve:

$$\frac{c}{2}y_n < x_n < \frac{3c}{2}y_n.$$

A majoráns- és a minoráns-elvből nyerjük az állítást.

A határérték-kritérium

Bizonyítás. Ezt átrendezve:

$$\frac{c}{2}y_n < x_n < \frac{3c}{2}y_n.$$

A majoráns- és a minoráns-elvből nyerjük az állítást.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ és a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ sorok konvergensek-e!

Mivel a sorok pozitív tagúak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^3-2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3-2n+1} = 2 \neq 0, \text{ és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^2-2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2-2n+1} = 2 \neq 0,$$

valamint $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért az első sor konvergens és a második sor divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ *és a* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ *sorok konvergensek-e!*

Mivel a sorok pozitív tagúak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^3-2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3-2n+1} = 2 \neq 0, \text{ és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^2-2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2-2n+1} = 2 \neq 0,$$

valamint $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért az első sor konvergens és a második sor divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ és a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ sorok konvergensek-e!

Mivel a sorok pozitív tagúak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^3-2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3-2n+1} = 2 \neq 0, \text{ és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^2-2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2-2n+1} = 2 \neq 0,$$

valamint $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért az első sor konvergens és a második sor divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ és a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ sorok konvergensek-e!

Mivel a sorok pozitív tagúak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^3-2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3-2n+1} = 2 \neq 0, \text{ és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^2-2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2-2n+1} = 2 \neq 0,$$

valamint $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért az első sor konvergens és a második sor divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ *és a* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ *sorok konvergensek-e!*

Mivel a sorok pozitív tagúak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^3-2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3-2n+1} = 2 \neq 0, \text{ és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^2-2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2-2n+1} = 2 \neq 0,$$

valamint $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért az első sor konvergens és a második sor divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ *és a* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ *sorok konvergensek-e!*

Mivel a sorok pozitív tagúak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^3-2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3-2n+1} = 2 \neq 0, \text{ és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^2-2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2-2n+1} = 2 \neq 0,$$

valamint $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért az első sor konvergens és a második sor divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ és a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ sorok konvergensek-e!

Mivel a sorok pozitív tagúak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^3-2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3-2n+1} = 2 \neq 0, \text{ és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^2-2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2-2n+1} = 2 \neq 0,$$

valamint $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért az első sor konvergens és a második sor divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ és a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ sorok konvergensek-e!

Mivel a sorok pozitív tagúak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^3-2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3-2n+1} = 2 \neq 0, \text{ és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^2-2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2-2n+1} = 2 \neq 0,$$

valamint $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért az első sor konvergens és a második sor divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ és a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ sorok konvergensek-e!

Mivel a sorok pozitív tagúak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^3-2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3-2n+1} = 2 \neq 0, \text{ és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^2-2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2-2n+1} = 2 \neq 0,$$

valamint $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért az első sor konvergens és a második sor divergens.

PÉLDÁK

PÉLDA

Állapítsa meg, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n+1}$ és a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-2n+1}$ sorok konvergensek-e!

Mivel a sorok pozitív tagúak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^3-2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3-2n+1} = 2 \neq 0, \text{ és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^2-2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2-2n+1} = 2 \neq 0,$$

valamint $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért az első sor konvergens és a második sor divergens.

A gyökkritérium

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor.

Tétel

Ha létezik olyan $r < 1$ érték, amelyre véges sok kivételtől eltekintve teljesül

$$\sqrt[n]{x_n} \leq r,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens.

Megjegyzés

Nem elég a konvergenciához, ha $r = 1$-re teljesül a feltétel. Például, a harmonikus sorra

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1,$$

a sor mégis divergens.

A GYÖKKRITÉRIUM

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor.

TÉTEL

Ha létezik olyan $r < 1$ érték, amelyre véges sok kivételtől eltekintve teljesül

$$\sqrt[n]{x_n} \leq r,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens.

MEGJEGYZÉS

Nem elég a konvergenciához, ha $r = 1$-re teljesül a feltétel. Például, a harmonikus sorra

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1,$$

a sor mégis divergens.

A GYÖKKRITÉRIUM

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor.

TÉTEL

Ha létezik olyan $r < 1$ érték, amelyre véges sok kivételtől eltekintve teljesül

$$\sqrt[n]{x_n} \leq r,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens.

MEGJEGYZÉS

Nem elég a konvergenciához, ha $r = 1$-re teljesül a feltétel.
Például, a harmonikus sorra

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1,$$

a sor mégis divergens.

A GYÖKKRITÉRIUM

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor.

TÉTEL

Ha létezik olyan $r < 1$ érték, amelyre véges sok kivételtől eltekintve teljesül

$$\sqrt[n]{x_n} \leq r,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens.

MEGJEGYZÉS

Nem elég a konvergenciához, ha $r = 1$-re teljesül a feltétel. Például, a harmonikus sorra

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1,$$

a sor mégis divergens.

A GYÖKKRITÉRIUM

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor.

TÉTEL

Ha létezik olyan $r < 1$ érték, amelyre véges sok kivételtől eltekintve teljesül

$$\sqrt[n]{x_n} \leq r,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens.

MEGJEGYZÉS

Nem elég a konvergenciához, ha $r = 1$-re teljesül a feltétel. Például, a harmonikus sorra

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1,$$

a sor mégis divergens.

A gyökkritérium bizonyítása

Bizonyítás.
A feltétel alapján véges sok n értéktől eltekintve

$$x_n \leq r^n.$$

Alkalmazzuk a majoráns-elvet a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és a

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

mértani sorra, figyelembe véve hogy utóbbi konvergens, mert $r < 1$.

A GYÖKKRITÉRIUM BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás.
A feltétel alapján véges sok n értéktől eltekintve

$$x_n \leq r^n.$$

Alkalmazzuk a majoráns-elvet a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és a

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

mértani sorra, figyelembe véve hogy utóbbi konvergens, mert $r < 1$.

A GYÖKKRITÉRIUM BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás.
A feltétel alapján véges sok n értéktől eltekintve

$$x_n \leq r^n.$$

Alkalmazzuk a majoráns-elvet a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és a

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

mértani sorra, figyelembe véve hogy utóbbi konvergens, mert $r < 1$.

A GYÖKKRITÉRIUM BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás.
A feltétel alapján véges sok n értéktől eltekintve

$$x_n \leq r^n.$$

Alkalmazzuk a majoráns-elvet a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és a

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

mértani sorra, figyelembe véve hogy utóbbi konvergens, mert $r < 1$.

A gyökkritérium más alakja

Tétel

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy pozitív tagú sor, és legyen $A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Ha $A < 1$, akkor a sor konvergens, és ha $A > 1$, akkor a sor divergens.

Példa

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ sor egy pozitív tagú sor, és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a sor a gyökkritérium alapján konvergens.

A GYÖKKRITÉRIUM MÁS ALAKJA

TÉTEL

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy pozitív tagú sor, és legyen $A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Ha $A < 1$, akkor a sor konvergens, és ha $A > 1$, akkor a sor divergens.

PÉLDA

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ sor egy pozitív tagú sor, és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a sor a gyökkritérium alapján konvergens.

A GYÖKKRITÉRIUM MÁS ALAKJA

TÉTEL

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy pozitív tagú sor, és legyen $A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Ha $A < 1$, akkor a sor konvergens, és ha $A > 1$, akkor a sor divergens.

PÉLDA

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ sor egy pozitív tagú sor, és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a sor a gyökkritérium alapján konvergens.

A GYÖKKRITÉRIUM MÁS ALAKJA

TÉTEL

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy pozitív tagú sor, és legyen $A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Ha $A < 1$, akkor a sor konvergens, és ha $A > 1$, akkor a sor divergens.

PÉLDA

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ sor egy pozitív tagú sor, és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a sor a gyökkritérium alapján konvergens.

A GYÖKKRITÉRIUM MÁS ALAKJA

TÉTEL

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *egy pozitív tagú sor, és legyen* $A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. *Ha* $A < 1$, *akkor a sor konvergens, és ha* $A > 1$, *akkor a sor divergens.*

PÉLDA

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ *sor egy pozitív tagú sor, és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a sor a gyökkritérium alapján konvergens.

A GYÖKKRITÉRIUM MÁS ALAKJA

TÉTEL

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *egy pozitív tagú sor, és legyen* $A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. *Ha* $A < 1$, *akkor a sor konvergens, és ha* $A > 1$, *akkor a sor divergens.*

PÉLDA

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ *sor egy pozitív tagú sor, és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a sor a gyökkritérium alapján konvergens.

A GYÖKKRITÉRIUM MÁS ALAKJA

TÉTEL

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *egy pozitív tagú sor, és legyen* $A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. *Ha* $A < 1$, *akkor a sor konvergens, és ha* $A > 1$, *akkor a sor divergens.*

PÉLDA

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ *sor egy pozitív tagú sor, és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a sor a gyökkritérium alapján konvergens.

A gyökkritérium más alakja

Tétel

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *egy pozitív tagú sor, és legyen* $A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. *Ha* $A < 1$, *akkor a sor konvergens, és ha* $A > 1$, *akkor a sor divergens.*

Példa

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ *sor egy pozitív tagú sor, és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a sor a gyökkritérium alapján konvergens.

A gyökkritérium más alakja

Tétel

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy pozitív tagú sor, és legyen $A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Ha $A < 1$, akkor a sor konvergens, és ha $A > 1$, akkor a sor divergens.

Példa

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ sor egy pozitív tagú sor, és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a sor a gyökkritérium alapján konvergens.

A hányadoskritérium

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor.

Tétel

Ha létezik olyan $r < 1$ érték, amelyre véges sok kivételtől eltekintve teljesül

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq r,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens.

Megjegyzés

Itt sem elég feltenni, hogy

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1;$$

ellenpélda ismét a harmonikus sor.

A hányadoskritérium

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor.

Tétel

Ha létezik olyan $r < 1$ érték, amelyre véges sok kivételtől eltekintve teljesül

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq r,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens.

Megjegyzés

Itt sem elég feltenni, hogy

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1;$$

ellenpélda ismét a harmonikus sor.

A HÁNYADOSKRITÉRIUM

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor.

TÉTEL

Ha létezik olyan $r < 1$ érték, amelyre véges sok kivételtől eltekintve teljesül

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \le r,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens.

MEGJEGYZÉS

Itt sem elég feltenni, hogy

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1;$$

ellenpélda ismét a harmonikus sor.

A HÁNYADOSKRITÉRIUM

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor.

TÉTEL

Ha létezik olyan $r < 1$ érték, amelyre véges sok kivételtől eltekintve teljesül

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq r,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens.

MEGJEGYZÉS

Itt sem elég feltenni, hogy

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1;$$

ellenpélda ismét a harmonikus sor.

A HÁNYADOSKRITÉRIUM

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor.

TÉTEL

Ha létezik olyan $r < 1$ érték, amelyre véges sok kivételtől eltekintve teljesül

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq r,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor konvergens.

MEGJEGYZÉS

Itt sem elég feltenni, hogy

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1;$$

ellenpélda ismét a harmonikus sor.

A HÁNYADOS-KRITÉRIUM BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Feltehető, hogy az $\frac{x_{n+1}}{x_n} \le r$ egyenlőtlenség minden n-re igaz. De ebből teljes indukcióval $x_n \le x_0 r^n$ következik, így alkalmazhatjuk a majoráns-elvet a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és az

$$x_0 \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

sorokra, ahol utóbbi konvergens, mert $r < 1$.

A HÁNYADOS-KRITÉRIUM BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Feltehető, hogy az $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq r$ egyenlőtlenség minden n-re igaz. De ebből teljes indukcióval $x_n \leq x_0 r^n$ következik, így alkalmazhatjuk a majoráns-elvet a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és az

$$x_0 \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

sorokra, ahol utóbbi konvergens, mert $r < 1$.

A HÁNYADOS-KRITÉRIUM BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Feltehető, hogy az $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq r$ egyenlőtlenség minden n-re igaz. De ebből teljes indukcióval $x_n \leq x_0 r^n$ következik, így alkalmazhatjuk a majoráns-elvet a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és az

$$x_0 \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

sorokra, ahol utóbbi konvergens, mert $r < 1$.

A HÁNYADOS-KRITÉRIUM BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Feltehető, hogy az $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq r$ egyenlőtlenség minden n-re igaz. De ebből teljes indukcióval $x_n \leq x_0 r^n$ következik, így alkalmazhatjuk a majoráns-elvet a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és az

$$x_0 \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

sorokra, ahol utóbbi konvergens, mert $r < 1$.

A HÁNYADOS-KRITÉRIUM BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Feltehető, hogy az $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq r$ egyenlőtlenség minden n-re igaz. De ebből teljes indukcióval $x_n \leq x_0 r^n$ következik, így alkalmazhatjuk a majoráns-elvet a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és az

$$x_0 \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

sorokra, ahol utóbbi konvergens, mert $r < 1$.

A hányados-kritérium bizonyítása

Bizonyítás. Feltehető, hogy az $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq r$ egyenlőtlenség minden n-re igaz. De ebből teljes indukcióval $x_n \leq x_0 r^n$ következik, így alkalmazhatjuk a majoráns-elvet a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és az

$$x_0 \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

sorokra, ahol utóbbi konvergens, mert $r < 1$.

A hányadoskritérium más alakban

Tétel

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy pozitív tagú sor, és legyen $A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Ha $A < 1$, akkor a sor konvergens, és ha $A > 1$, akkor a sor divergens.

Példa

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$ pozitív tagú sort. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

A HÁNYADOSKRITÉRIUM MÁS ALAKBAN

TÉTEL

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *egy pozitív tagú sor, és legyen* $A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. *Ha* $A < 1$*, akkor a sor konvergens, és ha* $A > 1$*, akkor a sor divergens.*

PÉLDA

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$ *pozitív tagú sort. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

A hányadoskritérium más alakban

Tétel

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy pozitív tagú sor, és legyen $A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Ha $A < 1$, akkor a sor konvergens, és ha $A > 1$, akkor a sor divergens.

Példa

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$ pozitív tagú sort. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

A hányadoskritérium más alakban

Tétel

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy pozitív tagú sor, és legyen $A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Ha $A < 1$, akkor a sor konvergens, és ha $A > 1$, akkor a sor divergens.

Példa

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$ pozitív tagú sort. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

A HÁNYADOSKRITÉRIUM MÁS ALAKBAN

TÉTEL

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *egy pozitív tagú sor, és legyen* $A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. *Ha* $A < 1$, *akkor a sor konvergens, és ha* $A > 1$, *akkor a sor divergens.*

PÉLDA

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$ *pozitív tagú sort.* *Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

A hányadoskritérium más alakban

Tétel

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy pozitív tagú sor, és legyen $A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Ha $A < 1$, akkor a sor konvergens, és ha $A > 1$, akkor a sor divergens.

Példa

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$ pozitív tagú sort. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

A HÁNYADOSKRITÉRIUM MÁS ALAKBAN

TÉTEL

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *egy pozitív tagú sor, és legyen* $A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. *Ha* $A < 1$, *akkor a sor konvergens, és ha* $A > 1$, *akkor a sor divergens.*

PÉLDA

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$ *pozitív tagú sort. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

A HÁNYADOSKRITÉRIUM MÁS ALAKBAN

TÉTEL

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *egy pozitív tagú sor, és legyen* $A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. *Ha* $A < 1$, *akkor a sor konvergens, és ha* $A > 1$, *akkor a sor divergens.*

PÉLDA

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$ *pozitív tagú sort. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

A HÁNYADOSKRITÉRIUM MÁS ALAKBAN

TÉTEL

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *egy pozitív tagú sor, és legyen* $A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. *Ha* $A < 1$, *akkor a sor konvergens, és ha* $A > 1$, *akkor a sor divergens.*

PÉLDA

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$ *pozitív tagú sort. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

A HÁNYADOSKRITÉRIUM MÁS ALAKBAN

TÉTEL

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *egy pozitív tagú sor, és legyen* $A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$*. Ha* $A < 1$*, akkor a sor konvergens, és ha* $A > 1$*, akkor a sor divergens.*

PÉLDA

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$ *pozitív tagú sort. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

A hányadoskritérium más alakban

Tétel

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy pozitív tagú sor, és legyen $A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Ha $A < 1$, akkor a sor konvergens, és ha $A > 1$, akkor a sor divergens.

Példa

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$ pozitív tagú sort. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

ABSZOLÚT KONVERGENCIA

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sort abszolút konvergensnek mondjuk, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.

ABSZOLÚT KONVERGENCIA

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sort abszolút konvergensnek mondjuk, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.

Abszolút konvergencia

Definíció

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sort abszolút konvergensnek mondjuk, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

sor konvergens.

Állítás

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.

ABSZOLÚT KONVERGENCIA

DEFINÍCIÓ

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sort abszolút konvergensnek mondjuk, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

sor konvergens.

ÁLLÍTÁS

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.

ABSZOLÚT KONVERGENCIA $\Rightarrow$ KONVERGENCIA

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk ε-hoz olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot, amelyre minden $m > n \geq n_\varepsilon$ esetén $|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon$. Ekkor

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_m| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon,$$

tehát alkalmazhatjuk a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumot.

MEGJEGYZÉS

Léteznek olyan sorok, amelyek konvergensek, de nem abszolút konvergensek. Példa ilyen sorra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

ABSZOLÚT KONVERGENCIA $\Rightarrow$ KONVERGENCIA

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk ε-hoz olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot, amelyre minden $m > n \geq n_\varepsilon$ esetén $|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon$. Ekkor

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_m| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon,$$

tehát alkalmazhatjuk a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumot.

MEGJEGYZÉS

Léteznek olyan sorok, amelyek konvergensek, de nem abszolút konvergensek. Példa ilyen sorra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

ABSZOLÚT KONVERGENCIA $\Rightarrow$ KONVERGENCIA

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk ε-hoz olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot, amelyre minden $m > n \geq n_\varepsilon$ esetén $|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon$. Ekkor

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_m| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon,$$

tehát alkalmazhatjuk a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumot.

MEGJEGYZÉS

Léteznek olyan sorok, amelyek konvergensek, de nem abszolút konvergensek. Példa ilyen sorra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

ABSZOLÚT KONVERGENCIA $\Rightarrow$ KONVERGENCIA

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk ε-hoz olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot, amelyre minden $m > n \geq n_\varepsilon$ esetén $|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon$. Ekkor

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_m| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon,$$

tehát alkalmazhatjuk a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumot.

MEGJEGYZÉS

Léteznek olyan sorok, amelyek konvergensek, de nem abszolút konvergensek. Példa ilyen sorra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

ABSZOLÚT KONVERGENCIA $\Rightarrow$ KONVERGENCIA

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk ε-hoz olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot, amelyre minden $m > n \geq n_\varepsilon$ esetén $|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon$. Ekkor

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_m| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon,$$

tehát alkalmazhatjuk a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumot.

MEGJEGYZÉS

Léteznek olyan sorok, amelyek konvergensek, de nem abszolút konvergensek. Példa ilyen sorra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

ABSZOLÚT KONVERGENCIA $\Rightarrow$ KONVERGENCIA

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk ε-hoz olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot, amelyre minden $m > n \geq n_\varepsilon$ esetén $|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon$. Ekkor

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_m| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon,$$

tehát alkalmazhatjuk a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumot.

MEGJEGYZÉS

Léteznek olyan sorok, amelyek konvergensek, de nem abszolút konvergensek. Példa ilyen sorra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

ABSZOLÚT KONVERGENCIA $\Rightarrow$ KONVERGENCIA

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk ε-hoz olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot, amelyre minden $m > n \geq n_\varepsilon$ esetén $|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon$. Ekkor

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_m| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon,$$

tehát alkalmazhatjuk a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumot.

MEGJEGYZÉS

Léteznek olyan sorok, amelyek konvergensek, de nem abszolút konvergensek. Példa ilyen sorra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

ABSZOLÚT KONVERGENCIA $\Rightarrow$ KONVERGENCIA

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk ε-hoz olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot, amelyre minden $m > n \geq n_\varepsilon$ esetén $|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon$. Ekkor

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_m| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon,$$

tehát alkalmazhatjuk a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumot.

MEGJEGYZÉS

Léteznek olyan sorok, amelyek konvergensek, de nem abszolút konvergensek. *Példa ilyen sorra:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

ABSZOLÚT KONVERGENCIA $\Rightarrow$ KONVERGENCIA

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk ε-hoz olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ küszöbszámot, amelyre minden $m > n \geq n_\varepsilon$ esetén $|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon$. Ekkor

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_m| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon,$$

tehát alkalmazhatjuk a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumot.

MEGJEGYZÉS

Léteznek olyan sorok, amelyek konvergensek, de nem abszolút konvergensek. Példa ilyen sorra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

FELTÉTELES KONVERGENCIA, SOROK ÁTRENDEZÉSE

DEFINÍCIÓ

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens sor, de nem abszolút konvergens, azt mondjuk hogy feltételesen konvergens.

DEFINÍCIÓ

Legyen

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

egy bijekció. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

sor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor egy átrendezése.

FELTÉTELES KONVERGENCIA, SOROK ÁTRENDEZÉSE

DEFINÍCIÓ

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens sor, de nem abszolút konvergens, azt mondjuk hogy feltételesen konvergens.

DEFINÍCIÓ

Legyen

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

egy bijekció. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

sor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor egy átrendezése.

FELTÉTELES KONVERGENCIA, SOROK ÁTRENDEZÉSE

DEFINÍCIÓ

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens sor, de nem abszolút konvergens, azt mondjuk hogy feltételesen konvergens.

DEFINÍCIÓ

Legyen

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

egy bijekció. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

sor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor egy átrendezése.

Feltételes konvergencia, sorok átrendezése

Definíció

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens sor, de nem abszolút konvergens, azt mondjuk hogy feltételesen konvergens.

Definíció

Legyen

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

egy bijekció. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

sor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor egy átrendezése.

KONVERGENS SOROK ÁTRENDEZHETŐSÉGE

TÉTEL

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens, akkor bármely $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ átrendezése is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

TÉTEL

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy feltételesen konvergens sor és $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor létezik egy olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, amelyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha.$$

KONVERGENS SOROK ÁTRENDEZHETŐSÉGE

TÉTEL

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens, akkor bármely $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ átrendezése is abszolút konvergens, *és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

TÉTEL

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy feltételesen konvergens sor **és** *$\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor létezik egy olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, amelyre*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha.$$

KONVERGENS SOROK ÁTRENDEZHETŐSÉGE

TÉTEL

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *abszolút konvergens, akkor bármely* $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ *átrendezése is abszolút konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

TÉTEL

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *egy feltételesen konvergens sor és* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, akkor létezik egy olyan* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekció, amelyre*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha.$$

KONVERGENS SOROK ÁTRENDEZHETŐSÉGE

TÉTEL

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens, akkor bármely $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ átrendezése is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

TÉTEL

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy feltételesen konvergens sor és $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor létezik egy olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, amelyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha.$$

Konvergens sorok átrendezhetősége

Tétel

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens, akkor bármely $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ átrendezése is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

Tétel

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy feltételesen konvergens sor és $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor létezik egy olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, amelyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha.$$

KONVERGENS SOROK ÁTRENDEZHETŐSÉGE

TÉTEL

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens, akkor bármely $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ átrendezése is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

TÉTEL

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy feltételesen konvergens sor és $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor létezik egy olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, amelyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha.$$

Konvergens sorok átrendezhetősége

Tétel

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens, akkor bármely $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ átrendezése is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

Tétel

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy feltételesen konvergens sor és $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor létezik egy olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, amelyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha.$$