7. ELŐADÁS: VALÓS FÜGGVÉNYEK GLOBÁLIS TULAJDONSÁGAI

VALÓS FÜGGVÉNYEK

Legyen $D \subseteq \mathbb{R}$ egy részhalmaz. Egy

$$f : D \to \mathbb{R}$$

függvényt (egyváltozós) valós függvénynek nevezünk.
Egy f valós függvény grafikonja/gráfja az

$$\{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ponthalmaz.

VALÓS FÜGGVÉNYEK

Legyen $D \subseteq \mathbb{R}$ egy részhalmaz. Egy

$$f : D \to \mathbb{R}$$

függvényt (egyváltozós) valós függvénynek nevezünk.
Egy f valós függvény grafikonja/gráfja az

$$\{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ponthalmaz.

VALÓS FÜGGVÉNYEK

Legyen $D \subseteq \mathbb{R}$ egy részhalmaz. Egy

$$f : D \to \mathbb{R}$$

függvényt (egyváltozós) valós függvénynek nevezünk.
Egy f valós függvény grafikonja/gráfja az

$$\{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ponthalmaz.

RÉSZHALMAZ ŐSKÉPE

Legyen f egy valós függvény és $H \subseteq \mathbb{R}$. Ekkor H őssképe f-re vonatkozóan:

$$f^{-1}(H) = \{x \in D : \quad f(x) \in H\}.$$

Speciálisan, ha $H = \{y\}$, akkor használjuk H ősképére az

$$f^{-1}(y)$$

jelölést.

RÉSZHALMAZ ŐSKÉPE

Legyen f egy valós függvény és $H \subseteq \mathbb{R}$. Ekkor H őspéke f-re vonatkozóan:

$$f^{-1}(H) = \{x \in D : \quad f(x) \in H\}.$$

Speciálisan, ha $H = \{y\}$, akkor használjuk H ősképére az

$$f^{-1}(y)$$

jelölést.

RÉSZHALMAZ ŐSKÉPE

Legyen f egy valós függvény és $H \subseteq \mathbb{R}$. Ekkor H ősképe f-re vonatkozóan:

$$f^{-1}(H) = \{x \in D : \quad f(x) \in H\}.$$

Speciálisan, ha $H = \{y\}$, akkor használjuk H ősképére az

$$f^{-1}(y)$$

jelölést.

RÉSZHALMAZ ŐSKÉPE

Legyen f egy valós függvény és $H \subseteq \mathbb{R}$. Ekkor H őském f-re vonatkozóan:

$$f^{-1}(H) = \{x \in D : \quad f(x) \in H\}.$$

Speciálisan, ha $H = \{y\}$, akkor használjuk H ősképére az

$$f^{-1}(y)$$

jelölést.

RÉSZHALMAZ ŐSKÉPE

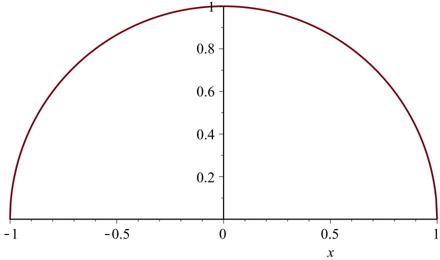

FIGURE: Az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ függvény grafikonja

PÉLDA

Ha $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, *akkor* $f^{-1}(1) = 0$, $f^{-1}(0) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}([2, \infty)) = \emptyset$ *és* $f^{-1}([1/2, 1]) = \left[-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2\right]$.

RÉSZHALMAZ ŐSKÉPE

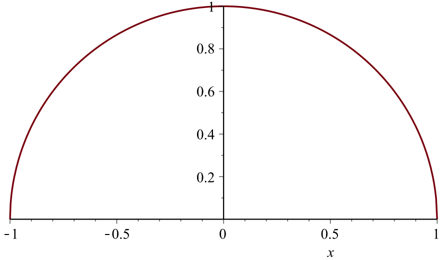

FIGURE: Az $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$ függvény grafikonja

PÉLDA

Ha $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$, *akkor* $f^{-1}(1) = 0$,
$f^{-1}(0) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}([2, \infty)) = \emptyset$ *és*
$f^{-1}([1/2, 1]) = \left[-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2\right]$.

RÉSZHALMAZ ŐSKÉPE

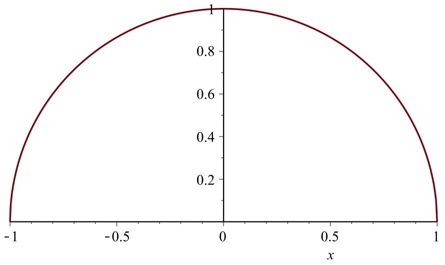

FIGURE: Az $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ függvény grafikonja

PÉLDA

Ha $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$, *akkor* $f^{-1}(1) = 0$, $f^{-1}(0) = \{-1,1\}$, $f^{-1}([2,\infty)) = \emptyset$ *és* $f^{-1}([1/2,1]) = \left[-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2\right]$.

RÉSZHALMAZ ŐSKÉPE

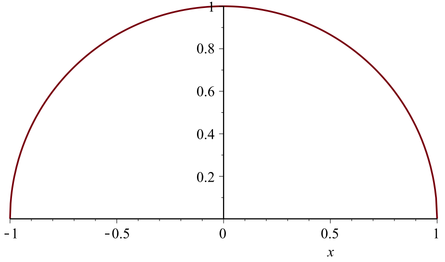

FIGURE: Az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ függvény grafikonja

PÉLDA

Ha $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, *akkor* $f^{-1}(1) = 0$, $f^{-1}(0) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}([2, \infty)) = \emptyset$ *és* $f^{-1}([1/2, 1]) = \left[-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2\right]$.

RÉSZHALMAZ ŐSKÉPE

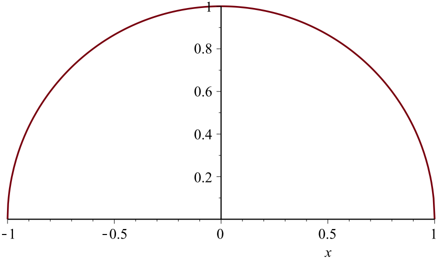

FIGURE: Az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ függvény grafikonja

PÉLDA

Ha $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, *akkor* $f^{-1}(1) = 0$, $f^{-1}(0) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}([2, \infty)) = \emptyset$ *és* $f^{-1}([1/2, 1]) = \left[-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2\right]$.

KORLÁTOSSÁG

Egy $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény

- felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq K$;
- alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq k$;
- korlátos, ha mind alulról, mind felülről korlátos.

Rövidebben: egy valós függvény korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos, ha az értékkészlete korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos.

KORLÁTOSSÁG

Egy $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény

- felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \le K$;
- alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \ge k$;
- korlátos, ha mind alulról, mind felülről korlátos.

Rövidebben: egy valós függvény korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos, ha az értékkészlete korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos.

KORLÁTOSSÁG

Egy $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény

- felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq K$;
- alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq k$;
- korlátos, ha mind alulról, mind felülről korlátos.

Rövidebben: egy valós függvény korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos, ha az értékkészlete korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos.

KORLÁTOSSÁG

Egy $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény

- felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq K$;
- alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq k$;
- korlátos, ha mind alulról, mind felülről korlátos.

Rövidebben: egy valós függvény korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos, ha az értékkészlete korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos.

KORLÁTOSSÁG

Egy $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény

- felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq K$;
- alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq k$;
- korlátos, ha mind alulról, mind felülről korlátos.

Rövidebben: egy valós függvény korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos, ha az értékkészlete korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos.

KORLÁTOSSÁG

Egy $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény

- felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq K$;
- alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq k$;
- korlátos, ha mind alulról, mind felülről korlátos.

Rövidebben: egy valós függvény korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos, ha az értékkészlete korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos.

KORLÁTOSSÁG

Egy $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény

- felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq K$;
- alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq k$;
- korlátos, ha mind alulról, mind felülről korlátos.

Rövidebben: egy valós függvény korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos, ha az értékkészlete korlátos/alulról korlátos/felülről korlátos.

MONOTONITÁS

Legyen $X \subseteq D$ és $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az X halmazon f

- (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \leq f(y)$;
- szigorúan (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) < f(y)$;
- (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \geq f(y)$;
- szigorúan (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) > f(y)$;
- monoton, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő;
- szigorúan monoton, ha szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

MONOTONITÁS

Legyen $X \subseteq D$ és $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az X halmazon f

- (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \leq f(y)$;
- szigorúan (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) < f(y)$;
- (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \geq f(y)$;
- szigorúan (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) > f(y)$;
- monoton, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő;
- szigorúan monoton, ha szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

MONOTONITÁS

Legyen $X \subseteq D$ és $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az X halmazon f

- (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \leq f(y)$;
- szigorúan (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) < f(y)$;
- (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \geq f(y)$;
- szigorúan (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) > f(y)$;
- monoton, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő;
- szigorúan monoton, ha szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

MONOTONITÁS

Legyen $X \subseteq D$ és $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az X halmazon f

- (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \leq f(y)$;
- szigorúan (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) < f(y)$;
- (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \geq f(y)$;
- szigorúan (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) > f(y)$;
- monoton, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő;
- szigorúan monoton, ha szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

MONOTONITÁS

Legyen $X \subseteq D$ és $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az X halmazon f

- (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \leq f(y)$;
- szigorúan (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) < f(y)$;
- (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \geq f(y)$;
- szigorúan (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) > f(y)$;
- monoton, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő;
- szigorúan monoton, ha szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

Monotonitás

Legyen $X \subseteq D$ és $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az X halmazon f

- (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \leq f(y)$;
- szigorúan (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) < f(y)$;
- (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \geq f(y)$;
- szigorúan (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) > f(y)$;
- monoton, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő;
- szigorúan monoton, ha szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

MONOTONITÁS

Legyen $X \subseteq D$ és $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az X halmazon f

- (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \leq f(y)$;
- szigorúan (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) < f(y)$;
- (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \geq f(y)$;
- szigorúan (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) > f(y)$;
- monoton, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő;
- szigorúan monoton, ha szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

MONOTONITÁS

Legyen $X \subseteq D$ és $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az X halmazon f

- (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \leq f(y)$;
- szigorúan (monoton) növekvő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) < f(y)$;
- (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) \geq f(y)$;
- szigorúan (monoton) csökkenő, ha minden $x < y$, $x, y \in X$ esetén teljesül $f(x) > f(y)$;
- monoton, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő;
- szigorúan monoton, ha szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

MONOTONITÁS

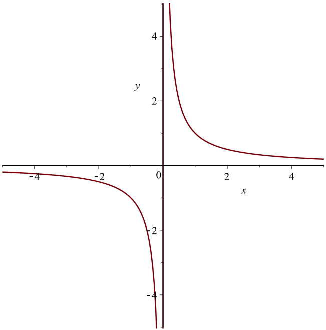

FIGURE: Az $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ függvény grafikonja

PÉLDA

Az $f(x) = \frac{1}{x}$, $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *függvény szigorúan csökken a* $(-\infty, 0)$ *és a* $(0, \infty)$ *intervallumokon, de nem monoton az* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *halmazon.*

MONOTONITÁS

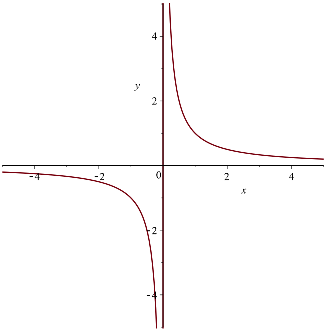

FIGURE: Az $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ függvény grafikonja

PÉLDA

Az $f(x) = \frac{1}{x}$, $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan csökken a $(-\infty, 0)$ és a $(0, \infty)$ intervallumokon, de nem monoton az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon.

MONOTONITÁS

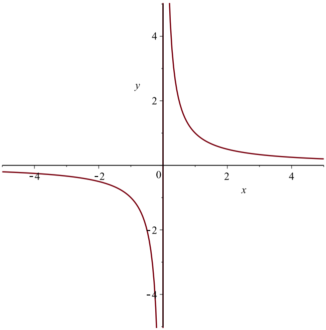

FIGURE: Az $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ függvény grafikonja

PÉLDA

Az $f(x) = \frac{1}{x}$, $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan csökken a $(-\infty, 0)$ és a $(0, \infty)$ intervallumokon, de nem monoton az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon.

GLOBÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont f-nek

- globális minimuma, ha minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- globális maximuma, ha minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- globális szélsőértéke, ha globális minimuma vagy globális maximuma.

Globális szélsőértékek

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont f-nek

- globális minimuma, ha minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- globális maximuma, ha minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- globális szélsőértéke, ha globális minimuma vagy globális maximuma.

GLOBÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont f-nek

- globális minimuma, ha minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- globális maximuma, ha minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- globális szélsőértéke, ha globális minimuma vagy globális maximuma.

GLOBÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont f-nek

- globális minimuma, ha minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- globális maximuma, ha minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- globális szélsőértéke, ha globális minimuma vagy globális maximuma.

GLOBÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont f-nek

- globális minimuma, ha minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- globális maximuma, ha minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- globális szélsőértéke, ha globális minimuma vagy globális maximuma.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont f-nek

- lokális (helyi) minimuma, ha x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre minden $x \in U \cap D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- lokális (helyi) maximuma, ha x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre minden $x \in U \cap D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- lokális (helyi) szélsőértéke, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma.

MEGJEGYZÉS

Minden globális szélsőérték lokális szélsőérték is, de ez fordítva nem igaz.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont f-nek

- lokális (helyi) minimuma, ha x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre minden $x \in U \cap D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- lokális (helyi) maximuma, ha x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre minden $x \in U \cap D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- lokális (helyi) szélsőértéke, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma.

MEGJEGYZÉS

Minden globális szélsőérték lokális szélsőérték is, de ez fordítva nem igaz.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont f-nek

- lokális (helyi) minimuma, ha x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre minden $x \in U \cap D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- lokális (helyi) maximuma, ha x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre minden $x \in U \cap D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- lokális (helyi) szélsőértéke, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma.

MEGJEGYZÉS

Minden globális szélsőérték lokális szélsőérték is, de ez fordítva nem igaz.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont f-nek

- lokális (helyi) minimuma, ha x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre minden $x \in U \cap D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- lokális (helyi) maximuma, ha x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre minden $x \in U \cap D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- lokális (helyi) szélsőértéke, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma.

MEGJEGYZÉS

Minden globális szélsőérték lokális szélsőérték is, de ez fordítva nem igaz.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont f-nek

- lokális (helyi) minimuma, ha x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre minden $x \in U \cap D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- lokális (helyi) maximuma, ha x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre minden $x \in U \cap D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- lokális (helyi) szélsőértéke, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma.

MEGJEGYZÉS

Minden globális szélsőérték lokális szélsőérték is, de ez fordítva nem igaz.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont f-nek

- lokális (helyi) minimuma, ha x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre minden $x \in U \cap D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- lokális (helyi) maximuma, ha x_0-nak létezik olyan U környezete, melyre minden $x \in U \cap D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- lokális (helyi) szélsőértéke, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma.

MEGJEGYZÉS

Minden globális szélsőérték lokális szélsőérték is, de ez fordítva nem igaz.

SZÉLSŐÉRTÉKEK

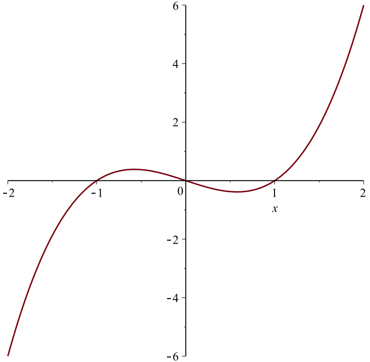

FIGURE: Az $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény grafikonja

PÉLDA

Az $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ *függvénynek lokális maximuma van az* $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ *helyen és lokális minimuma az* $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *helyen, melyek értéke rendre* $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ *és* $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

SZÉLSŐÉRTÉKEK

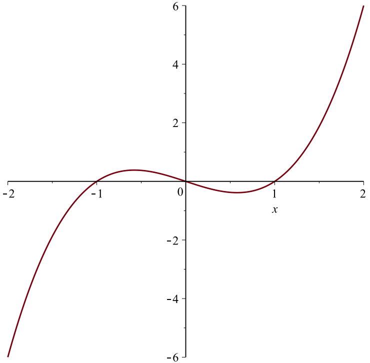

FIGURE: Az $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény grafikonja

PÉLDA

Az $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ függvénynek lokális maximuma van az $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ helyen és lokális minimuma az $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ helyen, melyek értéke rendre $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ és $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

SZÉLSŐÉRTÉKEK

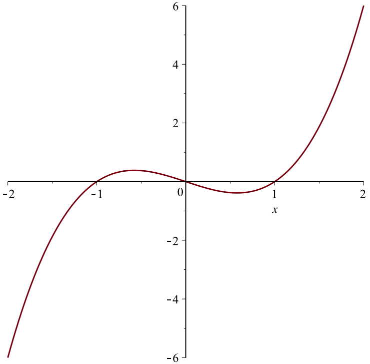

FIGURE: Az $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény grafikonja

PÉLDA

Az $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ függvénynek lokális maximuma van az $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ helyen és lokális minimuma az $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ helyen, melyek értéke rendre $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ és $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

SZÉLSŐÉRTÉKEK

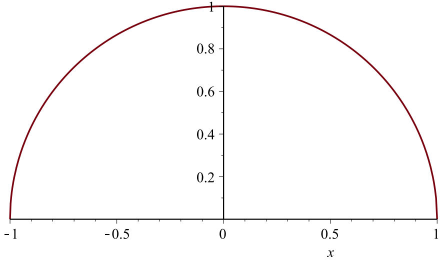

FIGURE: Az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ függvény grafikonja

PÉLDA

Az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ függvénynek globális maximuma van az $x = 0$ pontban és globális minimuma az $x = \pm 1$ pontokban, melyek értéke rendre $f(0) = 1$, $f(\pm 1) = 0$.

Szélsőértékek

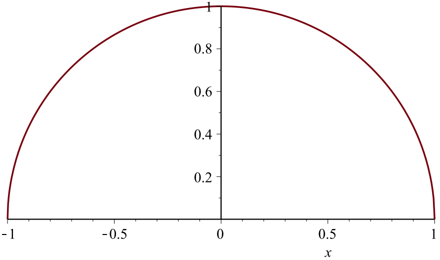

Figure: Az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ függvény grafikonja

Példa

Az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ függvénynek globális maximuma van az $x = 0$ pontban és globális minimuma az $x = \pm 1$ pontokban, melyek értéke rendre $f(0) = 1$, $f(\pm 1) = 0$.

PERIODICITÁS, PARITÁS

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy f

- periodikus $T > 0$ periódussal, ha minden $x \in D$ esetén $x \pm T \in D$ és $f(x + T) = f(x)$;
- páros, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = f(x)$;
- páratlan, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = -f(x)$.

MEGJEGYZÉS

Függvényvizsgálatban a periodicitás vizsgálata azt jelenti, hogy eldöntjük, hogy periodikus-e, és ha van, megkeressük a legkisebb periódust.

PERIODICITÁS, PARITÁS

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy f

- periodikus $T > 0$ periódussal, ha minden $x \in D$ esetén $x \pm T \in D$ és $f(x + T) = f(x)$;
- páros, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = f(x)$;
- páratlan, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = -f(x)$.

MEGJEGYZÉS

Függvényvizsgálatban a periodicitás vizsgálata azt jelenti, hogy eldöntjük, hogy periodikus-e, és ha van, megkeressük a legkisebb periódust.

PERIODICITÁS, PARITÁS

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy f

- periodikus $T > 0$ periódussal, ha minden $x \in D$ esetén $x \pm T \in D$ és $f(x + T) = f(x)$;
- páros, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = f(x)$;
- páratlan, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = -f(x)$.

MEGJEGYZÉS

Függvényvizsgálatban a periodicitás vizsgálata azt jelenti, hogy eldöntjük, hogy periodikus-e, és ha van, megkeressük a legkisebb periódust.

PERIODICITÁS, PARITÁS

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy f

- periodikus $T > 0$ periódussal, ha minden $x \in D$ esetén $x \pm T \in D$ és $f(x + T) = f(x)$;
- páros, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = f(x)$;
- páratlan, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = -f(x)$.

MEGJEGYZÉS

Függvényvizsgálatban a periodicitás vizsgálata azt jelenti, hogy eldöntjük, hogy periodikus-e, és ha van, megkeressük a legkisebb periódust.

PERIODICITÁS, PARITÁS

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy f

- periodikus $T > 0$ periódussal, ha minden $x \in D$ esetén $x \pm T \in D$ és $f(x+T) = f(x)$;
- páros, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = f(x)$;
- páratlan, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = -f(x)$.

MEGJEGYZÉS

Függvényvizsgálatban a periodicitás vizsgálata azt jelenti, hogy eldöntjük, hogy periodikus-e, és ha van, megkeressük a legkisebb periódust.

PERIODICITÁS, PARITÁS

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy f

- periodikus $T > 0$ periódussal, ha minden $x \in D$ esetén $x \pm T \in D$ és $f(x+T) = f(x)$;
- páros, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = f(x)$;
- páratlan, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = -f(x)$.

MEGJEGYZÉS

Függvényvizsgálatban a periodicitás vizsgálata azt jelenti, hogy eldöntjük, hogy periodikus-e, és ha van, megkeressük a legkisebb periódust.

PERIODICITÁS, PARITÁS

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy f

- periodikus $T > 0$ periódussal, ha minden $x \in D$ esetén $x \pm T \in D$ és $f(x+T) = f(x)$;
- páros, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = f(x)$;
- páratlan, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = -f(x)$.

MEGJEGYZÉS

Függvényvizsgálatban a periodicitás vizsgálata azt jelenti, hogy eldöntjük, hogy periodikus-e, és ha van, megkeressük a legkisebb periódust.

PERIODICITÁS, PARITÁS, PÉLDÁK

PÉLDA

1. *Periódikus függvények:* $x \mapsto \sin(x), \cos(x), \mathrm{tg}(x), \mathrm{ctg}(x)$ *(legkisebb periódusok rendre* 2π, 2π, π, π*).*
2. *Páros függvények:* $x \mapsto x^2, |x|, x^{2n} (n \in \mathbb{Z})$, $x \mapsto \cos(x)$.
3. *Páratlan függvények:* $x \mapsto x, x^3, x^{2n+1} (n \in \mathbb{Z})$, $x \mapsto \sin(x), \mathrm{tg}(x), \mathrm{ctg}(x)$.
4. *Páros és páratlan függvény:* $x \mapsto 0$.

MEGJEGYZÉS

Egy valós függvény pontosan akkor páros (páratlan), ha a grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre (origóra).

PERIODICITÁS, PARITÁS, PÉLDÁK

PÉLDA

1. *Periódikus függvények:* $x \mapsto \sin(x), \cos(x), \mathrm{tg}(x), \mathrm{ctg}(x)$ *(legkisebb periódusok rendre* 2π, 2π, π, π*).*
2. *Páros függvények:* $x \mapsto x^2, |x|, x^{2n} (n \in \mathbb{Z})$, $x \mapsto \cos(x)$.
3. *Páratlan függvények:* $x \mapsto x, x^3, x^{2n+1} (n \in \mathbb{Z})$, $x \mapsto \sin(x), \mathrm{tg}(x), \mathrm{ctg}(x)$.
4. *Páros és páratlan függvény:* $x \mapsto 0$.

MEGJEGYZÉS

Egy valós függvény pontosan akkor páros (páratlan), ha a grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre (origóra).

Periodicitás, paritás, példák

Példa

1. *Periódikus függvények:* $x \mapsto \sin(x), \cos(x), \operatorname{tg}(x), \operatorname{ctg}(x)$ *(legkisebb periódusok rendre* 2π*,* 2π*,* π*,* π*).*
2. *Páros függvények:* $x \mapsto x^2, |x|, x^{2n} (n \in \mathbb{Z})$*,* $x \mapsto \cos(x)$*.*
3. *Páratlan függvények:* $x \mapsto x, x^3, x^{2n+1} (n \in \mathbb{Z})$*,* $x \mapsto \sin(x), \operatorname{tg}(x), \operatorname{ctg}(x)$*.*
4. *Páros és páratlan függvény:* $x \mapsto 0$*.*

Megjegyzés

Egy valós függvény pontosan akkor páros (páratlan), ha a grafikonja szimmetrikus az y*-tengelyre (origóra).*

PERIODICITÁS, PARITÁS, PÉLDÁK

PÉLDA

1. *Periódikus függvények:* $x \mapsto \sin(x), \cos(x), \mathrm{tg}(x), \mathrm{ctg}(x)$ *(legkisebb periódusok rendre* 2π, 2π, π, π*).*
2. *Páros függvények:* $x \mapsto x^2, |x|, x^{2n} (n \in \mathbb{Z})$, $x \mapsto \cos(x)$.
3. *Páratlan függvények:* $x \mapsto x, x^3, x^{2n+1} (n \in \mathbb{Z})$, $x \mapsto \sin(x), \mathrm{tg}(x), \mathrm{ctg}(x)$.
4. *Páros és páratlan függvény:* $x \mapsto 0$.

MEGJEGYZÉS

Egy valós függvény pontosan akkor páros (páratlan), ha a grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre (origóra).

PERIODICITÁS, PARITÁS, PÉLDÁK

PÉLDA

1. *Periódikus függvények:* $x \mapsto \sin(x), \cos(x), \mathrm{tg}(x), \mathrm{ctg}(x)$ *(legkisebb periódusok rendre* 2π*,* 2π*,* π*,* π*).*
2. *Páros függvények:* $x \mapsto x^2, |x|, x^{2n} (n \in \mathbb{Z})$*,* $x \mapsto \cos(x)$*.*
3. *Páratlan függvények:* $x \mapsto x, x^3, x^{2n+1} (n \in \mathbb{Z})$*,* $x \mapsto \sin(x), \mathrm{tg}(x), \mathrm{ctg}(x)$*.*
4. *Páros és páratlan függvény:* $x \mapsto 0$*.*

MEGJEGYZÉS

Egy valós függvény pontosan akkor páros (páratlan), ha a grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre (origóra).

PERIODICITÁS, PARITÁS, PÉLDÁK

DEFINÍCIÓ

Egy $x \in \mathbb{R}$ valós szám egész része az a legnagyobb egész szám, ami nem nagyobb, mint x. Jele: $[x]$. Egy $x \in \mathbb{R}$ valós szám törtrésze az $x - [x]$ szám. Jele: $\{x\}$.

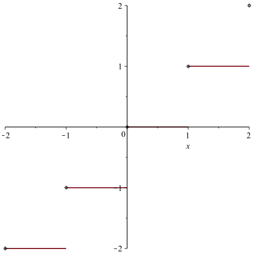

FIGURE: Az egészrész függvény grafikonja

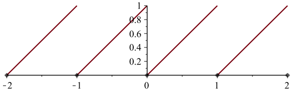

FIGURE: A törtrész függvény grafikonja

PERIODICITÁS, PARITÁS, PÉLDÁK

DEFINÍCIÓ

Egy $x \in \mathbb{R}$ valós szám egész része az a legnagyobb egész szám, ami nem nagyobb, mint x. Jele: $[x]$. Egy $x \in \mathbb{R}$ valós szám törtrésze az $x - [x]$ szám. Jele: $\{x\}$.

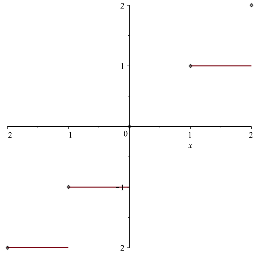

FIGURE: Az egészrész függvény grafikonja

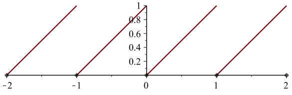

FIGURE: A törtrész függvény grafikonja

Periodicitás, paritás, példák

Példa (Dirichlet-függvény)

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *ahol*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & ha\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ekkor f periódikus, és periódusai pontosan a pozitív racionális számok. Tehát nincs legkisebb periódusa.

PERIODICITÁS, PARITÁS, PÉLDÁK

PÉLDA (DIRICHLET-FÜGGVÉNY)

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, ahol*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & ha\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ekkor f periódikus, és periódusai pontosan a pozitív racionális számok. Tehát nincs legkisebb periódusa.

PERIODICITÁS, PARITÁS, PÉLDÁK

PÉLDA (DIRICHLET-FÜGGVÉNY)

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, ahol*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & ha\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ekkor f *periódikus, és periódusai pontosan a pozitív racionális számok. Tehát nincs legkisebb periódusa.*

Periodicitás, paritás, példák

Példa (Dirichlet-függvény)

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *ahol*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \textit{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ekkor f *periódikus, és periódusai pontosan a pozitív racionális számok. Tehát nincs legkisebb periódusa.*

MŰVELETEK VALÓS FÜGGVÉNYEKKEL

Legyenek

$$f_1 : D_1 \to \mathbb{R}, \quad f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Ekkor f_1 és f_2 összege:

$$f_1 + f_2 : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_1(x) + f_2(x),$$

szorzata:

$$f_1 f_2 : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_1(x) f_2(x),$$

és hányadosa

$$\frac{f_1}{f_2} : D_1 \cap (D_2 \setminus f_2^{-1}(0)) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

MŰVELETEK VALÓS FÜGGVÉNYEKKEL

Legyenek

$$f_1 : D_1 \to \mathbb{R}, \quad f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Ekkor f_1 és f_2 összege:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : D_1 \cap D_2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_1(x) + f_2(x), \end{aligned}$$

szorzata:

$$\begin{aligned} f_1 f_2 : D_1 \cap D_2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_1(x) f_2(x), \end{aligned}$$

és hányadosa

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_2} : D_1 \cap (D_2 \setminus f_2^{-1}(0)) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}. \end{aligned}$$

MŰVELETEK VALÓS FÜGGVÉNYEKKEL

Legyenek

$$f_1 : D_1 \to \mathbb{R}, \quad f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Ekkor f_1 és f_2 összege:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : D_1 \cap D_2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_1(x) + f_2(x), \end{aligned}$$

szorzata:

$$\begin{aligned} f_1 f_2 : D_1 \cap D_2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_1(x) f_2(x), \end{aligned}$$

és hányadosa

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_2} : D_1 \cap (D_2 \setminus f_2^{-1}(0)) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}. \end{aligned}$$

MŰVELETEK VALÓS FÜGGVÉNYEKKEL

Legyenek

$$f_1 : D_1 \to \mathbb{R}, \quad f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Ekkor f_1 és f_2 összege:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : D_1 \cap D_2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_1(x) + f_2(x), \end{aligned}$$

szorzata:

$$\begin{aligned} f_1 f_2 : D_1 \cap D_2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_1(x) f_2(x), \end{aligned}$$

és hányadosa

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_2} : D_1 \cap (D_2 \setminus f_2^{-1}(0)) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}. \end{aligned}$$

ÖSSZETETT ÉS INVERZ FÜGGVÉNY (EMLÉKEZTETŐ)

Legyenek

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad g : D_g \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Ekkor f és g összetett (komponált) függvénye:

$$g \circ f : D_f \cap f^{-1}(D_g) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(f(x)).$$

Ha f bijektív, akkor f inverz függvénye:

$$f^{-1} : R_f \to D_f \subseteq \mathbb{R}$$

az egyetlen olyan függvény, amelyre minden $x \in D_f$ esetén

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Ekkor f és f^{-1} grafikonjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan.

ÖSSZETETT ÉS INVERZ FÜGGVÉNY (EMLÉKEZTETŐ)

Legyenek

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad g : D_g \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Ekkor f és g összetett (komponált) függvénye:

$$g \circ f : D_f \cap f^{-1}(D_g) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(f(x)).$$

Ha f bijektív, akkor f inverz függvénye:

$$f^{-1} : R_f \to D_f \subseteq \mathbb{R}$$

az egyetlen olyan függvény, amelyre minden $x \in D_f$ esetén

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Ekkor f és f^{-1} grafikonjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan.

ÖSSZETETT ÉS INVERZ FÜGGVÉNY (EMLÉKEZTETŐ)

Legyenek

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad g : D_g \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Ekkor f és g összetett (komponált) függvénye:

$$g \circ f : D_f \cap f^{-1}(D_g) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(f(x)).$$

Ha f bijektív, akkor f inverz függvénye:

$$f^{-1} : R_f \to D_f \subseteq \mathbb{R}$$

az egyetlen olyan függvény, amelyre minden $x \in D_f$ esetén

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Ekkor f és f^{-1} grafikonjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan.

ÖSSZETETT ÉS INVERZ FÜGGVÉNY (EMLÉKEZTETŐ)

Legyenek

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad g : D_g \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Ekkor f és g összetett (komponált) függvénye:

$$g \circ f : D_f \cap f^{-1}(D_g) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(f(x)).$$

Ha f bijektív, akkor f inverz függvénye:

$$f^{-1} : R_f \to D_f \subseteq \mathbb{R}$$

az egyetlen olyan függvény, amelyre minden $x \in D_f$ esetén

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Ekkor f és f^{-1} grafikonjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan.

ÖSSZETETT ÉS INVERZ FÜGGVÉNY (EMLÉKEZTETŐ)

Legyenek

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad g : D_g \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Ekkor f és g összetett (komponált) függvénye:

$$\begin{aligned} g \circ f : D_f \cap f^{-1}(D_g) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Ha f bijektív, akkor f inverz függvénye:

$$f^{-1} : R_f \to D_f \subseteq \mathbb{R}$$

az egyetlen olyan függvény, amelyre minden $x \in D_f$ esetén

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Ekkor f és f^{-1} grafikonjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan.

ÖSSZETETT ÉS INVERZ FÜGGVÉNY (EMLÉKEZTETŐ)

Legyenek

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad g : D_g \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Ekkor f és g összetett (komponált) függvénye:

$$\begin{aligned} g \circ f : D_f \cap f^{-1}(D_g) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Ha f bijektív, akkor f inverz függvénye:

$$f^{-1} : R_f \to D_f \subseteq \mathbb{R}$$

az egyetlen olyan függvény, amelyre minden $x \in D_f$ esetén

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Ekkor f és f^{-1} grafikonjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.
Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = \frac{x-1}{2x+3} \Longrightarrow f^{-1}: x = \frac{y-1}{2y+3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2xy + 3x = y - 1 \Longrightarrow 3x + 1 = (1-2x)y \Longrightarrow y = \frac{3x+1}{1-2x}.$$

Tehát létezik inverz, és $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{1-2x}$.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.

Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = \frac{x-1}{2x+3} \Longrightarrow f^{-1}: x = \frac{y-1}{2y+3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2xy + 3x = y - 1 \Longrightarrow 3x + 1 = (1-2x)y \Longrightarrow y = \frac{3x+1}{1-2x}.$$

Tehát létezik inverz, és $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{1-2x}$.

Inverz függvény kiszámítása

Feladat

Határozza meg az $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.

Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = \frac{x-1}{2x+3} \Longrightarrow f^{-1}: x = \frac{y-1}{2y+3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2xy + 3x = y - 1 \Longrightarrow 3x + 1 = (1-2x)y \Longrightarrow y = \frac{3x+1}{1-2x}.$$

Tehát létezik inverz, és $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{1-2x}$.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.
Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = \frac{x-1}{2x+3} \Longrightarrow f^{-1}: x = \frac{y-1}{2y+3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2xy + 3x = y - 1 \Longrightarrow 3x + 1 = (1-2x)y \Longrightarrow y = \frac{3x+1}{1-2x}.$$

Tehát létezik inverz, és $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{1-2x}$.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.
Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = \frac{x-1}{2x+3} \Longrightarrow f^{-1}: x = \frac{y-1}{2y+3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2xy + 3x = y - 1 \Longrightarrow 3x + 1 = (1-2x)y \Longrightarrow y = \frac{3x+1}{1-2x}.$$

Tehát létezik inverz, és $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{1-2x}$.

Inverz függvény kiszámítása

Feladat

Határozza meg az $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.

Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = \frac{x-1}{2x+3} \Longrightarrow f^{-1}: x = \frac{y-1}{2y+3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2xy + 3x = y - 1 \Longrightarrow 3x + 1 = (1-2x)y \Longrightarrow y = \frac{3x+1}{1-2x}.$$

Tehát létezik inverz, és $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{1-2x}$.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.
Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = \frac{x-1}{2x+3} \Longrightarrow f^{-1}: x = \frac{y-1}{2y+3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2xy + 3x = y - 1 \Longrightarrow 3x + 1 = (1-2x)y \Longrightarrow y = \frac{3x+1}{1-2x}.$$

Tehát létezik inverz, és $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{1-2x}$.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.

Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = \frac{x-1}{2x+3} \Longrightarrow f^{-1}: x = \frac{y-1}{2y+3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2xy + 3x = y - 1 \Longrightarrow 3x + 1 = (1-2x)y \Longrightarrow y = \frac{3x+1}{1-2x}.$$

Tehát létezik inverz, és $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{1-2x}$.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.
Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = \frac{x-1}{2x+3} \Longrightarrow f^{-1}: x = \frac{y-1}{2y+3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2xy + 3x = y - 1 \Longrightarrow 3x + 1 = (1-2x)y \Longrightarrow y = \frac{3x+1}{1-2x}.$$

Tehát létezik inverz, és $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{1-2x}$.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = x^2 - 2x + 3$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.

Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = x^2 - 2x + 3 \Longrightarrow f^{-1}: x = y^2 - 2y + 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^2 - 2y + (3 - x) = 0 \Longrightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3 - x)}}{2} = 1 \pm \sqrt{x - 2}.$$

Tehát nem létezik inverz.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = x^2 - 2x + 3$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.

Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = x^2 - 2x + 3 \Longrightarrow f^{-1}: x = y^2 - 2y + 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^2 - 2y + (3 - x) = 0 \Longrightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3 - x)}}{2} = 1 \pm \sqrt{x - 2}.$$

Tehát nem létezik inverz.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = x^2 - 2x + 3$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.
Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = x^2 - 2x + 3 \Longrightarrow f^{-1}: x = y^2 - 2y + 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^2 - 2y + (3 - x) = 0 \Longrightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3 - x)}}{2} = 1 \pm \sqrt{x - 2}.$$

Tehát nem létezik inverz.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = x^2 - 2x + 3$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.
Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = x^2 - 2x + 3 \Longrightarrow f^{-1}: x = y^2 - 2y + 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^2 - 2y + (3 - x) = 0 \Longrightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3 - x)}}{2} = 1 \pm \sqrt{x - 2}.$$

Tehát nem létezik inverz.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = x^2 - 2x + 3$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.
Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = x^2 - 2x + 3 \Longrightarrow f^{-1}: x = y^2 - 2y + 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^2 - 2y + (3 - x) = 0 \Longrightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3 - x)}}{2} = 1 \pm \sqrt{x - 2}.$$

Tehát nem létezik inverz.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = x^2 - 2x + 3$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.
Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f : \quad y = x^2 - 2x + 3 \Longrightarrow f^{-1} : x = y^2 - 2y + 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^2 - 2y + (3 - x) = 0 \Longrightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3-x)}}{2} = 1 \pm \sqrt{x-2}.$$

Tehát nem létezik inverz.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = x^2 - 2x + 3$ függvény inverzét, ha létezik!

Megoldás.
Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = x^2 - 2x + 3 \Longrightarrow f^{-1} : x = y^2 - 2y + 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^2 - 2y + (3 - x) = 0 \Longrightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3 - x)}}{2} = 1 \pm \sqrt{x - 2}.$$

Tehát nem létezik inverz.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Határozza meg az $f(x) = x^2 - 2x + 3$ *függvény inverzét, ha létezik!*

Megoldás.
Ha $y = f(x)$, akkor $x = f^{-1}(y)$. Informális jelöléssel:

$$f: \quad y = x^2 - 2x + 3 \Longrightarrow f^{-1}: x = y^2 - 2y + 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^2 - 2y + (3 - x) = 0 \Longrightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3 - x)}}{2} = 1 \pm \sqrt{x - 2}.$$

Tehát nem létezik inverz.

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

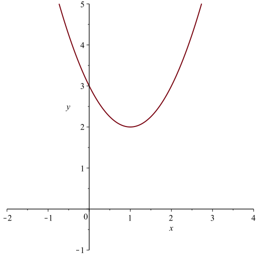

FIGURE: Az $y = x^2 - 2x + 3$ egyenletű görbe

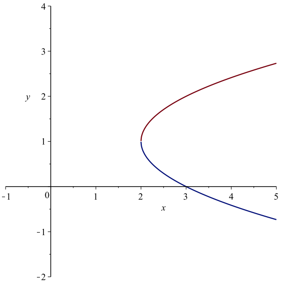

FIGURE: Az $y = 1 + \sqrt{x-2}$ (piros) és az $y = 1 - \sqrt{x-2}$ (kék) egyenletű görbék

Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \geq 1$ függvény invertálható, és inverze $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$. Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \leq 1$ függvény is invertálható, és inverze $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-2}$. (Ezek f leszűkítései)

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

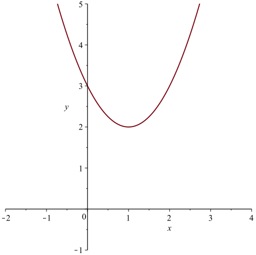

FIGURE: Az $y = x^2 - 2x + 3$ egyenletű görbe

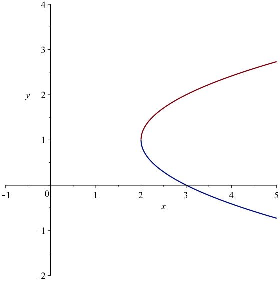

FIGURE: Az $y = 1 + \sqrt{x-2}$ (piros) és az $y = 1 - \sqrt{x-2}$ (kék) egyenletű görbék

Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \geq 1$ függvény invertálható, és inverze $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$. Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \leq 1$ függvény is invertálható, és inverze $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-2}$. (Ezek f leszűkítései)

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

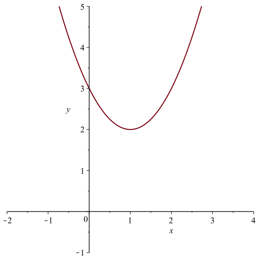

FIGURE: Az $y = x^2 - 2x + 3$ egyenletű görbe

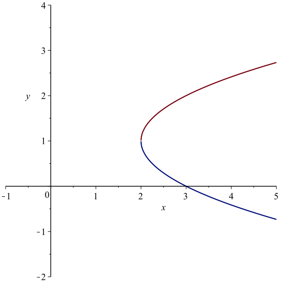

FIGURE: Az $y = 1 + \sqrt{x-2}$ (piros) és az $y = 1 - \sqrt{x-2}$ (kék) egyenletű görbék

Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \geq 1$ függvény invertálható, és inverze $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$. Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \leq 1$ függvény is invertálható, és inverze $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-2}$. (Ezek f leszűkítései)

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

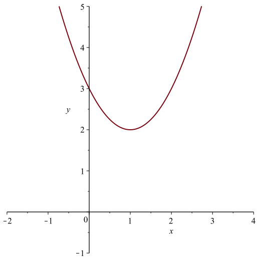

FIGURE: Az $y = x^2 - 2x + 3$ egyenletű görbe

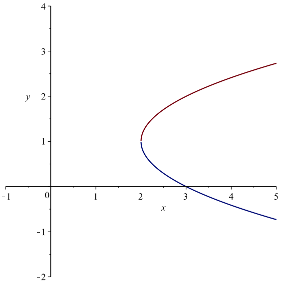

FIGURE: Az $y = 1 + \sqrt{x-2}$ (piros) és az $y = 1 - \sqrt{x-2}$ (kék) egyenletű görbék

Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \geq 1$ függvény invertálható, és inverze $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$. Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \leq 1$ függvény is invertálható, és inverze $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-2}$. (Ezek f leszűkítései)

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

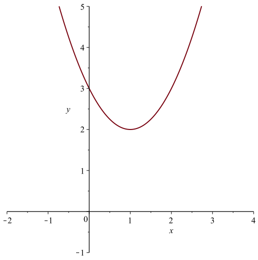

FIGURE: Az $y = x^2 - 2x + 3$ egyenletű görbe

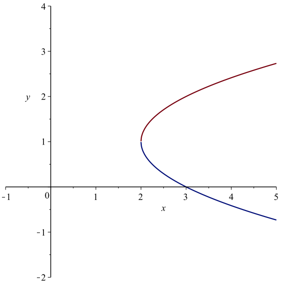

FIGURE: Az $y = 1 + \sqrt{x-2}$ (piros) és az $y = 1 - \sqrt{x-2}$ (kék) egyenletű görbék

Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \geq 1$ függvény invertálható, és inverze $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$. Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \leq 1$ függvény is invertálható, és inverze $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-2}$. (Ezek f leszűkítései)

INVERZ FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA

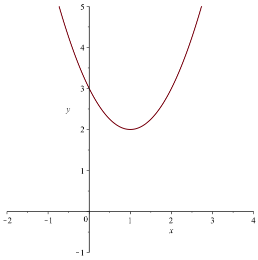

FIGURE: Az $y = x^2 - 2x + 3$ egyenletű görbe

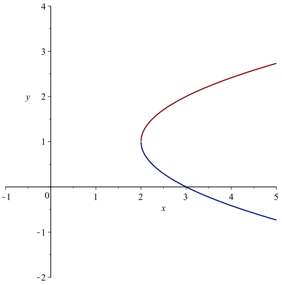

FIGURE: Az $y = 1 + \sqrt{x-2}$ (piros) és az $y = 1 - \sqrt{x-2}$ (kék) egyenletű görbék

Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \geq 1$ függvény invertálható, és inverze $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$. Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \leq 1$ függvény is invertálható, és inverze $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-2}$. (Ezek f leszűkítései)