10. ELŐADÁS: VALÓS FÜGGVÉNYEK LOKÁLIS TULAJDONSÁGAI

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

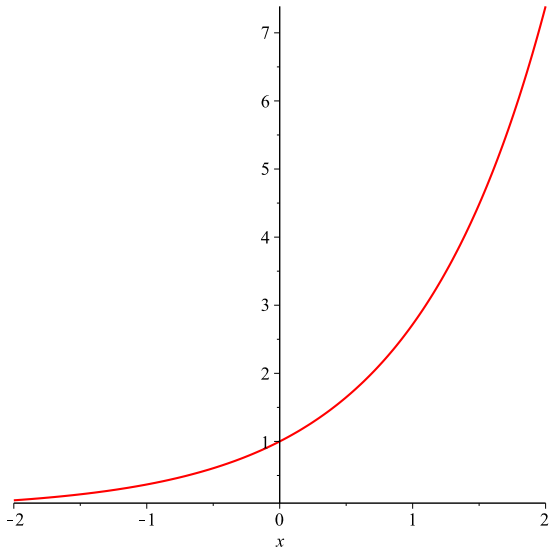


FIGURE: Az $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény grafikonja

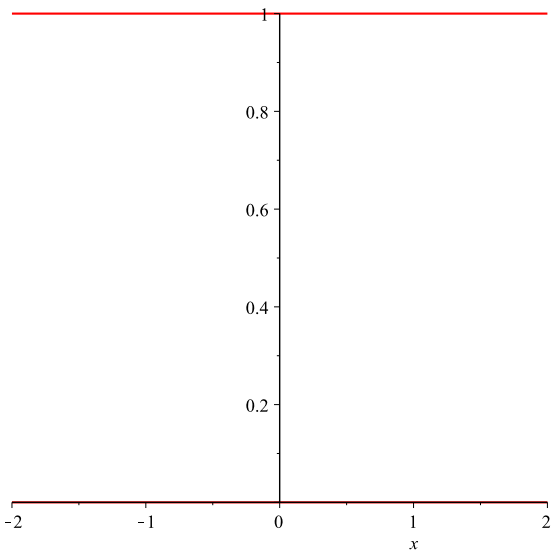


FIGURE: Az $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ függvény (Dirichlet-függvény) grafikonja

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

PÉLDA

1. *Geometriailag 'úgy tűnik', hogy az $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.*
2. *A Dirichlet-függvény sehol nem folytonos.*
3. *Az $f(x) = c$ konstans függvény mindenhol folytonos minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.*
4. *Az $f(x) = x$ függvény mindenhol folytonos ($\delta = \varepsilon$).*

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

PÉLDA

1. *Geometriailag 'úgy tűnik', hogy az $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.*
2. *A Dirichlet-függvény sehol nem folytonos.*
3. *Az $f(x) = c$ konstans függvény mindenhol folytonos minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.*
4. *Az $f(x) = x$ függvény mindenhol folytonos ($\delta = \varepsilon$).*

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

PÉLDA

1. *Geometriailag 'úgy tűnik', hogy az $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.*
2. *A Dirichlet-függvény sehol nem folytonos.*
3. *Az $f(x) = c$ konstans függvény mindenhol folytonos minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.*
4. *Az $f(x) = x$ függvény mindenhol folytonos ($\delta = \varepsilon$).*

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

PÉLDA

1. *Geometriailag 'úgy tűnik', hogy az $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.*
2. *A Dirichlet-függvény sehol nem folytonos.*
3. *Az $f(x) = c$ konstans függvény mindenhol folytonos minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.*
4. *Az $f(x) = x$ függvény mindenhol folytonos ($\delta = \varepsilon$).*

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

PÉLDA

1. *Geometriailag 'úgy tűnik', hogy az $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.*
2. *A Dirichlet-függvény sehol nem folytonos.*
3. *Az $f(x) = c$ konstans függvény mindenhol folytonos minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.*
4. *Az $f(x) = x$ függvény mindenhol folytonos ($\delta = \varepsilon$).*

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

PÉLDA

1. *Geometriailag 'úgy tűnik', hogy az $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.*
2. *A Dirichlet-függvény sehol nem folytonos.*
3. *Az $f(x) = c$ konstans függvény mindenhol folytonos minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.*
4. *Az $f(x) = x$ függvény mindenhol folytonos ($\delta = \varepsilon$).*

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

PÉLDA

1. *Geometriailag 'úgy tűnik', hogy az $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.*
2. *A Dirichlet-függvény sehol nem folytonos.*
3. *Az $f(x) = c$ konstans függvény mindenhol folytonos minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.*
4. *Az $f(x) = x$ függvény mindenhol folytonos ($\delta = \varepsilon$).*

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

PÉLDA

1. *Geometriailag 'úgy tűnik', hogy az $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.*
2. *A Dirichlet-függvény sehol nem folytonos.*
3. *Az $f(x) = c$ konstans függvény mindenhol folytonos minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.*
4. *Az $f(x) = x$ függvény mindenhol folytonos ($\delta = \varepsilon$).*

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

PÉLDA

1. *Geometriailag 'úgy tűnik', hogy az $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.*
2. *A Dirichlet-függvény sehol nem folytonos.*
3. *Az $f(x) = c$ konstans függvény mindenhol folytonos minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.*
4. *Az $f(x) = x$ függvény mindenhol folytonos ($\delta = \varepsilon$).*

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

FELADAT

Igazolja, hogy az $x \mapsto x^2$ függvény minden pontban folytonos.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell: van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |(x - x_0)(x + x_0)| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1),$$

ha $|x - x_0| \leq 1$.
Legyen $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}$. Ekkor, ha $|x - x_0| < \delta$ és $|x - x_0| \leq 1$, akkor $|x^2 - x_0^2| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1) < \varepsilon$. Végleges megoldás: legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right\}$. Ekkor $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

FELADAT

Igazolja, hogy az $x \mapsto x^2$ függvény minden pontban folytonos.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell: van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |(x - x_0)(x + x_0)| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1),$$

ha $|x - x_0| \leq 1$.
Legyen $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}$. Ekkor, ha $|x - x_0| < \delta$ és $|x - x_0| \leq 1$, akkor $|x^2 - x_0^2| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1) < \varepsilon$. Végleges megoldás: legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right\}$. Ekkor $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

FELADAT

Igazolja, hogy az $x \mapsto x^2$ függvény minden pontban folytonos.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell: van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |(x - x_0)(x + x_0)| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1)\,,$$

ha $|x - x_0| \leq 1$.
Legyen $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}$. Ekkor, ha $|x - x_0| < \delta$ és $|x - x_0| \leq 1$, akkor $|x^2 - x_0^2| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1) < \varepsilon$. Végleges megoldás: legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right\}$. Ekkor $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

FELADAT

Igazolja, hogy az $x \mapsto x^2$ függvény minden pontban folytonos.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell: van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |(x - x_0)(x + x_0)| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1),$$

ha $|x - x_0| \leq 1$.
Legyen $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}$. Ekkor, ha $|x - x_0| < \delta$ és $|x - x_0| \leq 1$, akkor $|x^2 - x_0^2| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1) < \varepsilon$. Végleges megoldás: legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right\}$. Ekkor $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

FELADAT

Igazolja, hogy az $x \mapsto x^2$ függvény minden pontban folytonos.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell: van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |(x - x_0)(x + x_0)| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1)\,,$$

ha $|x - x_0| \leq 1$.
Legyen $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}$. Ekkor, ha $|x - x_0| < \delta$ és $|x - x_0| \leq 1$, akkor $|x^2 - x_0^2| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1) < \varepsilon$. Végleges megoldás: legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right\}$. Ekkor $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

FELADAT

Igazolja, hogy az $x \mapsto x^2$ függvény minden pontban folytonos.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell: van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |(x - x_0)(x + x_0)| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1)\,,$$

ha $|x - x_0| \leq 1$.
Legyen $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}$. Ekkor, ha $|x - x_0| < \delta$ és $|x - x_0| \leq 1$, akkor $|x^2 - x_0^2| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1) < \varepsilon$. Végleges megoldás: legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right\}$. Ekkor $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

FELADAT

Igazolja, hogy az $x \mapsto x^2$ függvény minden pontban folytonos.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell: van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |(x - x_0)(x + x_0)| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1)\,,$$

ha $|x - x_0| \leq 1$.
Legyen $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}$. Ekkor, ha $|x - x_0| < \delta$ és $|x - x_0| \leq 1$, akkor $\left|x^2 - x_0^2\right| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1) < \varepsilon$. Végleges megoldás: legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right\}$. Ekkor $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

FELADAT

Igazolja, hogy az $x \mapsto x^2$ függvény minden pontban folytonos.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell: van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |(x - x_0)(x + x_0)| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1)\,,$$

ha $|x - x_0| \leq 1$.
Legyen $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}$. Ekkor, ha $|x - x_0| < \delta$ és $|x - x_0| \leq 1$, akkor $\left|x^2 - x_0^2\right| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1) < \varepsilon$. Végleges megoldás: legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right\}$. Ekkor $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

FELADAT

Igazolja, hogy az $x \mapsto x^2$ függvény minden pontban folytonos.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell: van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |(x - x_0)(x + x_0)| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1)\,,$$

ha $|x - x_0| \leq 1$.
Legyen $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}$. Ekkor, ha $|x - x_0| < \delta$ és $|x - x_0| \leq 1$, akkor $\left|x^2 - x_0^2\right| \leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1) < \varepsilon$. Végleges megoldás: legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right\}$. Ekkor $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f határértéke x_0-ban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

ÁLLÍTÁS

Egy f függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha itt van határértéke, és az éppen $f(x_0)$.

ÁLLÍTÁS

Egy f függvénynek legfeljebb egy határértéke van x_0-ban.

FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f határértéke x_0-ban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

ÁLLÍTÁS

Egy f függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha itt van határértéke, és az éppen $f(x_0)$.

ÁLLÍTÁS

Egy f függvénynek legfeljebb egy határértéke van x_0-ban.

FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f határértéke x_0-ban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

ÁLLÍTÁS

Egy f függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha itt van határértéke, és az éppen $f(x_0)$.

ÁLLÍTÁS

Egy f függvénynek legfeljebb egy határértéke van x_0-ban.

FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f határértéke x_0-ban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

ÁLLÍTÁS

Egy f függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha itt van határértéke, és az éppen $f(x_0)$.

ÁLLÍTÁS

Egy f függvénynek legfeljebb egy határértéke van x_0-ban.

FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f határértéke x_0-ban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

ÁLLÍTÁS

Egy f függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha itt van határértéke, és az éppen $f(x_0)$.

ÁLLÍTÁS

Egy f függvénynek legfeljebb egy határértéke van x_0-ban.

FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f határértéke x_0-ban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

ÁLLÍTÁS

Egy f függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha itt van határértéke, és az éppen $f(x_0)$.

ÁLLÍTÁS

Egy f függvénynek legfeljebb egy határértéke van x_0-ban.

FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

DEFINÍCIÓ

Az $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ha } x > 0, \\ 0, & \textit{ha } x = 0, \\ -1, & \textit{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvényt signum-függvénynek nevezzük.

FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

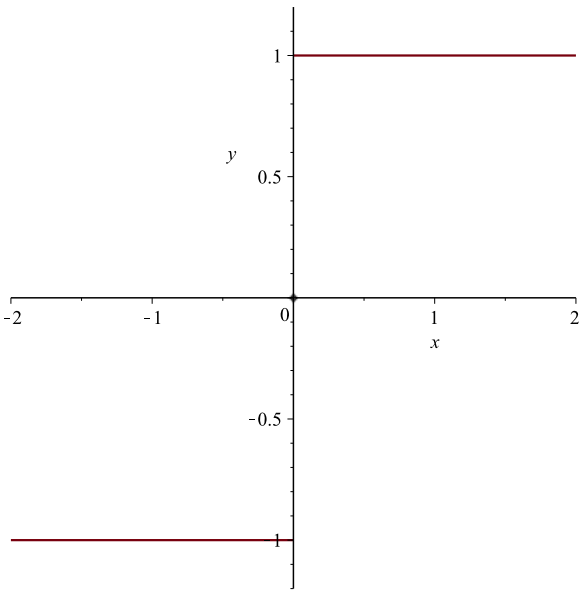


FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ függvény grafikonja

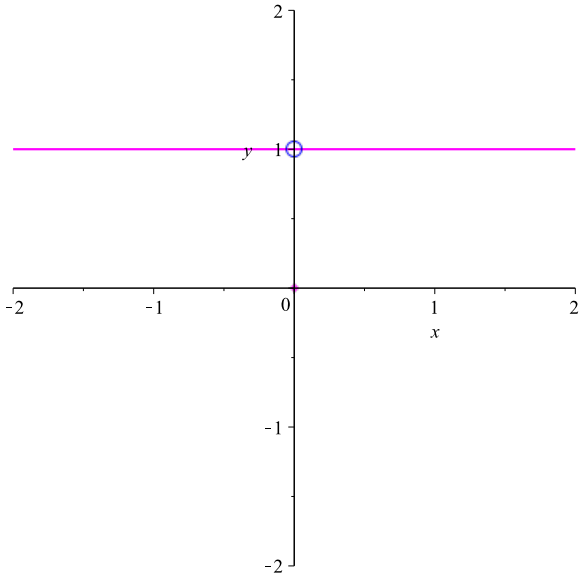


FIGURE: Az $x \mapsto |\operatorname{sgn}(x)|$ függvény grafikonja

AZ ÁTVITELI-ELV

TÉTEL

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ értelmezve x_0 egy környezetében. Ekkor f pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D$ sorozatra $f(x_n) \to f(x_0)$.

TÉTEL

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ értelmezve x_0 egy pontozott környezetében. Ekkor f-nek pontosan akkor határértéke x_0-ban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ sorozatra $f(x_n) \to f(x_0)$.

AZ ÁTVITELI-ELV

TÉTEL

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ értelmezve x_0 egy környezetében. Ekkor f pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D$ sorozatra $f(x_n) \to f(x_0)$.

TÉTEL

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ értelmezve x_0 egy pontozott környezetében. Ekkor f-nek pontosan akkor határértéke x_0-ban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ sorozatra $f(x_n) \to f(x_0)$.

AZ ÁTVITELI-ELV

TÉTEL

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ értelmezve x_0 egy környezetében. Ekkor f pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D$ sorozatra $f(x_n) \to f(x_0)$.

TÉTEL

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ értelmezve x_0 egy pontozott környezetében. Ekkor f-nek pontosan akkor határértéke x_0-ban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ sorozatra $f(x_n) \to f(x_0)$.

AZ ÁTVITELI-ELV

TÉTEL

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ értelmezve x_0 egy környezetében. Ekkor f pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D$ sorozatra $f(x_n) \to f(x_0)$.

TÉTEL

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ értelmezve x_0 egy pontozott környezetében. Ekkor f-nek pontosan akkor határértéke x_0-ban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $x_n \to x_0$, $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ sorozatra $f(x_n) \to f(x_0)$.

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) környezetében. Azt mondjuk, hogy f jobbról (balról) folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x \leq x_0$), akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha itt jobbról és balról is folytonos.

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) környezetében. Azt mondjuk, hogy f jobbról (balról) folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x \leq x_0$), akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha itt jobbról és balról is folytonos.

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) környezetében. Azt mondjuk, hogy f jobbról (balról) folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x \leq x_0$), akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha itt jobbról és balról is folytonos.

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) környezetében. Azt mondjuk, hogy f jobbról (balról) folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x \leq x_0$), akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha itt jobbról és balról is folytonos.

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) környezetében. Azt mondjuk, hogy f jobbról (balról) folytonos x_0-ban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x \leq x_0$), akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha itt jobbról és balról is folytonos.

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f határértéke x_0-ban jobbról (balról) $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$), akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ (illetve $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$).

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f **határértéke x_0-ban jobbról (balról) $A \in \mathbb{R}$**, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$), akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ (illetve $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$).*

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f **határértéke x_0-ban jobbról (balról) $A \in \mathbb{R}$**, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$), akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ (illetve $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$).*

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f **határértéke x_0-ban jobbról (balról) $A \in \mathbb{R}$**, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$), akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ (illetve $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$).*

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvénynek pontosan akkor van határértéke x_0-ban, ha itt van baloldali és jobboldali határértéke is, és ezek egyenlőek. Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban jobbról (balról), ha van x_0-ban jobboldali (baloldali) határértéke, és az $f(x_0)$.

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvénynek pontosan akkor van határértéke x_0-ban, ha itt van baloldali és jobboldali határértéke is, és ezek egyenlőek. Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban jobbról (balról), ha van x_0-ban jobboldali (baloldali) határértéke, és az $f(x_0)$.

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvénynek pontosan akkor van határértéke x_0-ban, ha itt van baloldali és jobboldali határértéke is, és ezek egyenlőek. Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban jobbról (balról), ha van x_0-ban jobboldali (baloldali) határértéke, és az $f(x_0)$.

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvénynek pontosan akkor van határértéke x_0-ban, ha itt van baloldali és jobboldali határértéke is, és ezek egyenlőek. Ekkor
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$.

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban jobbról (balról), ha van x_0-ban jobboldali (baloldali) határértéke, és az $f(x_0)$.

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvénynek pontosan akkor van határértéke x_0-ban, ha itt van baloldali és jobboldali határértéke is, és ezek egyenlőek. Ekkor
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$.

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban jobbról (balról), ha van x_0-ban jobboldali (baloldali) határértéke, és az $f(x_0)$.

FÜGGVÉNY FÉLOLDALI HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvénynek pontosan akkor van határértéke x_0-ban, ha itt van baloldali és jobboldali határértéke is, és ezek egyenlőek. Ekkor
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$.

ÁLLÍTÁS

Az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény pontosan akkor folytonos x_0-ban jobbról (balról), ha van x_0-ban jobboldali (baloldali) határértéke, és az $f(x_0)$.

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f **határértéke x_0-ban ∞** ($-\infty$), ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) > K$ ($f(x) < K$). Jele: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).*

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f **határértéke x_0-ban jobbról (balról) ∞**, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$), akkor $f(x) > K$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$).*

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f **határértéke x_0-ban ∞** ($-\infty$), ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) > K$ ($f(x) < K$). Jele: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).*

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f **határértéke x_0-ban jobbról (balról) ∞**, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$), akkor $f(x) > K$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$).*

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f **határértéke x_0-ban ∞** ($-\infty$), ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) > K$ ($f(x) < K$). Jele: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).*

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f **határértéke x_0-ban jobbról (balról) ∞**, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$), akkor $f(x) > K$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$).*

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f határértéke x_0-ban ∞ $(-\infty)$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) > K$ $(f(x) < K)$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty)$.

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0 egy jobboldali (baloldali) pontozott környezetében. Azt mondjuk, hogy f határértéke x_0-ban jobbról (balról) ∞, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$, akkor $f(x) > K$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ $(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty)$.

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

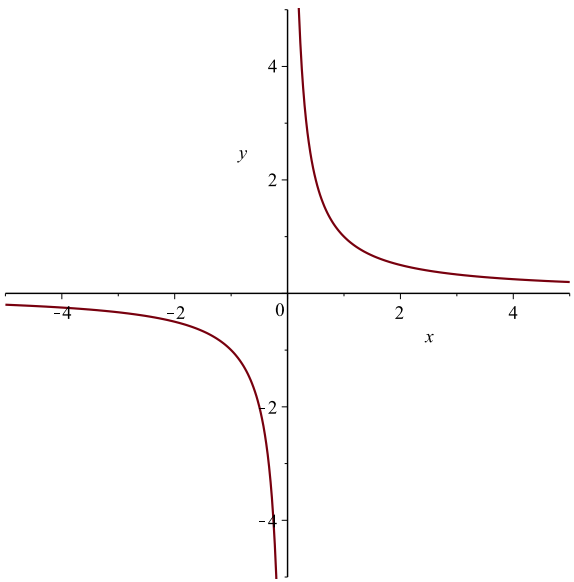


FIGURE: Az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény grafikonja

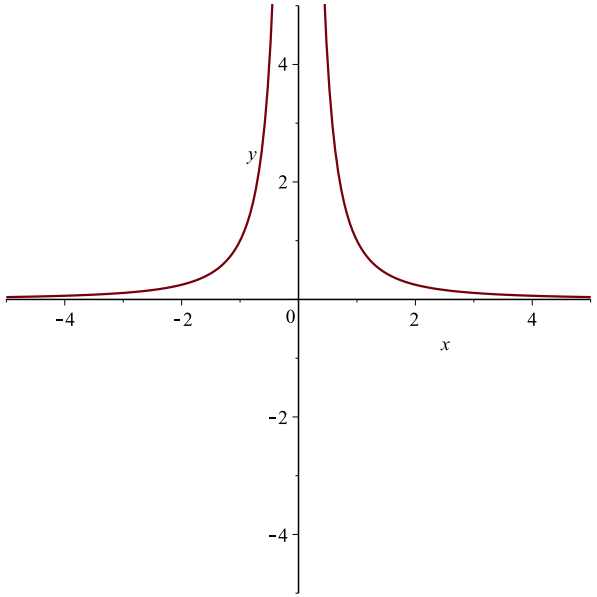


FIGURE: Az $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ függvény grafikonja

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

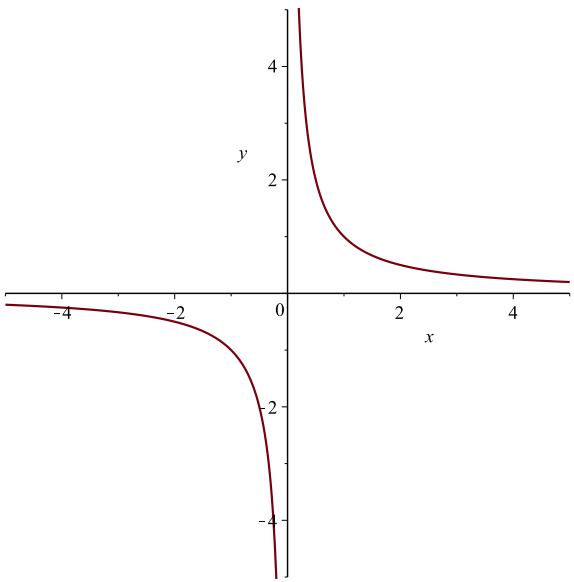


FIGURE: Az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény grafikonja

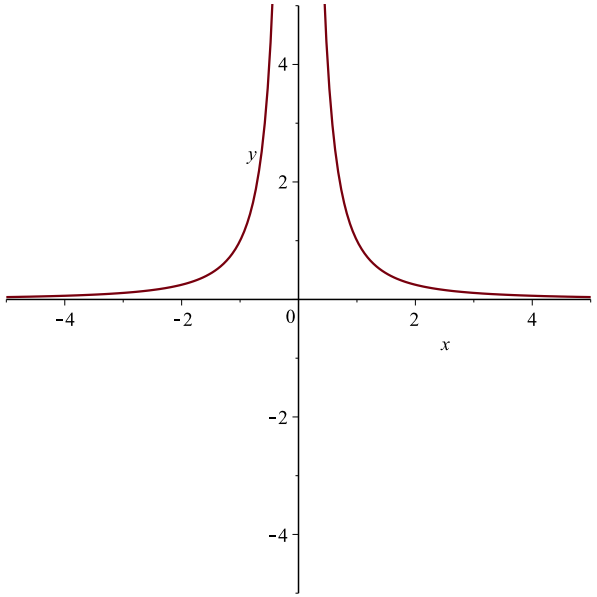


FIGURE: Az $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ függvény grafikonja

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

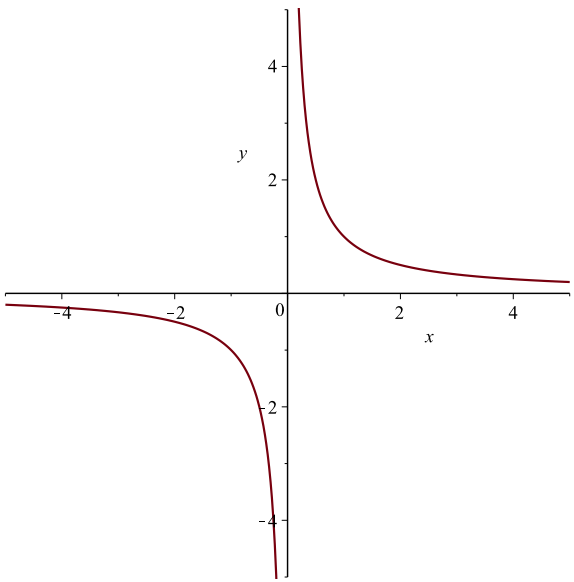


FIGURE: Az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény grafikonja

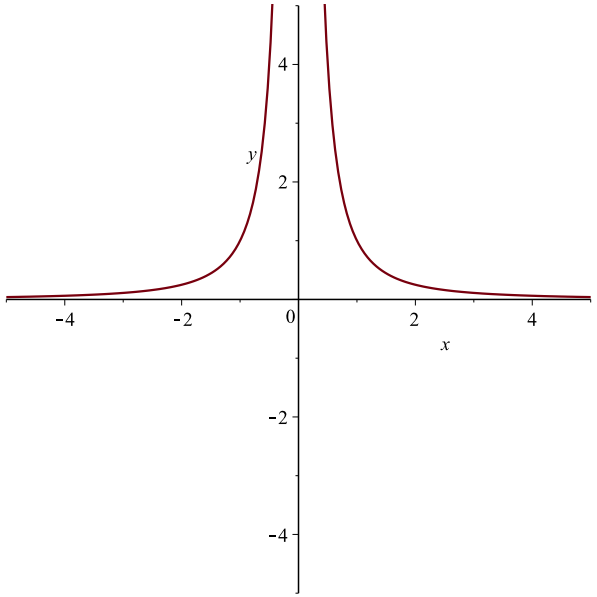


FIGURE: Az $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ függvény grafikonja

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

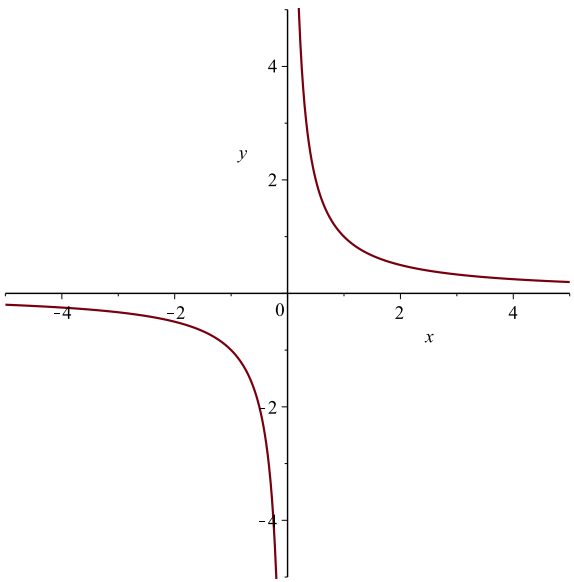


FIGURE: Az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény grafikonja

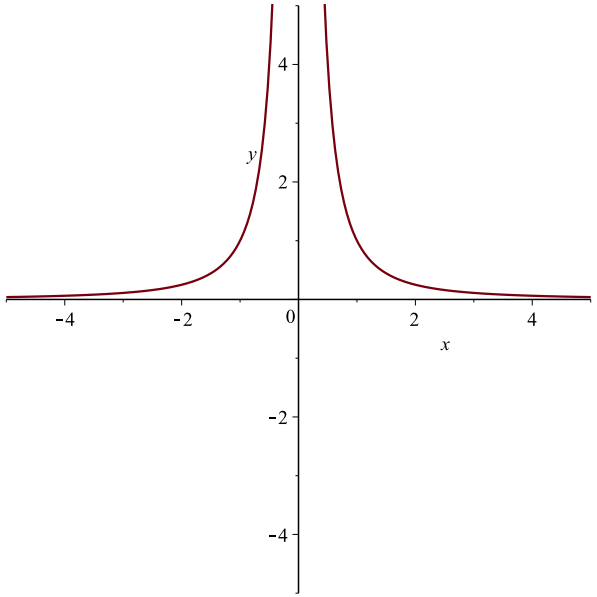


FIGURE: Az $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ függvény grafikonja

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van az (L_0, ∞) intervallumon valamely $L_0 \in \mathbb{R}$ esetén. Azt mondjuk, hogy f **határértéke ∞-ben $A \in \mathbb{R}$**, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy ha $x > L$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele:*
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van az (L_0, ∞) intervallumon valamely $L_0 \in \mathbb{R}$ esetén. Azt mondjuk, hogy f **határértéke ∞-ben ∞**, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy ha $x > L$, akkor $f(x) > K$. Jele:*
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van az (L_0, ∞) intervallumon valamely $L_0 \in \mathbb{R}$ esetén. Azt mondjuk, hogy f **határértéke ∞-ben $A \in \mathbb{R}$**, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy ha $x > L$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.*

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van az (L_0, ∞) intervallumon valamely $L_0 \in \mathbb{R}$ esetén. Azt mondjuk, hogy f **határértéke ∞-ben ∞**, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy ha $x > L$, akkor $f(x) > K$. Jele: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.*

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van az (L_0, ∞) intervallumon valamely $L_0 \in \mathbb{R}$ esetén. Azt mondjuk, hogy f **határértéke ∞-ben $A \in \mathbb{R}$**, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy ha $x > L$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jele:* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

DEFINÍCIÓ

*Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van az (L_0, ∞) intervallumon valamely $L_0 \in \mathbb{R}$ esetén. Azt mondjuk, hogy f **határértéke ∞-ben ∞**, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy ha $x > L$, akkor $f(x) > K$. Jele:* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

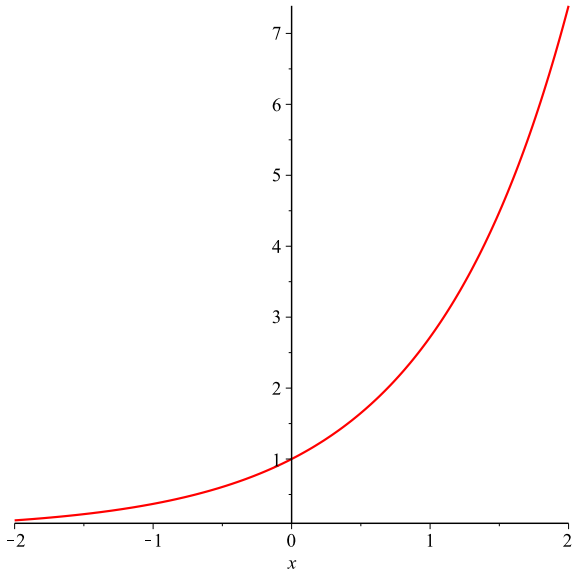


FIGURE: Az $x \mapsto e^x$ függvény grafikonja

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK

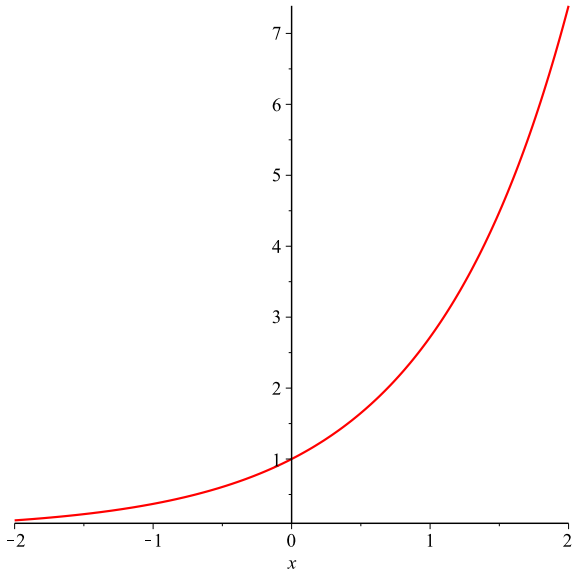


FIGURE: Az $x \mapsto e^x$ függvény grafikonja

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK: ÖSSZEFOGLALÁS

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$$

Itt:

$$\alpha \in \{x_0, x_0 + 0, x_0 - 0, \infty, -\infty\}, \quad \beta \in \{A, \infty, -\infty\}$$

Összesen 15-féle határértéktípus van

MEGJEGYZÉS

Mindegyik fenti határértéktípusra kimondható az átviteli-elv. Pongyolán fogalmazva: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ *pontosan akkor teljesül, ha minden* $x_n \to \alpha$ *sorozatra* $f(x_n) \to \beta$.

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK: ÖSSZEFOGLALÁS

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$$

Itt:

$$\alpha \in \{x_0, x_0 + 0, x_0 - 0, \infty, -\infty\}, \quad \beta \in \{A, \infty, -\infty\}$$

Összesen 15-féle határértéktípus van

MEGJEGYZÉS

Mindegyik fenti határértéktípusra kimondható az átviteli-elv. Pongyolán fogalmazva: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ *pontosan akkor teljesül, ha minden* $x_n \to \alpha$ *sorozatra* $f(x_n) \to \beta$.

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK: ÖSSZEFOGLALÁS

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$$

Itt:

$$\alpha \in \{x_0, x_0 + 0, x_0 - 0, \infty, -\infty\}, \quad \beta \in \{A, \infty, -\infty\}$$

Összesen 15-féle határértéktípus van

MEGJEGYZÉS

Mindegyik fenti határértéktípusra kimondható az átviteli-elv. Pongyolán fogalmazva: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ *pontosan akkor teljesül, ha minden* $x_n \to \alpha$ *sorozatra* $f(x_n) \to \beta$.

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK: ÖSSZEFOGLALÁS

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$$

Itt:

$$\alpha \in \{x_0, x_0 + 0, x_0 - 0, \infty, -\infty\}, \quad \beta \in \{A, \infty, -\infty\}$$

Összesen 15-féle határértéktípus van

MEGJEGYZÉS

Mindegyik fenti határértéktípusra kimondható az átviteli-elv. Pongyolán fogalmazva: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ *pontosan akkor teljesül, ha minden* $x_n \to \alpha$ *sorozatra* $f(x_n) \to \beta$.

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK: ÖSSZEFOGLALÁS

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$$

Itt:

$$\alpha \in \{x_0, x_0 + 0, x_0 - 0, \infty, -\infty\}, \quad \beta \in \{A, \infty, -\infty\}$$

Összesen 15-féle határértéktípus van

MEGJEGYZÉS

Mindegyik fenti határértéktípusra kimondható az átviteli-elv. Pongyolán fogalmazva: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ *pontosan akkor teljesül, ha minden* $x_n \to \alpha$ *sorozatra* $f(x_n) \to \beta$.

MÁS HATÁRÉRTÉKTÍPUSOK: ÖSSZEFOGLALÁS

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$$

Itt:

$$\alpha \in \{x_0, x_0 + 0, x_0 - 0, \infty, -\infty\}, \quad \beta \in \{A, \infty, -\infty\}$$

Összesen 15-féle határértéktípus van

MEGJEGYZÉS

Mindegyik fenti határértéktípusra kimondható az átviteli-elv. Pongyolán fogalmazva: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ *pontosan akkor teljesül, ha minden* $x_n \to \alpha$ *sorozatra* $f(x_n) \to \beta$.

VÉGES HATÁRÉRTÉK VISELKEDÉSE MŰVELETEKRE

TÉTEL

Ha f és g valós függvények, amelyeknek létezik véges határértéke valamely x_0 pontban, akkor az $f+g$, fg függvényeknek is létezik határértéke x_0-ban, és

$$\lim_{x\to x_0}(f+g) = \lim_{x\to x_0} f + \lim_{x\to x_0} g$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg) = \left(\lim_{x\to x_0} f\right)\left(\lim_{x\to x_0} g\right).$$

Ha továbbá létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre minden $0 < |x - x_0| < \alpha$ esetén $g(x) \neq 0$, valamint $\lim_{x\to x_0} g \neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to x_0} f}{\lim_{x\to x_0} g}.$$

Hasonló állítások igazak féloldali és végtelenbeli határértékre.

VÉGES HATÁRÉRTÉK VISELKEDÉSE MŰVELETEKRE

TÉTEL

Ha f és g valós függvények, amelyeknek létezik véges határértéke valamely x_0 pontban, akkor az $f+g, fg$ függvényeknek is létezik határértéke x_0-ban, és

$$\lim_{x\to x_0}(f+g) = \lim_{x\to x_0} f + \lim_{x\to x_0} g$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg) = \left(\lim_{x\to x_0} f\right)\left(\lim_{x\to x_0} g\right).$$

Ha továbbá létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre minden $0 < |x - x_0| < \alpha$ esetén $g(x) \neq 0$, valamint $\lim_{x\to x_0} g \neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to x_0} f}{\lim_{x\to x_0} g}.$$

Hasonló állítások igazak féloldali és végtelenbeli határértékre.

VÉGES HATÁRÉRTÉK VISELKEDÉSE MŰVELETEKRE

TÉTEL

Ha f és g valós függvények, amelyeknek létezik véges határértéke valamely x_0 pontban, akkor az $f+g, fg$ függvényeknek is létezik határértéke x_0-ban, és

$$\lim_{x\to x_0}(f+g) = \lim_{x\to x_0} f + \lim_{x\to x_0} g$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg) = \left(\lim_{x\to x_0} f\right)\left(\lim_{x\to x_0} g\right).$$

Ha továbbá létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre minden $0 < |x - x_0| < \alpha$ esetén $g(x) \neq 0$, valamint $\lim_{x\to x_0} g \neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to x_0} f}{\lim_{x\to x_0} g}.$$

Hasonló állítások igazak féloldali és végtelenbeli határértékre.

VÉGES HATÁRÉRTÉK VISELKEDÉSE MŰVELETEKRE

TÉTEL

Ha f és g valós függvények, amelyeknek létezik véges határértéke valamely x_0 pontban, akkor az $f+g, fg$ függvényeknek is létezik határértéke x_0-ban, és

$$\lim_{x\to x_0}(f+g) = \lim_{x\to x_0} f + \lim_{x\to x_0} g$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg) = \left(\lim_{x\to x_0} f\right)\left(\lim_{x\to x_0} g\right).$$

Ha továbbá létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre minden $0 < |x - x_0| < \alpha$ esetén $g(x) \neq 0$, valamint $\lim_{x\to x_0} g \neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to x_0} f}{\lim_{x\to x_0} g}.$$

Hasonló állítások igazak féloldali és végtelenbeli határértékre.

VÉGES HATÁRÉRTÉK VISELKEDÉSE MŰVELETEKRE

TÉTEL

Ha f és g valós függvények, amelyeknek létezik véges határértéke valamely x_0 pontban, akkor az $f+g, fg$ függvényeknek is létezik határértéke x_0-ban, és

$$\lim_{x\to x_0}(f+g) = \lim_{x\to x_0} f + \lim_{x\to x_0} g$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg) = \left(\lim_{x\to x_0} f\right)\left(\lim_{x\to x_0} g\right).$$

Ha továbbá létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre minden $0 < |x - x_0| < \alpha$ esetén $g(x) \neq 0$, valamint $\lim_{x\to x_0} g \neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to x_0} f}{\lim_{x\to x_0} g}.$$

Hasonló állítások igazak féloldali és végtelenbeli határértékre.

VÉGES HATÁRÉRTÉK VISELKEDÉSE MŰVELETEKRE

TÉTEL

Ha f és g valós függvények, amelyeknek létezik véges határértéke valamely x_0 pontban, akkor az $f+g, fg$ függvényeknek is létezik határértéke x_0-ban, és

$$\lim_{x\to x_0}(f+g) = \lim_{x\to x_0} f + \lim_{x\to x_0} g$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg) = \left(\lim_{x\to x_0} f\right)\left(\lim_{x\to x_0} g\right).$$

Ha továbbá létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre minden $0 < |x - x_0| < \alpha$ esetén $g(x) \neq 0$, valamint $\lim_{x\to x_0} g \neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to x_0} f}{\lim_{x\to x_0} g}.$$

Hasonló állítások igazak féloldali és végtelenbeli határértékre.

VÉGES HATÁRÉRTÉK VISELKEDÉSE MŰVELETEKRE

TÉTEL

Ha f és g valós függvények, amelyeknek létezik véges határértéke valamely x_0 pontban, akkor az $f+g, fg$ függvényeknek is létezik határértéke x_0-ban, és

$$\lim_{x\to x_0}(f+g) = \lim_{x\to x_0} f + \lim_{x\to x_0} g$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg) = \left(\lim_{x\to x_0} f\right)\left(\lim_{x\to x_0} g\right).$$

Ha továbbá létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre minden $0 < |x - x_0| < \alpha$ esetén $g(x) \neq 0$, valamint $\lim_{x\to x_0} g \neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to x_0} f}{\lim_{x\to x_0} g}.$$

Hasonló állítások igazak féloldali és végtelenbeli határértékre.

VÉGES HATÁRÉRTÉK VISELKEDÉSE MŰVELETEKRE

TÉTEL

Ha f és g valós függvények, amelyeknek létezik véges határértéke valamely x_0 pontban, akkor az $f+g, fg$ függvényeknek is létezik határértéke x_0-ban, és

$$\lim_{x\to x_0}(f+g) = \lim_{x\to x_0} f + \lim_{x\to x_0} g$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg) = \left(\lim_{x\to x_0} f\right)\left(\lim_{x\to x_0} g\right).$$

Ha továbbá létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre minden $0 < |x - x_0| < \alpha$ esetén $g(x) \neq 0$, valamint $\lim_{x\to x_0} g \neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to x_0} f}{\lim_{x\to x_0} g}.$$

Hasonló állítások igazak féloldali és végtelenbeli határértékre.

VÉGTELEN HATÁRÉRTÉK VISELKEDÉSE MŰVELETEKRE

TÉTEL

Ha f és g valós függvények, $\lim_{x\to x_0} f = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0} g \neq 0$, *akkor*

$$\lim_{x\to x_0}(f+g) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g} = \pm\infty.$$

MŰVELETEK FOLYTONOS FÜGGVÉNYEKKEL

A hatértértékre látott eredményekből rögtön következik:

TÉTEL

Ha az f és g valós függvények folytonosak x_0-ban, akkor ugyanez igaz az $f+g$ és fg függvényekre, valamint amennyiben $g(x_0) \neq 0$ akkor az $\frac{f}{g}$ függvényre is.

TÉTEL

Legyenek

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad g : D_g \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Tegyük fel, hogy $g \circ f$ értelmezési tartománya tartalmaz valamely intervallumot x_0 körül. Amennyiben f folytonos az x_0 pontban és g folytonos az $f(x_0)$ pontban, akkor $g \circ f$ is folytonos x_0-ban.

MŰVELETEK FOLYTONOS FÜGGVÉNYEKKEL

A hatértértékre látott eredményekből rögtön következik:

TÉTEL

Ha az f és g valós függvények folytonosak x_0-ban, akkor ugyanez igaz az $f+g$ és fg függvényekre, valamint amennyiben $g(x_0) \neq 0$ akkor az $\frac{f}{g}$ függvényre is.

TÉTEL

Legyenek

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad g : D_g \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Tegyük fel, hogy $g \circ f$ értelmezési tartománya tartalmaz valamely intervallumot x_0 körül. Amennyiben f folytonos az x_0 pontban és g folytonos az $f(x_0)$ pontban, akkor $g \circ f$ is folytonos x_0-ban.

MŰVELETEK FOLYTONOS FÜGGVÉNYEKKEL

A hatértértékre látott eredményekből rögtön következik:

TÉTEL

Ha az f és g valós függvények folytonosak x_0-ban, akkor ugyanez igaz az $f+g$ és fg függvényekre, valamint amennyiben $g(x_0) \neq 0$ akkor az $\frac{f}{g}$ függvényre is.

TÉTEL

Legyenek

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad g : D_g \to \mathbb{R}$$

valós függvények. Tegyük fel, hogy $g \circ f$ értelmezési tartománya tartalmaz valamely intervallumot x_0 körül. Amennyiben f folytonos az x_0 pontban és g folytonos az $f(x_0)$ pontban, akkor $g \circ f$ is folytonos x_0-ban.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

MEGJEGYZÉS

A sorozatoknál tanult nevezetes határértekek általában természetes módon kimondhatók függvényekre is.

MEGJEGYZÉS

A kritikus határértékek ugyanazok függvényhatárértékek esetén is.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

MEGJEGYZÉS

A sorozatoknál tanult nevezetes határértekek általában természetes módon kimondhatók függvényekre is.

MEGJEGYZÉS

A kritikus határértékek ugyanazok függvényhatárértékek esetén is.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

TÉTEL

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

ÁLLÍTÁS

Ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, *akkor*

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x).$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

TÉTEL

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

ÁLLÍTÁS

Ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, *akkor*

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x).$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

TÉTEL

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

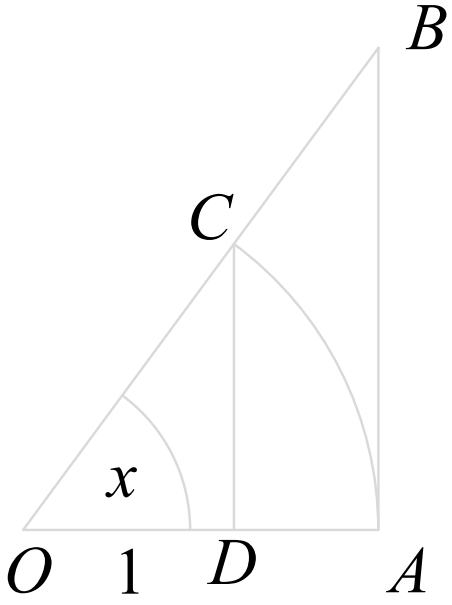
ÁLLÍTÁS

Ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, *akkor*

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x).$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

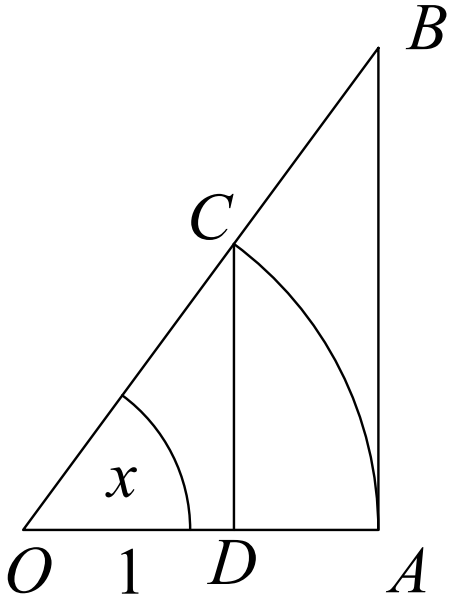
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

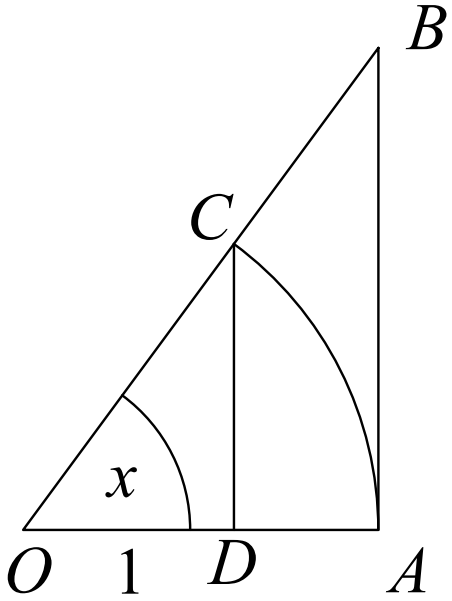
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

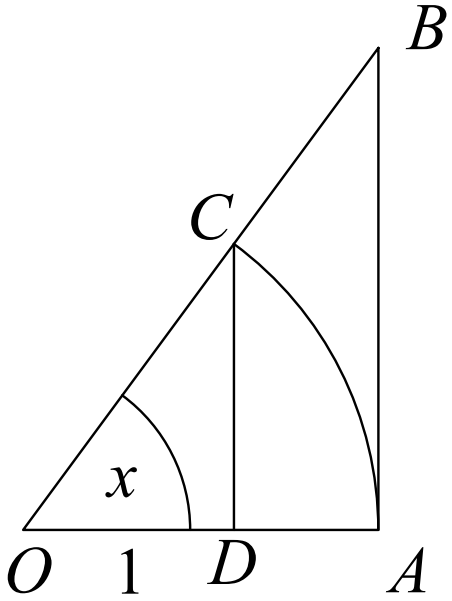
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

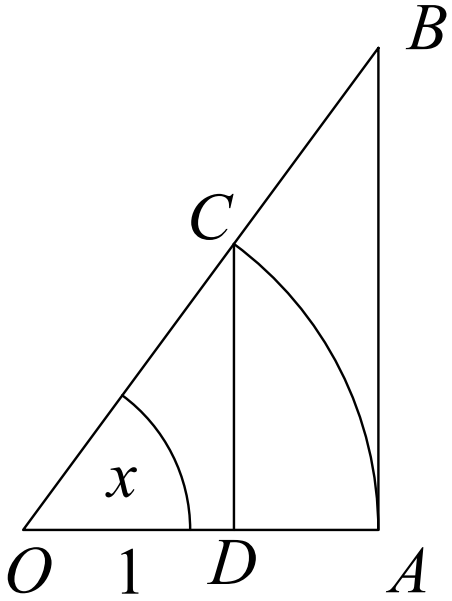
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

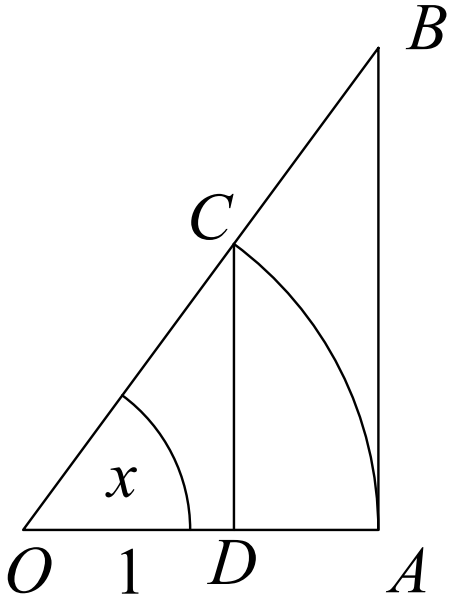
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

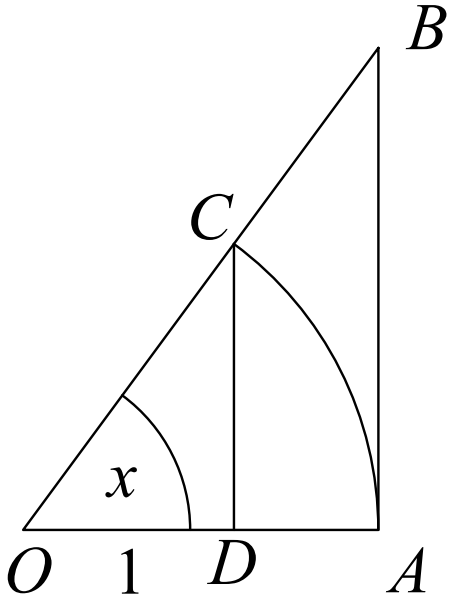
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

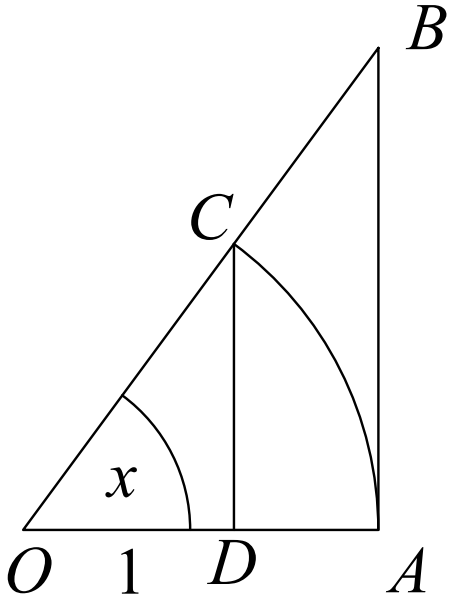
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

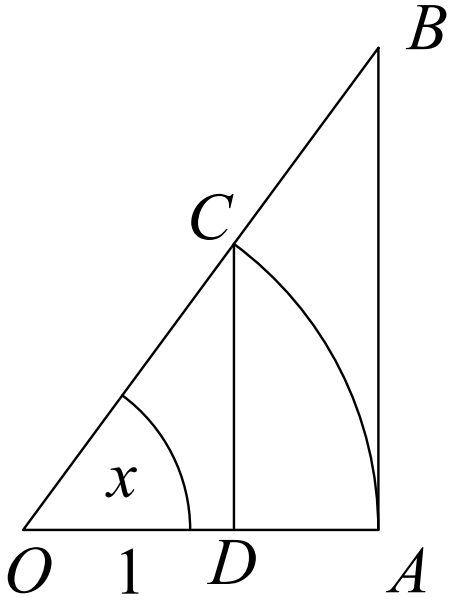
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

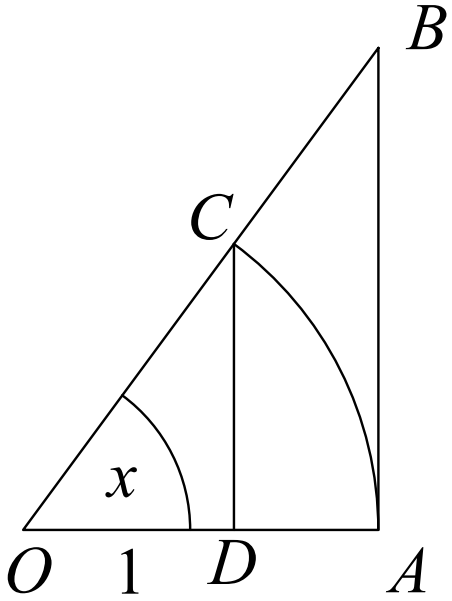
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

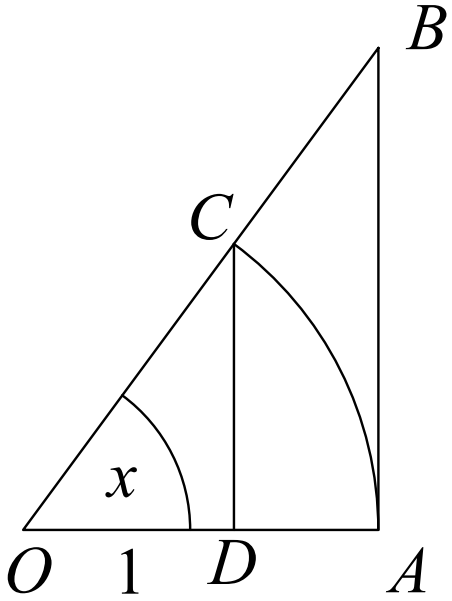
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

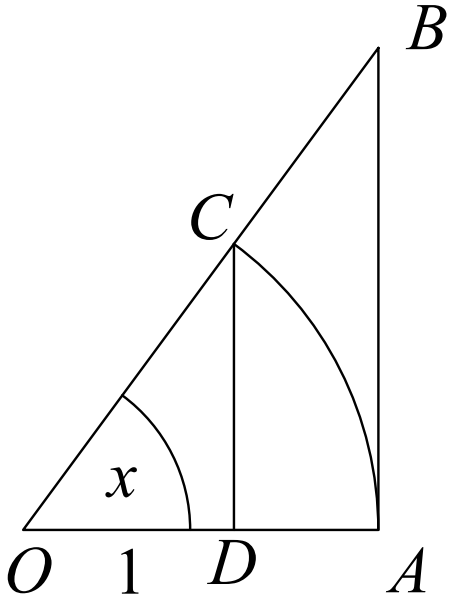
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

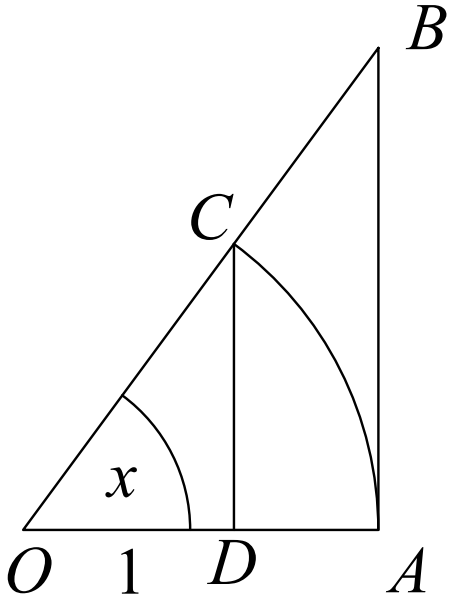
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

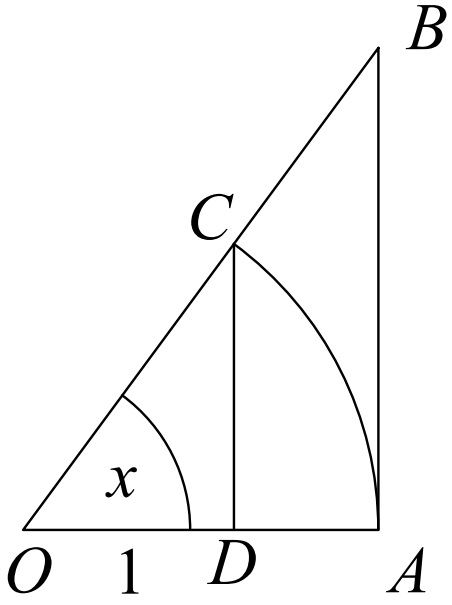
$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Bizonyítás.



$\overline{CD} = \sin(x)$, $\overline{AB} = \mathrm{tg}(x)$

Az OAC háromszög területe:

$T_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Az OAC körcikk területe:

$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2 \cdot x = \frac{x}{2}$.

Az OAB háromszög területe:

$T_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$.

De $T_1 < T_2 < T_3$, tehát

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Tétel bizonyítása.

Az állítás alapján, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

De ebből, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Mivel $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, ezért ez igaz $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ esetén is. De

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

tehát a rendőr-elv miatt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Tétel bizonyítása.

Az állítás alapján, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

De ebből, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Mivel $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, ezért ez igaz $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ esetén is. De

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

tehát a rendőr-elv miatt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Tétel bizonyítása.
Az állítás alapján, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

De ebből, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Mivel $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, ezért ez igaz $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ esetén is. De

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

tehát a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Tétel bizonyítása.
Az állítás alapján, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

De ebből, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Mivel $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, ezért ez igaz $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ esetén is. De

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

tehát a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Tétel bizonyítása.
Az állítás alapján, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

De ebből, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Mivel $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, ezért ez igaz $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ esetén is. De

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

tehát a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Tétel bizonyítása.
Az állítás alapján, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

De ebből, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Mivel $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, ezért ez igaz $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ esetén is. De

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

tehát a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Tétel bizonyítása.
Az állítás alapján, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

De ebből, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Mivel $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, ezért ez igaz $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ esetén is. De

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

tehát a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Tétel bizonyítása.
Az állítás alapján, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

De ebből, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Mivel $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, ezért ez igaz $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ esetén is. De

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

tehát a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Tétel bizonyítása.
Az állítás alapján, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

De ebből, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Mivel $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, ezért ez igaz $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ esetén is. De

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

tehát a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Tétel bizonyítása.
Az állítás alapján, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

De ebből, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Mivel $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, ezért ez igaz $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ esetén is. De

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

tehát a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Tétel bizonyítása.
Az állítás alapján, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

De ebből, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Mivel $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, ezért ez igaz $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ esetén is. De

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

tehát a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Tétel bizonyítása.
Az állítás alapján, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

De ebből, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Mivel $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, ezért ez igaz $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ esetén is. De

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

tehát a rendőr-elv miatt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0.$$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0.$$