11. ELŐADÁS: NEVEZETES FÜGGVÉNYEK, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

POLINOMFÜGGVÉNYEK

Ha $n \in \mathbb{N}$ és

$$a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R},$$

ahol $a_0 \neq 0$, akkor *n*-edfokú polinomfüggvénynek hívjuk az

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

függvényt. Tegyük fel, hogy $a_0 > 0$. Ekkor

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

valamint ha n páros akkor

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

míg ha n páratlan akkor

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

POLINOMFÜGGVÉNYEK

Ha $n \in \mathbb{N}$ és

$$a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R},$$

ahol $a_0 \neq 0$, akkor *n*-edfokú polinomfüggvénynek hívjuk az

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

függvényt. Tegyük fel, hogy $a_0 > 0$. Ekkor

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

valamint ha n páros akkor

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

míg ha n páratlan akkor

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

POLINOMFÜGGVÉNYEK

Ha $n \in \mathbb{N}$ és

$$a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R},$$

ahol $a_0 \neq 0$, akkor *n*-edfokú polinomfüggvénynek hívjuk az

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

függvényt. Tegyük fel, hogy $a_0 > 0$. Ekkor

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

valamint ha n páros akkor

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

míg ha n páratlan akkor

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

POLINOM-FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Minden polinomfüggvény $\mathbb{R}$-en folytonos.

Bizonyítás. A linearitás miatt elég belátni $f(x) = x^n$-re, ahol $n \geq 1$ egész szám (az $n = 0$ eset szerepelt a múlt órán). Legyen x_0 tetszőleges, és rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ értéket. Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{n\cdot(|x_0|+1)^{n-1}}, 1\right\} > 0$. Ekkor minden $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x| \leq |x_0| + 1$, és

$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0| \cdot \left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}\right| \leq$$

$$\leq |x-x_0|\cdot\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|x_0| + \ldots + |x_0|^{n-1}\right) \leq \delta\cdot n(|x_0|+1)^{n-1} \leq \varepsilon.$$

POLINOM-FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Minden polinomfüggvény $\mathbb{R}$-en folytonos.

Bizonyítás. A linearitás miatt elég belátni $f(x) = x^n$-re, ahol $n \geq 1$ egész szám (az $n = 0$ eset szerepelt a múlt órán). Legyen x_0 tetszőleges, és rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ értéket. Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{n\cdot(|x_0|+1)^{n-1}}, 1\right\} > 0$. Ekkor minden $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x| \leq |x_0| + 1$, és

$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0| \cdot \left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}\right| \leq$$

$$\leq |x-x_0|\cdot\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|x_0| + \ldots + |x_0|^{n-1}\right) \leq \delta\cdot n(|x_0|+1)^{n-1} \leq \varepsilon.$$

POLINOM-FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Minden polinomfüggvény $\mathbb{R}$-en folytonos.

Bizonyítás. A linearitás miatt elég belátni $f(x) = x^n$-re, ahol $n \geq 1$ egész szám (az $n = 0$ eset szerepelt a múlt órán). Legyen x_0 tetszőleges, és rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ értéket. Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{n\cdot(|x_0|+1)^{n-1}}, 1\right\} > 0$. Ekkor minden $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x| \leq |x_0| + 1$, és

$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0| \cdot \left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}\right| \leq$$

$$\leq |x-x_0|\cdot\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|x_0| + \ldots + |x_0|^{n-1}\right) \leq \delta\cdot n(|x_0|+1)^{n-1} \leq \varepsilon.$$

POLINOM-FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Minden polinomfüggvény $\mathbb{R}$-en folytonos.

Bizonyítás. A linearitás miatt elég belátni $f(x) = x^n$-re, ahol $n \geq 1$ egész szám (az $n = 0$ eset szerepelt a múlt órán). Legyen x_0 tetszőleges, és rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ értéket. Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{n\cdot(|x_0|+1)^{n-1}}, 1\right\} > 0$. Ekkor minden $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x| \leq |x_0| + 1$, és

$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0| \cdot \left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}\right| \leq$$

$$\leq |x-x_0|\cdot\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|x_0| + \ldots + |x_0|^{n-1}\right) \leq \delta\cdot n(|x_0|+1)^{n-1} \leq \varepsilon.$$

POLINOM-FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Minden polinomfüggvény $\mathbb{R}$-en folytonos.

Bizonyítás. A linearitás miatt elég belátni $f(x) = x^n$-re, ahol $n \geq 1$ egész szám (az $n = 0$ eset szerepelt a múlt órán). Legyen x_0 tetszőleges, és rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ értéket. Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{n\cdot(|x_0|+1)^{n-1}}, 1\right\} > 0$. Ekkor minden $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x| \leq |x_0| + 1$, és

$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0| \cdot \left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}\right| \leq$$

$$\leq |x-x_0|\cdot\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|x_0| + \ldots + |x_0|^{n-1}\right) \leq \delta\cdot n(|x_0|+1)^{n-1} \leq \varepsilon.$$

POLINOM-FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Minden polinomfüggvény $\mathbb{R}$-en folytonos.

Bizonyítás. A linearitás miatt elég belátni $f(x) = x^n$-re, ahol $n \geq 1$ egész szám (az $n = 0$ eset szerepelt a múlt órán). Legyen x_0 tetszőleges, és rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ értéket. Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{n\cdot(|x_0|+1)^{n-1}}, 1\right\} > 0$. Ekkor minden $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x| \leq |x_0| + 1$, és

$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0| \cdot \left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}\right| \leq$$

$$\leq |x-x_0|\cdot\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|x_0| + \ldots + |x_0|^{n-1}\right) \leq \delta\cdot n(|x_0|+1)^{n-1} \leq \varepsilon.$$

POLINOM-FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Minden polinomfüggvény $\mathbb{R}$-en folytonos.

Bizonyítás. A linearitás miatt elég belátni $f(x) = x^n$-re, ahol $n \geq 1$ egész szám (az $n = 0$ eset szerepelt a múlt órán). Legyen x_0 tetszőleges, és rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ értéket. Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{n\cdot(|x_0|+1)^{n-1}}, 1\right\} > 0$. Ekkor minden $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x| \leq |x_0| + 1$, és

$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0| \cdot \left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}\right| \leq$$

$$\leq |x-x_0|\cdot\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|x_0| + \ldots + |x_0|^{n-1}\right) \leq \delta\cdot n(|x_0|+1)^{n-1} \leq \varepsilon.$$

POLINOM-FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Minden polinomfüggvény $\mathbb{R}$-en folytonos.

Bizonyítás. A linearitás miatt elég belátni $f(x) = x^n$-re, ahol $n \geq 1$ egész szám (az $n = 0$ eset szerepelt a múlt órán). Legyen x_0 tetszőleges, és rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ értéket. Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{n\cdot(|x_0|+1)^{n-1}}, 1\right\} > 0$. Ekkor minden $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x| \leq |x_0| + 1$, és

$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0| \cdot \left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}\right| \leq$$

$$\leq |x-x_0|\cdot\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|x_0| + \ldots + |x_0|^{n-1}\right) \leq \delta\cdot n(|x_0|+1)^{n-1} \leq \varepsilon.$$

POLINOM-FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

Minden polinomfüggvény $\mathbb{R}$-en folytonos.

Bizonyítás. A linearitás miatt elég belátni $f(x) = x^n$-re, ahol $n \geq 1$ egész szám (az $n = 0$ eset szerepelt a múlt órán). Legyen x_0 tetszőleges, és rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ értéket. Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{n\cdot(|x_0|+1)^{n-1}}, 1\right\} > 0$. Ekkor minden $|x - x_0| < \delta$ esetén $|x| \leq |x_0| + 1$, és

$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0| \cdot \left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}\right| \leq$$

$$\leq |x-x_0|\cdot\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|x_0| + \ldots + |x_0|^{n-1}\right) \leq \delta\cdot n(|x_0|+1)^{n-1} \leq \varepsilon.$$

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK

Legyenek f, g polinomfüggvények:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$g(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k.$$

Feltesszük, hogy $b_0 \neq 0$, többek között g nem azonosan 0. Ekkor az

$$x \mapsto \frac{f}{g}$$

hányadost racionális törtfüggvénynek nevezzük.
A folytonos függvények hányadosára vonatkozó tétel miatt ekkor f/g folytonos minden olyan $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, ahol $g(x_0) \neq 0$.

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK

Legyenek f, g polinomfüggvények:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$g(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k.$$

Feltesszük, hogy $b_0 \neq 0$, többek között g nem azonosan 0. Ekkor az

$$x \mapsto \frac{f}{g}$$

hányadost racionális törtfüggvénynek nevezzük.
A folytonos függvények hányadosára vonatkozó tétel miatt ekkor f/g folytonos minden olyan $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, ahol $g(x_0) \neq 0$.

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK

Legyenek f, g polinomfüggvények:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$g(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k.$$

Feltesszük, hogy $b_0 \neq 0$, többek között g nem azonosan 0.
Ekkor az

$$x \mapsto \frac{f}{g}$$

hányadost racionális törtfüggvénynek nevezzük.
A folytonos függvények hányadosára vonatkozó tétel miatt ekkor f/g folytonos minden olyan $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, ahol $g(x_0) \neq 0$.

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK

Legyenek f, g polinomfüggvények:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$g(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k.$$

Feltesszük, hogy $b_0 \neq 0$, többek között g nem azonosan 0. Ekkor az

$$x \mapsto \frac{f}{g}$$

hányadost racionális törtfüggvénynek nevezzük.
A folytonos függvények hányadosára vonatkozó tétel miatt ekkor f/g folytonos minden olyan $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, ahol $g(x_0) \neq 0$.

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK

Legyenek f, g polinomfüggvények:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$g(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k.$$

Feltesszük, hogy $b_0 \neq 0$, többek között g nem azonosan 0. Ekkor az

$$x \mapsto \frac{f}{g}$$

hányadost racionális törtfüggvénynek nevezzük.
A folytonos függvények hányadosára vonatkozó tétel miatt ekkor f/g folytonos minden olyan $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, ahol $g(x_0) \neq 0$.

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

TÉTEL

Legyen $\frac{f}{g}$ racionális törtfüggvény, mint az előző oldalon.

- *Ha $n < k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = 0.$
- *Ha $n = k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = \frac{a_0}{b_0}.$
- *Ha $n > k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = sgn\left(\frac{a_0}{b_0}\right)\infty,$ *és*
  $\lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = sgn\left((-1)^{n-k}\frac{a_0}{b_0}\right)\infty.$

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

TÉTEL

Legyen $\frac{f}{g}$ racionális törtfüggvény, mint az előző oldalon.

- *Ha $n < k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = 0.$
- *Ha $n = k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = \frac{a_0}{b_0}.$
- *Ha $n > k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = sgn\left(\frac{a_0}{b_0}\right)\infty,$ *és*
  $\lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = sgn\left((-1)^{n-k}\frac{a_0}{b_0}\right)\infty.$

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

TÉTEL

Legyen $\frac{f}{g}$ racionális törtfüggvény, mint az előző oldalon.

- *Ha $n < k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = 0.$
- *Ha $n = k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = \frac{a_0}{b_0}.$
- *Ha $n > k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = sgn\left(\frac{a_0}{b_0}\right)\infty,$ *és*
  $\lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = sgn\left((-1)^{n-k}\frac{a_0}{b_0}\right)\infty.$

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

TÉTEL

Legyen $\frac{f}{g}$ racionális törtfüggvény, mint az előző oldalon.

- *Ha $n < k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = 0.$
- *Ha $n = k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = \frac{a_0}{b_0}.$
- *Ha $n > k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = sgn\left(\frac{a_0}{b_0}\right)\infty,$ *és*
  $\lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = sgn\left((-1)^{n-k}\frac{a_0}{b_0}\right)\infty.$

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

TÉTEL

Legyen $\frac{f}{g}$ racionális törtfüggvény, mint az előző oldalon.

- *Ha $n < k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = 0.$
- *Ha $n = k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = \frac{a_0}{b_0}.$
- *Ha $n > k$ akkor*
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = sgn\left(\frac{a_0}{b_0}\right)\infty,$ *és*
  $\lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = sgn\left((-1)^{n-k}\frac{a_0}{b_0}\right)\infty.$

HATVÁNYFÜGGVÉNYEK

Valamely rögzített $\alpha \in \mathbb{R}$ és változó $x \in \mathbb{R}_+$ esetén a

$$x \mapsto x^\alpha$$

függvényt hatványfüggvénynek nevezzük. Hasonlóan a polinomok esetéhez, megmutatható hogy minden hatványfüggvény folytonos $\mathbb{R}_+$-on.

ÁLLÍTÁS

- *Ha $\alpha > 0$ akkor a hatványfüggvény szigorúan monoton növekvő.*
- *Ha $\alpha = 0$ akkor a hatványfüggvény állandó.*
- *Ha $\alpha < 0$ akkor a hatványfüggvény szigorúan monoton csökkenő.*

Többek között, ha $\alpha \neq 0$ akkor a hatványfüggvény értékkészlete $\mathbb{R}_+$.

HATVÁNYFÜGGVÉNYEK

Valamely rögzített $\alpha \in \mathbb{R}$ és változó $x \in \mathbb{R}_+$ esetén a

$$x \mapsto x^\alpha$$

függvényt hatványfüggvénynek nevezzük. Hasonlóan a polinomok esetéhez, megmutatható hogy minden hatványfüggvény folytonos $\mathbb{R}_+$-on.

ÁLLÍTÁS

- *Ha $\alpha > 0$ akkor a hatványfüggvény szigorúan monoton növekvő.*
- *Ha $\alpha = 0$ akkor a hatványfüggvény állandó.*
- *Ha $\alpha < 0$ akkor a hatványfüggvény szigorúan monoton csökkenő.*

Többek között, ha $\alpha \neq 0$ akkor a hatványfüggvény értékkészlete $\mathbb{R}_+$.

HATVÁNYFÜGGVÉNYEK

Valamely rögzített $\alpha \in \mathbb{R}$ és változó $x \in \mathbb{R}_+$ esetén a

$$x \mapsto x^\alpha$$

függvényt hatványfüggvénynek nevezzük. Hasonlóan a polinomok esetéhez, megmutatható hogy minden hatványfüggvény folytonos $\mathbb{R}_+$-on.

ÁLLÍTÁS

- *Ha $\alpha > 0$ akkor a hatványfüggvény szigorúan monoton növekvő.*
- *Ha $\alpha = 0$ akkor a hatványfüggvény állandó.*
- *Ha $\alpha < 0$ akkor a hatványfüggvény szigorúan monoton csökkenő.*

Többek között, ha $\alpha \neq 0$ akkor a hatványfüggvény értékkészlete $\mathbb{R}_+$.

HATVÁNYFÜGGVÉNYEK

Valamely rögzített $\alpha \in \mathbb{R}$ és változó $x \in \mathbb{R}_+$ esetén a

$$x \mapsto x^\alpha$$

függvényt hatványfüggvénynek nevezzük. Hasonlóan a polinomok esetéhez, megmutatható hogy minden hatványfüggvény folytonos $\mathbb{R}_+$-on.

ÁLLÍTÁS

- *Ha $\alpha > 0$ akkor a hatványfüggvény szigorúan monoton növekvő.*
- *Ha $\alpha = 0$ akkor a hatványfüggvény állandó.*
- *Ha $\alpha < 0$ akkor a hatványfüggvény szigorúan monoton csökkenő.*

Többek között, ha $\alpha \neq 0$ akkor a hatványfüggvény értékkészlete $\mathbb{R}_+$.

HATVÁNYFÜGGVÉNYEK

Valamely rögzített $\alpha \in \mathbb{R}$ és változó $x \in \mathbb{R}_+$ esetén a

$$x \mapsto x^\alpha$$

függvényt hatványfüggvénynek nevezzük. Hasonlóan a polinomok esetéhez, megmutatható hogy minden hatványfüggvény folytonos $\mathbb{R}_+$-on.

ÁLLÍTÁS

- *Ha $\alpha > 0$ akkor a hatványfüggvény szigorúan monoton növekvő.*
- *Ha $\alpha = 0$ akkor a hatványfüggvény állandó.*
- *Ha $\alpha < 0$ akkor a hatványfüggvény szigorúan monoton csökkenő.*

Többek között, ha $\alpha \neq 0$ akkor a hatványfüggvény értékkészlete $\mathbb{R}_+$.

HATVÁNYFÜGGVÉNYEK

Valamely rögzített $\alpha \in \mathbb{R}$ és változó $x \in \mathbb{R}_+$ esetén a

$$x \mapsto x^\alpha$$

függvényt hatványfüggvénynek nevezzük. Hasonlóan a polinomok esetéhez, megmutatható hogy minden hatványfüggvény folytonos $\mathbb{R}_+$-on.

ÁLLÍTÁS

- *Ha $\alpha > 0$ akkor a hatványfüggvény szigorúan monoton növekvő.*
- *Ha $\alpha = 0$ akkor a hatványfüggvény állandó.*
- *Ha $\alpha < 0$ akkor a hatványfüggvény szigorúan monoton csökkenő.*

Többek között, ha $\alpha \neq 0$ akkor a hatványfüggvény értékkészlete $\mathbb{R}_+$.

HATVÁNYFÜGGVÉNYEK

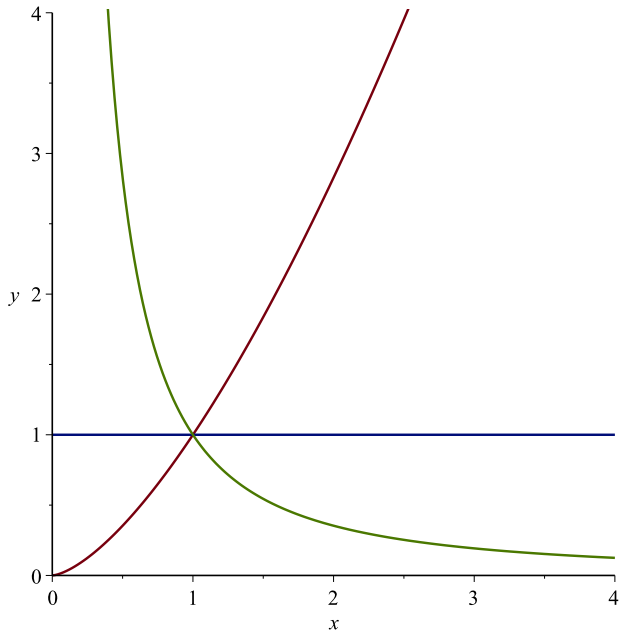

FIGURE: Az $x \mapsto x^{\alpha}$ függvény grafikonja $\alpha = -1,5; 0; 1,5$ esetén

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYEK

Rögzítsünk valamely $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ értéket. Ekkor a

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

függvényt *a alapú exponenciális függvénynek* hívjuk.

ÁLLÍTÁS

Az a alapú exponenciális függvény folytonos, és értékkészlete $\mathbb{R}_+$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYEK

Rögzítsünk valamely $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ értéket. Ekkor a

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

függvényt *a alapú exponenciális függvénynek* hívjuk.

ÁLLÍTÁS

Az a alapú exponenciális függvény folytonos, és értékkészlete $\mathbb{R}_+$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYEK

Rögzítsünk valamely $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ értéket. Ekkor a

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

függvényt *a alapú exponenciális függvénynek* hívjuk.

ÁLLÍTÁS

Az a alapú exponenciális függvény folytonos, és értékkészlete $\mathbb{R}_+$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Minden a esetén $a^0 = 1$.

- *Ha* $a > 1$ *akkor az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, és*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

- *Ha* $a < 1$ *akkor az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő, és*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Minden a esetén $a^0 = 1$.

- *Ha* $a > 1$ *akkor az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, és*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

- *Ha* $a < 1$ *akkor az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő, és*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Minden a esetén $a^0 = 1$.

- *Ha* $a > 1$ *akkor az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, és*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

- *Ha* $a < 1$ *akkor az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő, és*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0.$$

LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK

Rögzítsünk ismét valamely $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ értéket. A fent látottak miatt ekkor az

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

exponenciális függvény bijektív, így létezik inverz függvénye. Ezt a függvényt az *a* alapú logaritmus függvénynek nevezzük:

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$

és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK

Rögzítsünk ismét valamely $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ értéket. A fent látottak miatt ekkor az

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

exponenciális függvény bijektív, így létezik inverz függvénye. Ezt a függvényt az *a* alapú logaritmus függvénynek nevezzük:

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$

és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK

Rögzítsünk ismét valamely $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ értéket. A fent látottak miatt ekkor az

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

exponenciális függvény bijektív, így létezik inverz függvénye. Ezt a függvényt az *a* alapú logaritmus függvénynek nevezzük:

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$

és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK

Rögzítsünk ismét valamely $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ értéket. A fent látottak miatt ekkor az

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

exponenciális függvény bijektív, így létezik inverz függvénye. Ezt a függvényt az *a* alapú logaritmus függvénynek nevezzük:

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$

és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK

Rögzítsünk ismét valamely $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ értéket. A fent látottak miatt ekkor az

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

exponenciális függvény bijektív, így létezik inverz függvénye. Ezt a függvényt az *a* alapú logaritmus függvénynek nevezzük:

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$

és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK

Rögzítsünk ismét valamely $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ értéket. A fent látottak miatt ekkor az

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

exponenciális függvény bijektív, így létezik inverz függvénye. Ezt a függvényt az *a* alapú logaritmus függvénynek nevezzük:

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$

és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

JELÖLÉS

$$\log_e(x) = \ln(x), \log_{10}(x) = \lg(x)$$

ÁLLÍTÁS

Minden a esetén $\log_a(1) = 0$ *és* $\log_a$ *folytonos* $\mathbb{R}_+$*-on.*

- *Ha* $a > 1$ *akkor az a alapú logaritmus-függvény szigorúan monoton növekvő, és*

$$\lim_{x \to 0+0} \log_a(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

- *Ha* $a < 1$ *akkor az a alapú logaritmus-függvény szigorúan monoton csökkenő, és*

$$\lim_{x \to 0+0} \log_a(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty.$$

LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

JELÖLÉS

$$\log_e(x) = \ln(x), \log_{10}(x) = \lg(x)$$

ÁLLÍTÁS

Minden a esetén $\log_a(1) = 0$ *és* $\log_a$ *folytonos* $\mathbb{R}_+$*-on.*

- *Ha* $a > 1$ *akkor az a alapú logaritmus-függvény szigorúan monoton növekvő, és*

$$\lim_{x \to 0+0} \log_a(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

- *Ha* $a < 1$ *akkor az a alapú logaritmus-függvény szigorúan monoton csökkenő, és*

$$\lim_{x \to 0+0} \log_a(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty.$$

LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

JELÖLÉS

$$\log_e(x) = \ln(x), \log_{10}(x) = \lg(x)$$

ÁLLÍTÁS

Minden a esetén $\log_a(1) = 0$ *és* $\log_a$ *folytonos* $\mathbb{R}_+$*-on.*

- *Ha* $a > 1$ *akkor az a alapú logaritmus-függvény szigorúan monoton növekvő, és*

$$\lim_{x \to 0+0} \log_a(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

- *Ha* $a < 1$ *akkor az a alapú logaritmus-függvény szigorúan monoton csökkenő, és*

$$\lim_{x \to 0+0} \log_a(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

Legyen $x \in \mathbb{R}$, ahol x-re úgy gondolunk, mint egy szög radiánban mért mértékére. Ekkor a

$$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

függvényeket elemi szögfüggvényeknek nevezzük.

ÁLLÍTÁS

- *A* $\sin(x), \cos(x)$ *függvények* 2π *szerint periodikusak.*
- $\sin$ *páratlan,* $\cos$ *páros.*
- *A* $\operatorname{tg}(x)$ *és* $\operatorname{ctg}(x)$ *függvények* π *szerint periodikusak, és értelmezési tartományuk rendre*

$$\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}\pi + \frac{\pi}{2}), \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi.$$

- tg *és* ctg *páratlanok.*

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

Legyen $x \in \mathbb{R}$, ahol x-re úgy gondolunk, mint egy szög radiánban mért mértékére. Ekkor a

$$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

függvényeket elemi szögfüggvényeknek nevezzük.

ÁLLÍTÁS

- *A* $\sin(x), \cos(x)$ *függvények* 2π *szerint periodikusak.*
- $\sin$ *páratlan,* $\cos$ *páros.*
- *A* $\operatorname{tg}(x)$ *és* $\operatorname{ctg}(x)$ *függvények* π *szerint periodikusak, és értelmezési tartományuk rendre*

$$\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}\pi + \frac{\pi}{2}), \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi.$$

- tg *és* ctg *páratlanok.*

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

Legyen $x \in \mathbb{R}$, ahol x-re úgy gondolunk, mint egy szög radiánban mért mértékére. Ekkor a

$$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \mathrm{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

függvényeket elemi szögfüggvényeknek nevezzük.

ÁLLÍTÁS

- *A* $\sin(x), \cos(x)$ *függvények* 2π *szerint periodikusak.*
- $\sin$ *páratlan,* $\cos$ *páros.*
- *A* $\mathrm{tg}(x)$ *és* $\mathrm{ctg}(x)$ *függvények* π *szerint periodikusak, és értelmezési tartományuk rendre*

$$\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}\pi + \frac{\pi}{2}), \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi.$$

- tg *és* ctg *páratlanok.*

SZÖGFÜGGVÉNYEK MONOTONITÁSA ÉS FOLYTONOSSÁGA

ÁLLÍTÁS

- *A* $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ *függvények értelmezési tartományukon folytonosak.*
- $\sin$ *szigorúan monoton növekvő a* $[-\pi/2, \pi/2]$ *intervallumon,* $[-1, 1]$ *értékkészlettel.*
- $\cos$ *szigorúan monoton csökkenő a* $[0, \pi]$ *intervallumon,* $[-1, 1]$ *értékkészlettel.*
- tg *szigorúan monoton növekvő a* $(-\pi/2, \pi/2)$ *intervallumon,* $\mathbb{R}$ *értékkészlettel.*
- ctg *szigorúan monoton csökkenő a* $(0, \pi)$ *intervallumon,* $\mathbb{R}$ *értékkészlettel.*

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI: CIKLOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

Az $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ arkusz szinusz függvény a $\sin$ függvény $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumra való megszorításának inverz függvénye.

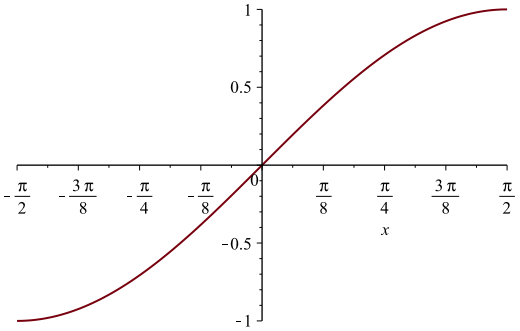

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ függvény grafikonja

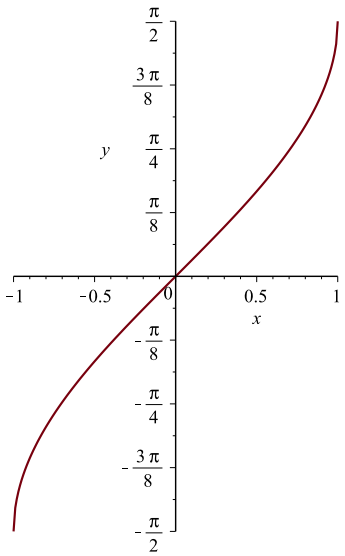

FIGURE: Az $x \mapsto \arcsin(x)$ függvény grafikonja

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI: CIKLOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

Az arcsin : $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ arkusz szinusz függvény a sin függvény $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumra való megszorításának inverz függvénye.

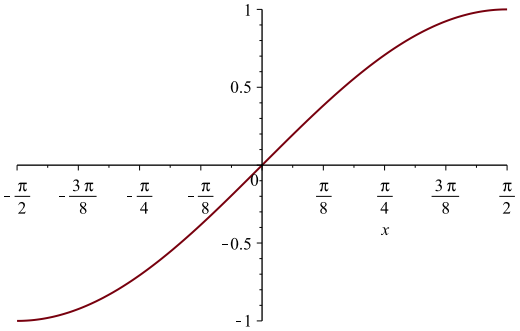

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ függvény grafikonja

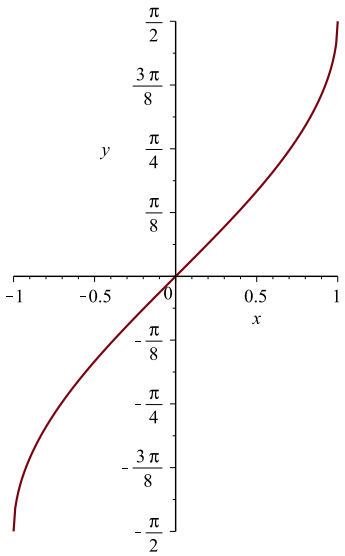

FIGURE: Az $x \mapsto \arcsin(x)$ függvény grafikonja

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

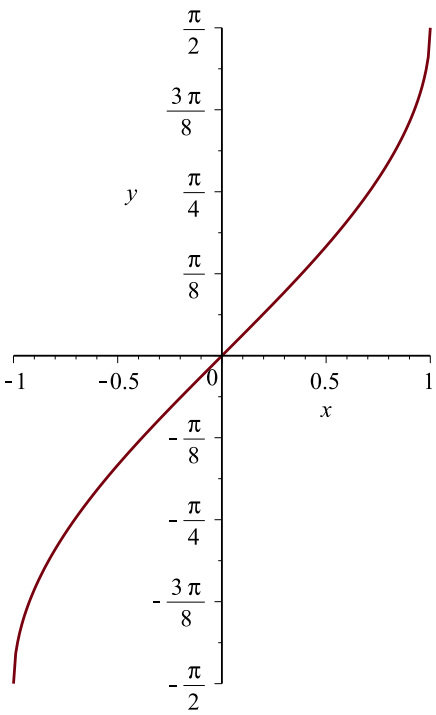

FIGURE: Az $x \mapsto \arcsin(x)$ függvény grafikonja

Az arcsin függvény

1. folytonos $[-1, 1]$-en,
2. itt szigorúan növő,
3. értékkészlete $[-\pi/2, \pi/2]$,
4. páratlan, nem periódikus.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

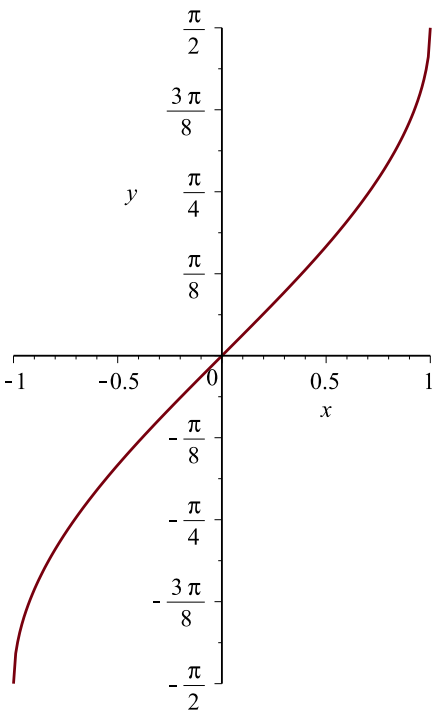

FIGURE: Az $x \mapsto \arcsin(x)$ függvény grafikonja

Az arcsin függvény

1. folytonos $[-1, 1]$-en,
2. itt szigorúan növő,
3. értékkészlete $[-\pi/2, \pi/2]$,
4. páratlan, nem periódikus.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

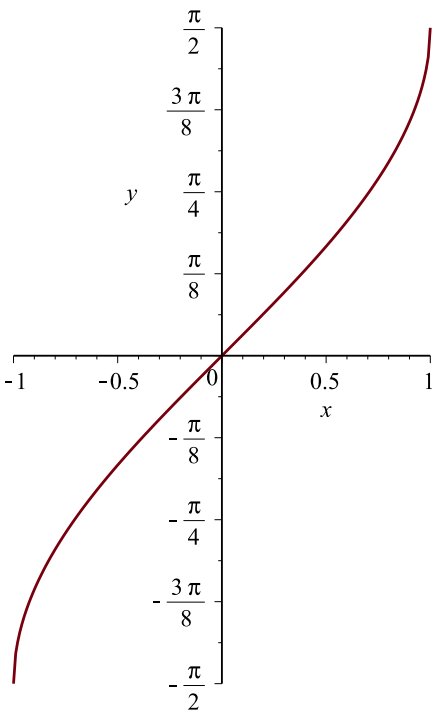

FIGURE: Az $x \mapsto \arcsin(x)$ függvény grafikonja

Az arcsin függvény

1. folytonos $[-1, 1]$-en,
2. itt szigorúan növő,
3. értékkészlete $[-\pi/2, \pi/2]$,
4. páratlan, nem periódikus.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

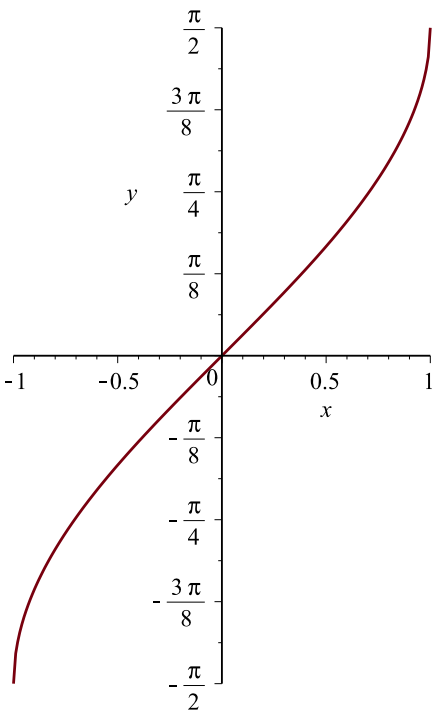

FIGURE: Az $x \mapsto \arcsin(x)$ függvény grafikonja

Az arcsin függvény

1. folytonos $[-1, 1]$-en,
2. itt szigorúan növő,
3. értékkészlete $[-\pi/2, \pi/2]$,
4. páratlan, nem periódikus.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

- Az
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
arkusz koszinusz függvény a cos függvény $[0, \pi]$ intervallumra való megszorításának inverz függvénye.
- Az
$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$
arkusz tangens függvény a tg függvény $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumra való megszorításának inverz függvénye.
- Az
$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$
arkusz kotangens függvény a ctg függvény $(0, \pi)$ intervallumra való megszorításának inverz függvénye.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

- Az
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
arkusz koszinusz függvény a cos függvény $[0, \pi]$ intervallumra való megszorításának inverz függvénye.
- Az
$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$
arkusz tangens függvény a tg függvény $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumra való megszorításának inverz függvénye.
- Az
$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$
arkusz kotangens függvény a ctg függvény $(0, \pi)$ intervallumra való megszorításának inverz függvénye.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

- Az
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
arkusz koszinusz függvény a $\cos$ függvény $[0, \pi]$ intervallumra való megszorításának inverz függvénye.
- Az
$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$
arkusz tangens függvény a tg függvény $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumra való megszorításának inverz függvénye.
- Az
$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$
arkusz kotangens függvény a ctg függvény $(0, \pi)$ intervallumra való megszorításának inverz függvénye.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

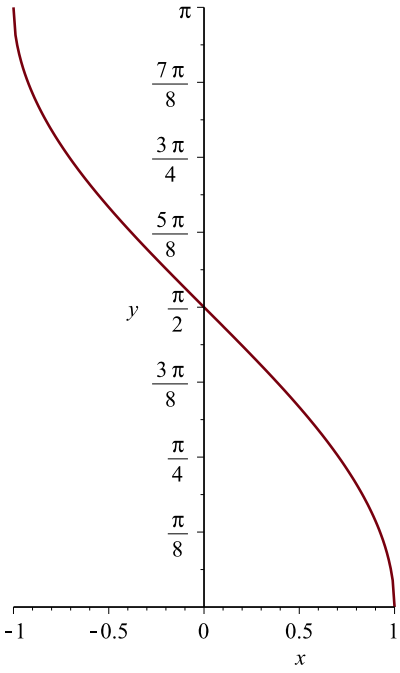

FIGURE: Az $x \mapsto \arccos(x)$ függvény grafikonja

Az arccos függvény

1. folytonos $[-1, 1]$-en,
2. itt szigorúan csökken,
3. értékkészlete $[0, \pi]$,
4. nem páros, nem páratlan, nem periódikus.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

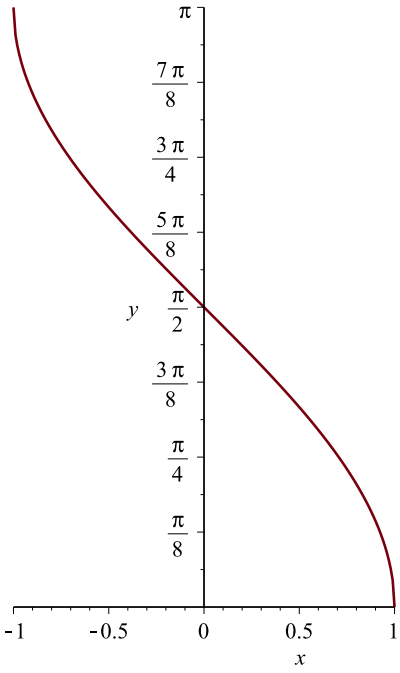

FIGURE: Az $x \mapsto \arccos(x)$ függvény grafikonja

Az arccos függvény

1. folytonos $[-1, 1]$-en,
2. itt szigorúan csökken,
3. értékkészlete $[0, \pi]$,
4. nem páros, nem páratlan, nem periódikus.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

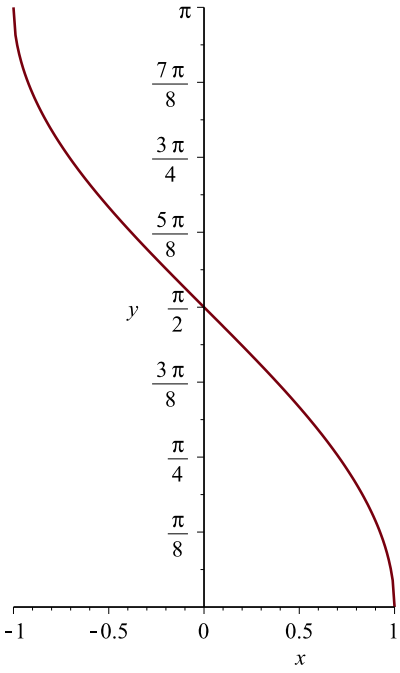

FIGURE: Az $x \mapsto \arccos(x)$ függvény grafikonja

Az arccos függvény

1. folytonos $[-1, 1]$-en,
2. itt szigorúan csökken,
3. értékkészlete $[0, \pi]$,
4. nem páros, nem páratlan, nem periódikus.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

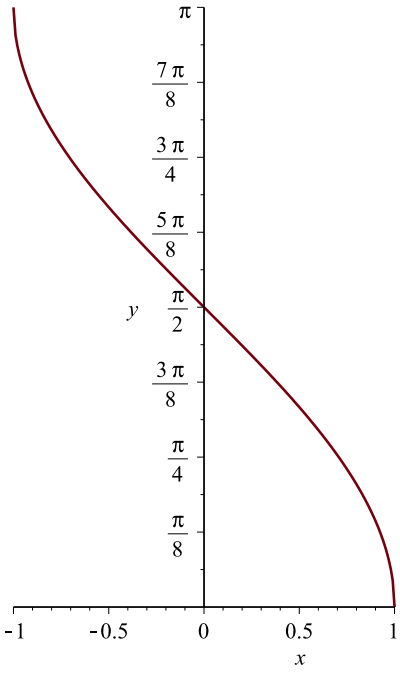

FIGURE: Az $x \mapsto \arccos(x)$ függvény grafikonja

Az arccos függvény

1. folytonos $[-1, 1]$-en,
2. itt szigorúan csökken,
3. értékkészlete $[0, \pi]$,
4. nem páros, nem páratlan, nem periódikus.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

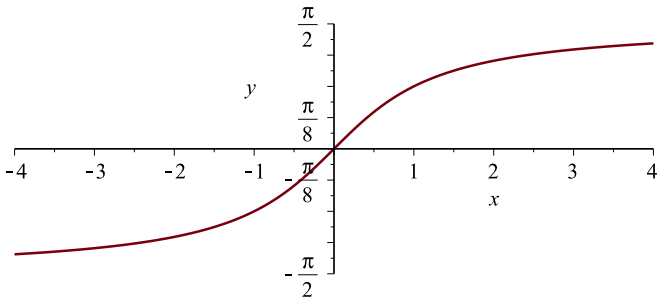

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ függvény grafikonja

Az arctg függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. itt szigorúan növő,
3. értékkészlete $(-\pi/2, \pi/2)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$,
6. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

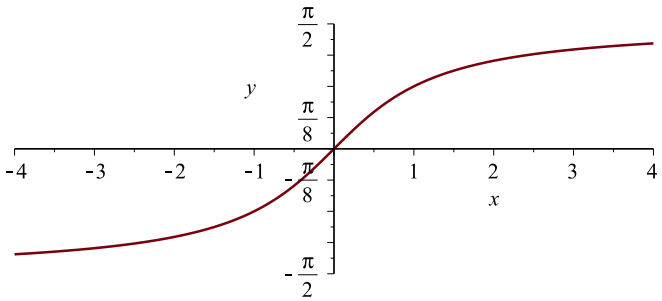

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ függvény grafikonja

Az arctg függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. itt szigorúan növő,
3. értékkészlete $(-\pi/2, \pi/2)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$,
6. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

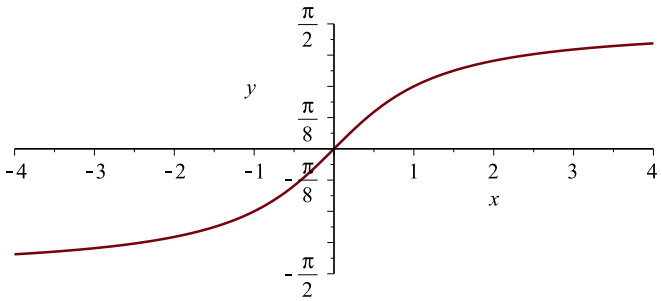

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ függvény grafikonja

Az arctg függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. itt szigorúan növő,
3. értékkészlete $(-\pi/2, \pi/2)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$,
6. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

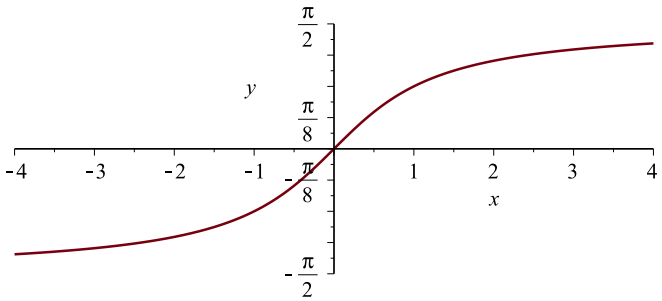

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ függvény grafikonja

Az arctg függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. itt szigorúan növő,
3. értékkészlete $(-\pi/2, \pi/2)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$,
6. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

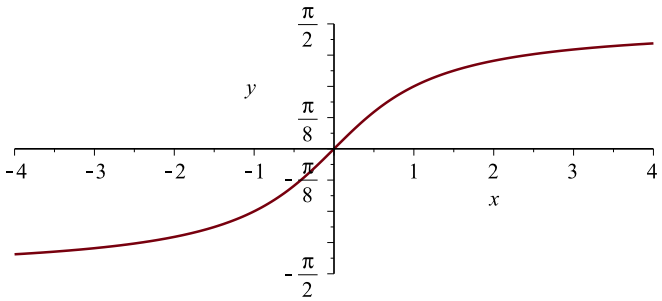

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ függvény grafikonja

Az arctg függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. itt szigorúan növő,
3. értékkészlete $(-\pi/2, \pi/2)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$,
6. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

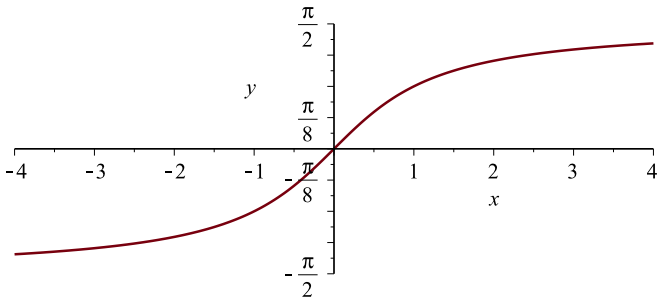

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ függvény grafikonja

Az arctg függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. itt szigorúan növő,
3. értékkészlete $(-\pi/2, \pi/2)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$,
6. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

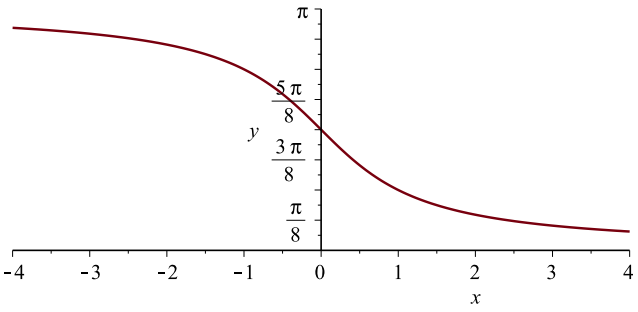

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arcctg}(x)$ függvény grafikonja

Az arcctg függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. itt szigorúan csökken,
3. értékkészlete $(0, \pi)$,
4. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg}(x) = 0$,
6. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg}(x) = \pi$.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

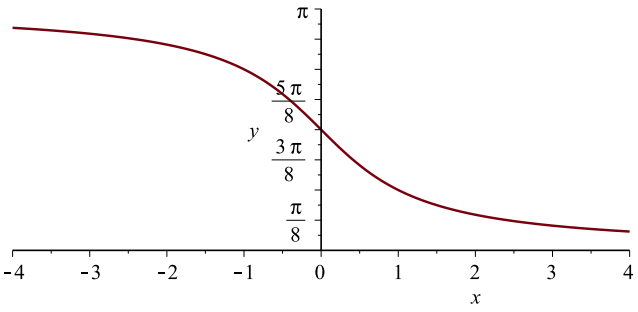

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arcctg}(x)$ függvény grafikonja

Az arcctg függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. itt szigorúan csökken,
3. értékkészlete $(0, \pi)$,
4. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg}(x) = 0$,
6. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg}(x) = \pi$.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

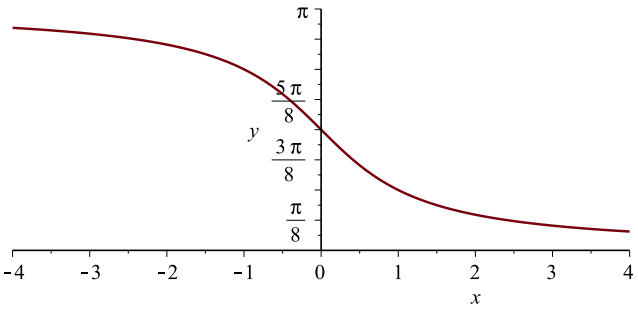

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arcctg}(x)$ függvény grafikonja

Az arcctg függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. itt szigorúan csökken,
3. értékkészlete $(0, \pi)$,
4. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg}(x) = 0$,
6. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg}(x) = \pi$.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

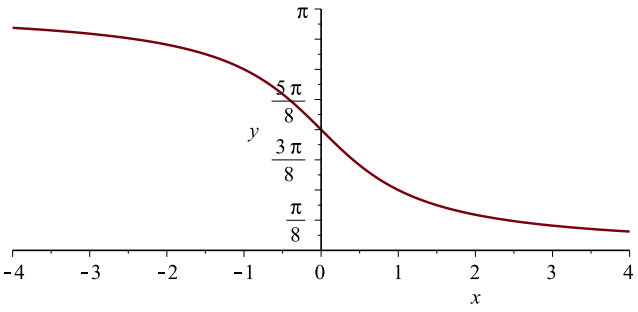

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arcctg}(x)$ függvény grafikonja

Az arcctg függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. itt szigorúan csökken,
3. értékkészlete $(0, \pi)$,
4. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg}(x) = 0$,
6. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg}(x) = \pi$.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

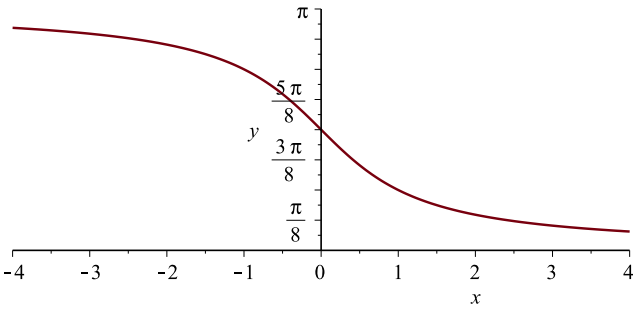

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arcctg}(x)$ függvény grafikonja

Az arcctg függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. itt szigorúan csökken,
3. értékkészlete $(0, \pi)$,
4. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg}(x) = 0$,
6. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg}(x) = \pi$.

SZÖGFÜGGVÉNYEK INVERZEI

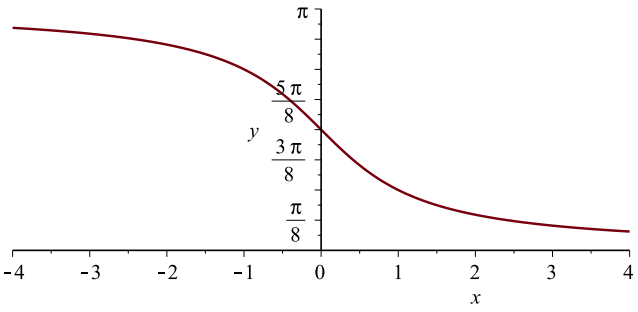

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arcctg}(x)$ függvény grafikonja

Az arcctg függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. itt szigorúan csökken,
3. értékkészlete $(0, \pi)$,
4. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg}(x) = 0$,
6. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg}(x) = \pi$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

Az e^x függvényből származtathatjuk az ún. hiperbolikus függvényeket:

- a koszinusz hiperbolikusz

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

- a szinusz hiperbolikusz

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

Az e^x függvényből származtathatjuk az ún. hiperbolikus függvényeket:

- a koszinusz hiperbolikusz

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

- a szinusz hiperbolikusz

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

Az e^x függvényből származtathatjuk az ún. hiperbolikus függvényeket:

- a koszinusz hiperbolikusz

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

- a szinusz hiperbolikusz

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

- a tangens hiperbolikusz

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- $x \neq 0$ esetén a kotangens hiperbolikusz

$$\mathrm{cth}(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

- a tangens hiperbolikusz

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- $x \neq 0$ esetén a kotangens hiperbolikusz

$$\operatorname{cth}(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

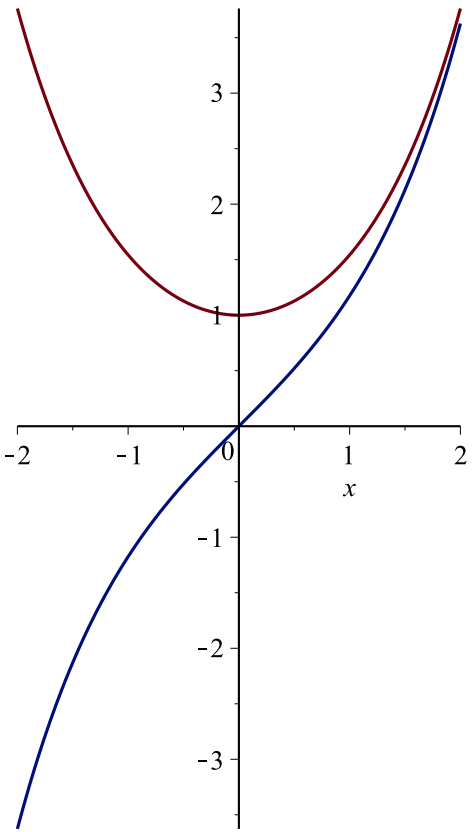

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A ch függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0]$-n és szigorúan nő $[0, \infty)$-en,
3. értékkészlete $[1, \infty)$,
4. páros, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$.

Az sh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan nő,
3. értékkészlete $\mathbb{R}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

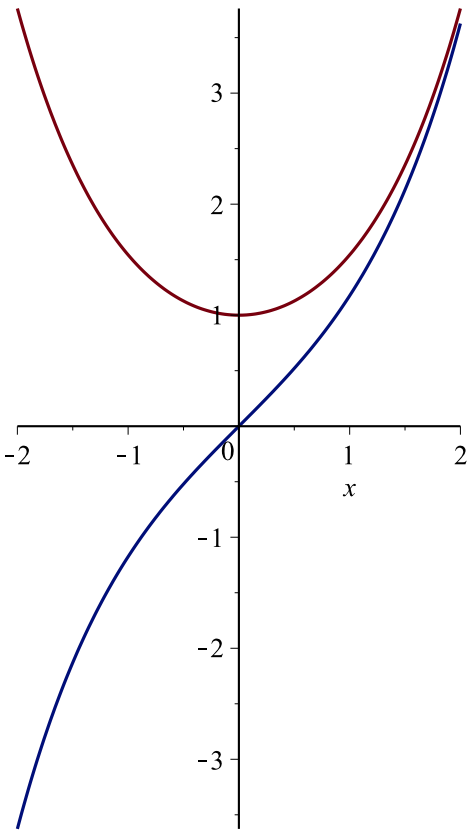

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A ch függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0]$-n és szigorúan nő $[0, \infty)$-en,
3. értékkészlete $[1, \infty)$,
4. páros, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$.

Az sh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan nő,
3. értékkészlete $\mathbb{R}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

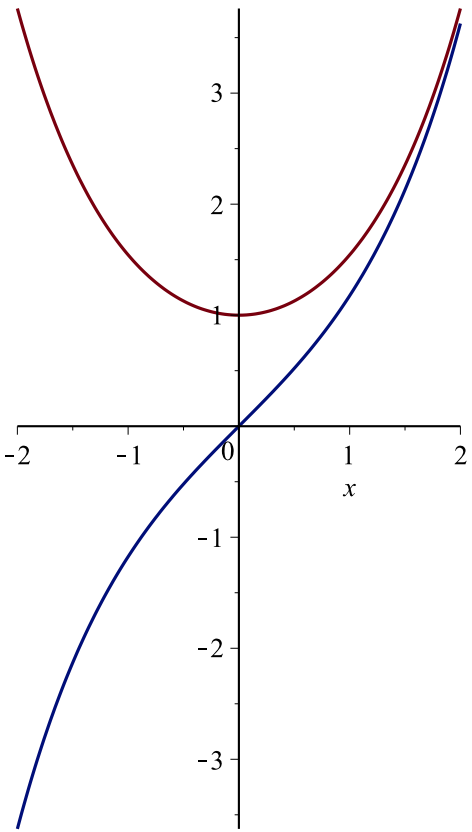

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A ch függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0]$-n és szigorúan nő $[0, \infty)$-en,
3. értékkészlete $[1, \infty)$,
4. páros, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$.

Az sh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan nő,
3. értékkészlete $\mathbb{R}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

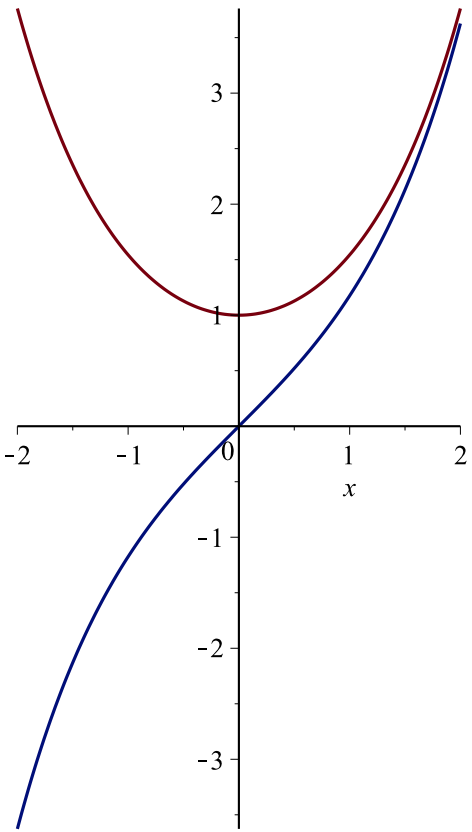

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A ch függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0]$-n és szigorúan nő $[0, \infty)$-en,
3. értékkészlete $[1, \infty)$,
4. páros, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$.

Az sh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan nő,
3. értékkészlete $\mathbb{R}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

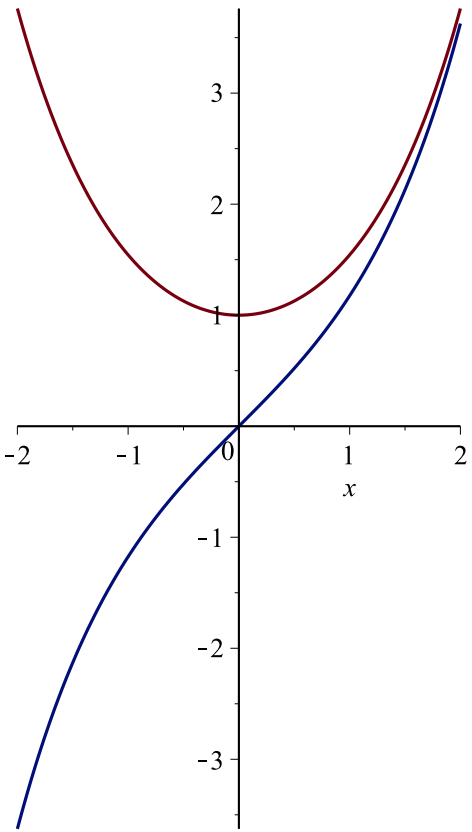

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A ch függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0]$-n és szigorúan nő $[0, \infty)$-en,
3. értékkészlete $[1, \infty)$,
4. páros, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$.

Az sh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan nő,
3. értékkészlete $\mathbb{R}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

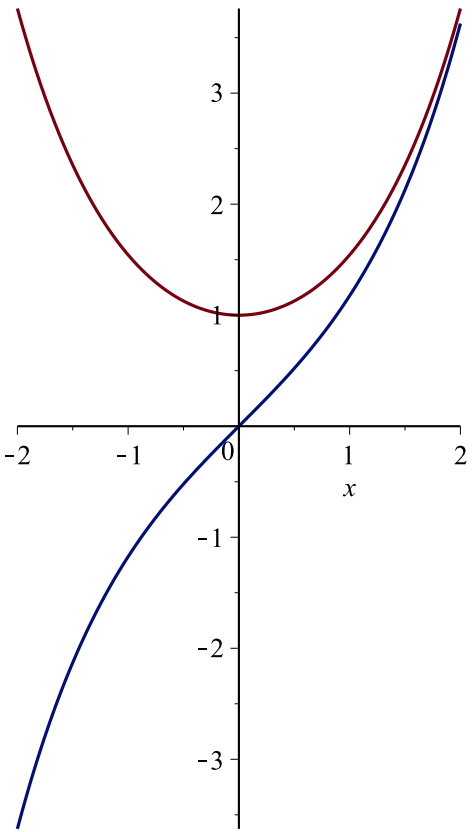

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A ch függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0]$-n és szigorúan nő $[0, \infty)$-en,
3. értékkészlete $[1, \infty)$,
4. páros, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$.

Az sh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan nő,
3. értékkészlete $\mathbb{R}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

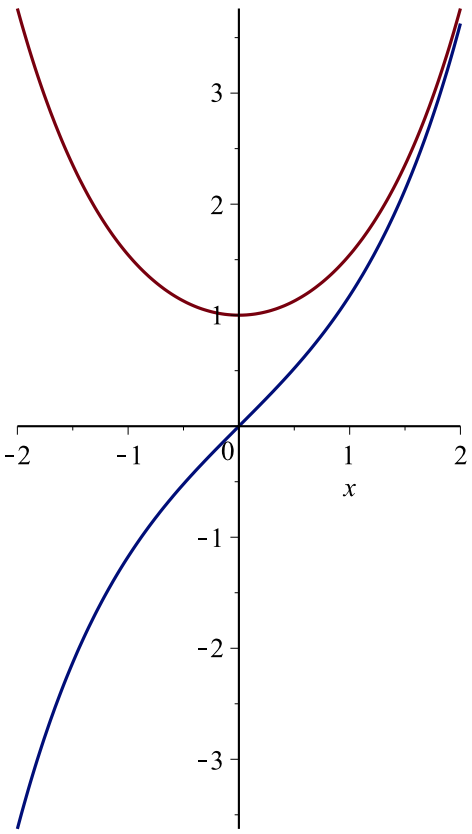

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A ch függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0]$-n és szigorúan nő $[0, \infty)$-en,
3. értékkészlete $[1, \infty)$,
4. páros, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$.

Az sh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan nő,
3. értékkészlete $\mathbb{R}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

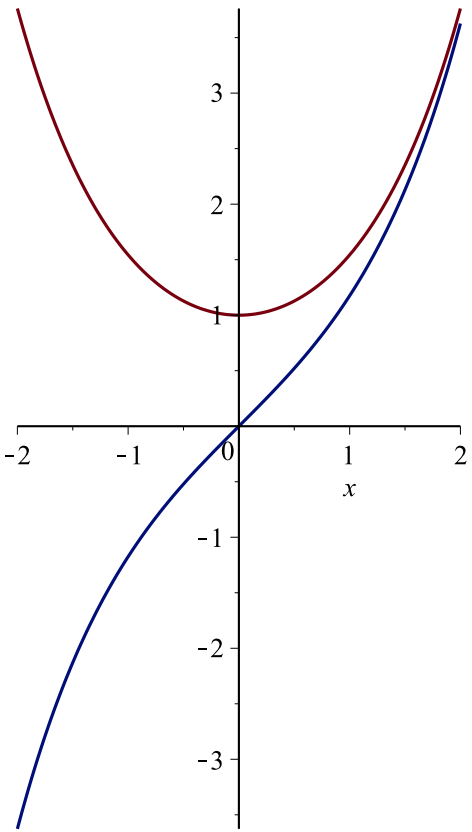

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A ch függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0]$-n és szigorúan nő $[0, \infty)$-en,
3. értékkészlete $[1, \infty)$,
4. páros, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$.

Az sh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan nő,
3. értékkészlete $\mathbb{R}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

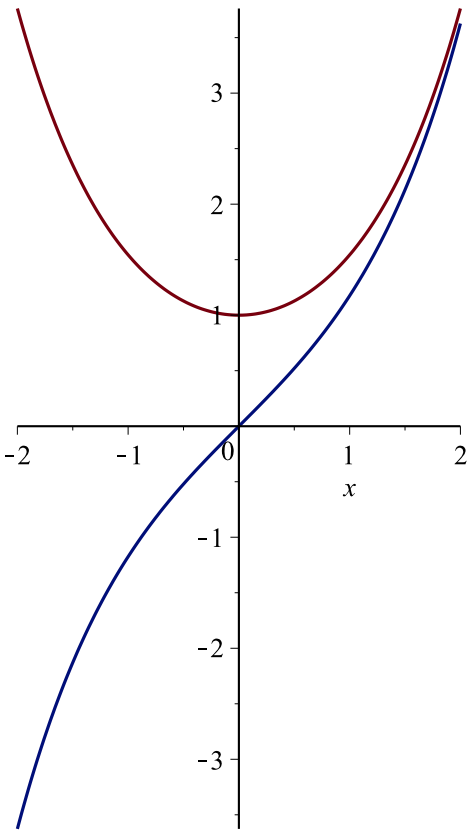

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A ch függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0]$-n és szigorúan nő $[0, \infty)$-en,
3. értékkészlete $[1, \infty)$,
4. páros, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$.

Az sh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan nő,
3. értékkészlete $\mathbb{R}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

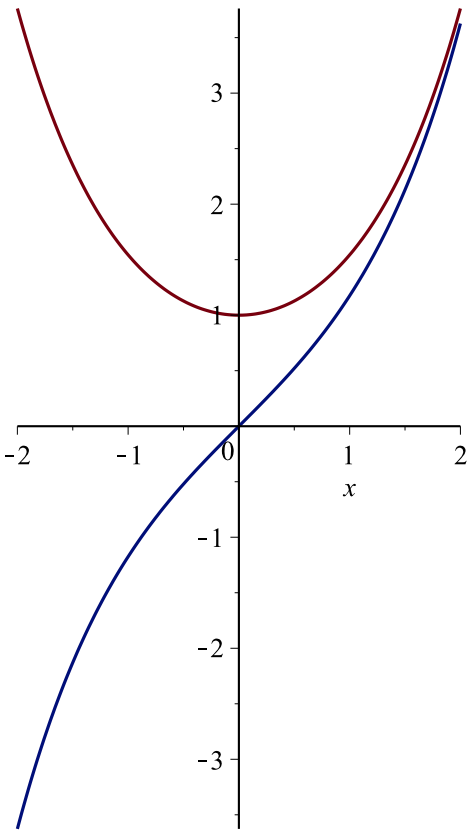

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A ch függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0]$-n és szigorúan nő $[0, \infty)$-en,
3. értékkészlete $[1, \infty)$,
4. páros, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$.

Az sh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-en,
2. szigorúan nő,
3. értékkészlete $\mathbb{R}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

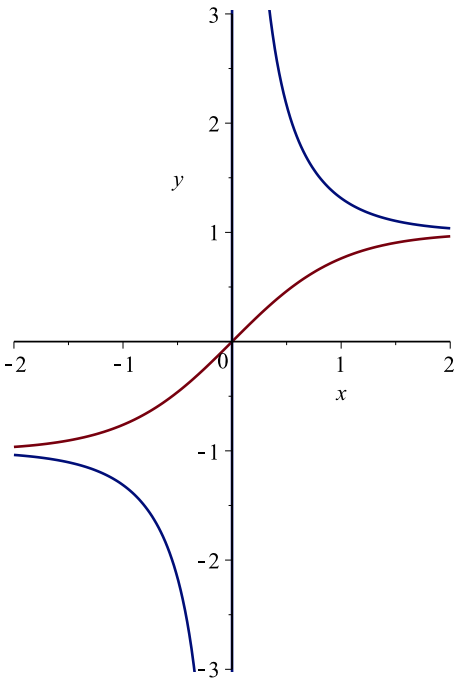

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{cth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $\mathbb{R}$-en,
2. értékkészlete $(-1, 1)$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0)$-n és $(0, \infty)$-n,
3. értékkészlete $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{cth}(x) = \pm 1$, $\lim_{x\to 0\pm 0} \mathrm{cth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

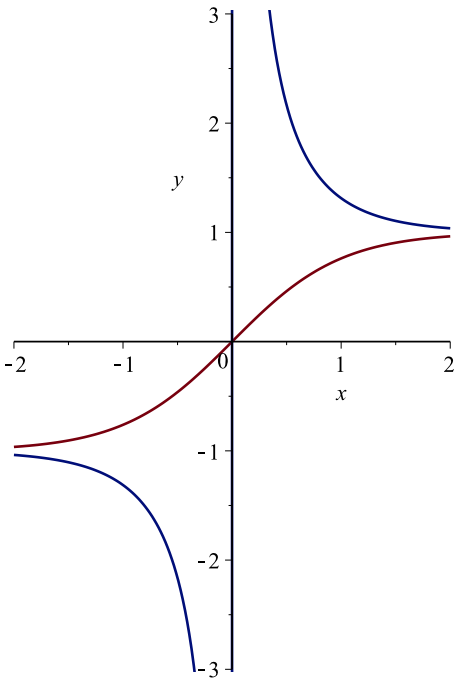

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{cth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $\mathbb{R}$-en,
2. értékkészlete $(-1, 1)$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0)$-n és $(0, \infty)$-n,
3. értékkészlete $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{cth}(x) = \pm 1$, $\lim_{x\to 0\pm 0} \mathrm{cth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

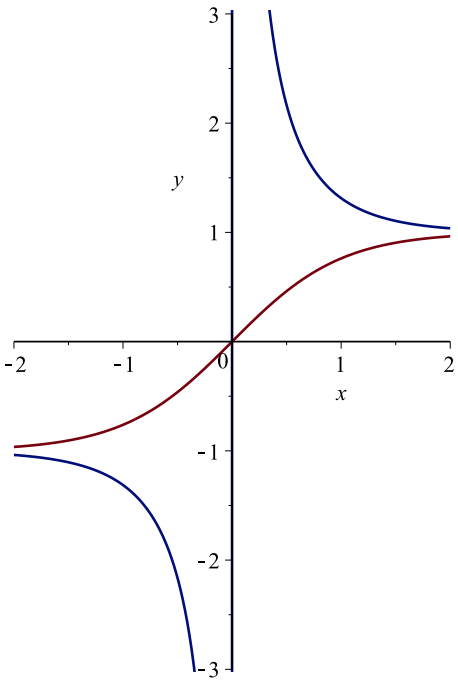

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{cth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $\mathbb{R}$-en,
2. értékkészlete $(-1, 1)$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0)$-n és $(0, \infty)$-n,
3. értékkészlete $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{cth}(x) = \pm 1$, $\lim_{x\to 0\pm 0} \mathrm{cth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

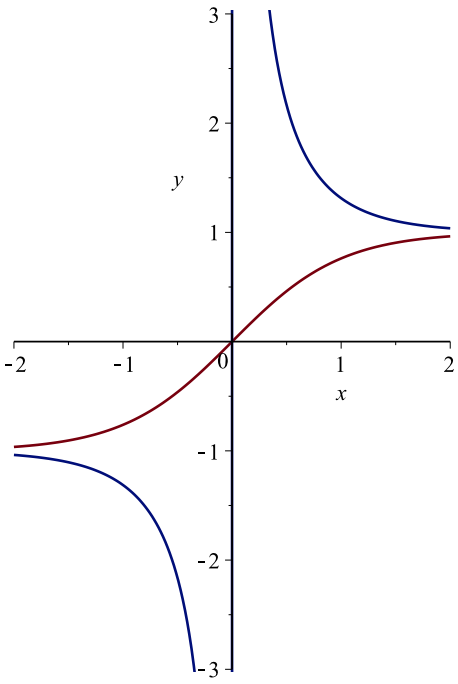

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{cth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $\mathbb{R}$-en,
2. értékkészlete $(-1, 1)$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0)$-n és $(0, \infty)$-n,
3. értékkészlete $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{cth}(x) = \pm 1$, $\lim_{x\to 0\pm 0} \mathrm{cth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

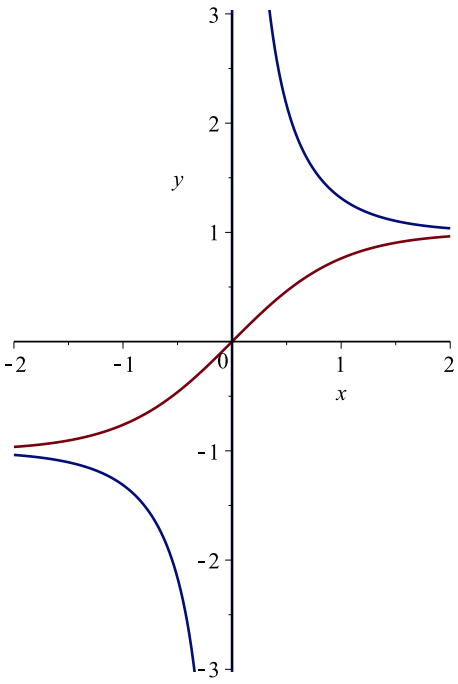

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{cth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $\mathbb{R}$-en,
2. értékkészlete $(-1, 1)$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0)$-n és $(0, \infty)$-n,
3. értékkészlete $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{cth}(x) = \pm 1$, $\lim_{x\to 0\pm 0} \mathrm{cth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

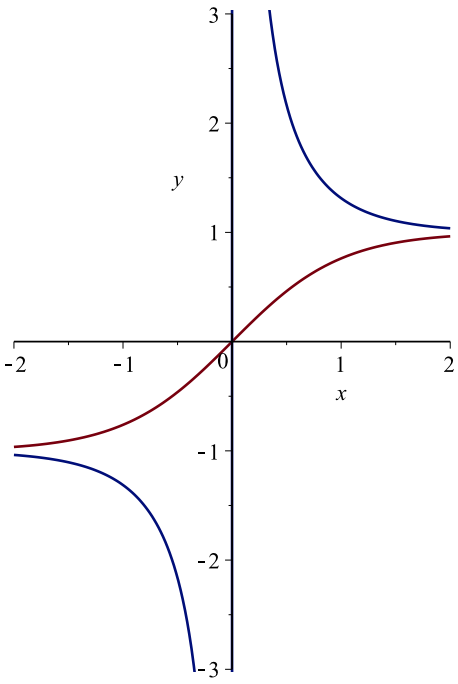

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{cth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $\mathbb{R}$-en,
2. értékkészlete $(-1, 1)$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0)$-n és $(0, \infty)$-n,
3. értékkészlete $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{cth}(x) = \pm 1$, $\lim_{x\to 0\pm 0} \mathrm{cth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

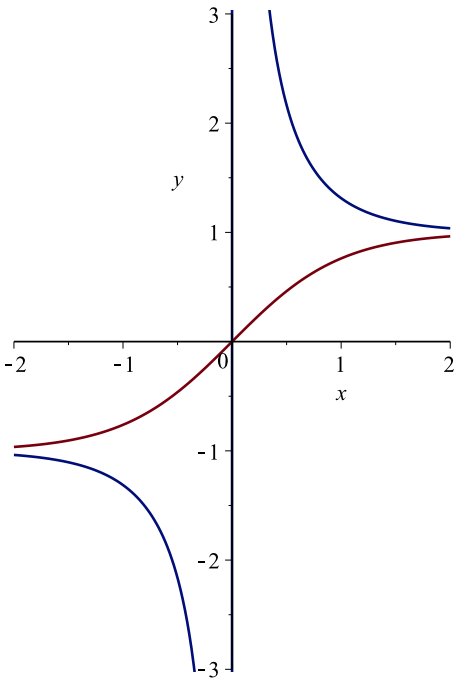

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{cth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $\mathbb{R}$-en,
2. értékkészlete $(-1, 1)$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0)$-n és $(0, \infty)$-n,
3. értékkészlete $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{cth}(x) = \pm 1$, $\lim_{x\to 0\pm 0} \mathrm{cth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

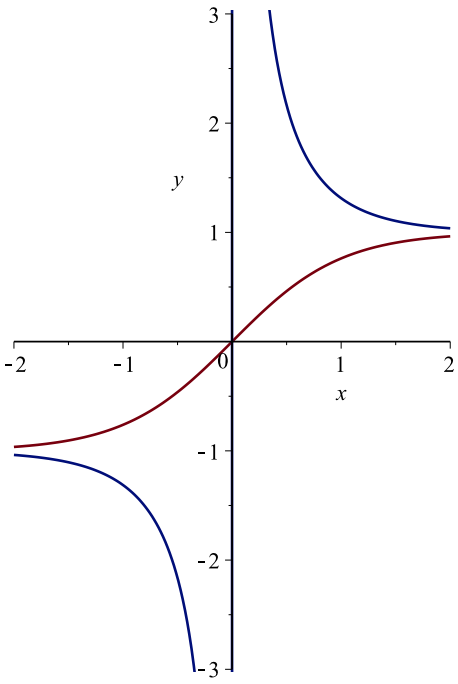

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{cth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $\mathbb{R}$-en,
2. értékkészlete $(-1, 1)$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0)$-n és $(0, \infty)$-n,
3. értékkészlete $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{cth}(x) = \pm 1$, $\lim_{x\to 0\pm 0} \mathrm{cth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

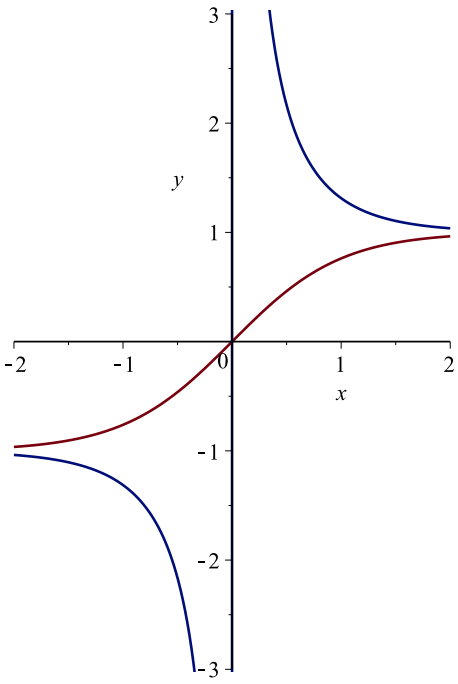

FIGURE: Az $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \mathrm{cth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $\mathbb{R}$-en,
2. értékkészlete $(-1, 1)$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n,
2. szigorúan csökken $(-\infty, 0)$-n és $(0, \infty)$-n,
3. értékkészlete $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{cth}(x) = \pm 1$, $\lim_{x\to 0\pm 0} \mathrm{cth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ AZONOSSÁGOK

EMLÉKEZTETŐ

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1;\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x);\ 2\cos x \sin x = \sin(2x).$$

TÉTEL

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;\ \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}(2x);\ 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = \operatorname{sh}(2x).$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ AZONOSSÁGOK

EMLÉKEZTETŐ

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1;\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x);\ 2\cos x \sin x = \sin(2x).$$

TÉTEL

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;\ \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}(2x);\ 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = \operatorname{sh}(2x).$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ AZONOSSÁGOK

EMLÉKEZTETŐ

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1;\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x);\ 2\cos x \sin x = \sin(2x).$$

TÉTEL

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;\ \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}(2x);\ 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = \operatorname{sh}(2x).$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ AZONOSSÁGOK

EMLÉKEZTETŐ

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1;\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x);\ 2\cos x \sin x = \sin(2x).$$

TÉTEL

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;\ \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}(2x);\ 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = \operatorname{sh}(2x).$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ AZONOSSÁGOK

Bizonyítás.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

A többi azonosság hasonlóan igazolható.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ AZONOSSÁGOK

Bizonyítás.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

A többi azonosság hasonlóan igazolható.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ AZONOSSÁGOK

Bizonyítás.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

A többi azonosság hasonlóan igazolható.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ AZONOSSÁGOK

Bizonyítás.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

A többi azonosság hasonlóan igazolható.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ AZONOSSÁGOK

Bizonyítás.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

A többi azonosság hasonlóan igazolható.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ AZONOSSÁGOK

Bizonyítás.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

A többi azonosság hasonlóan igazolható.

A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

- Az

$$\operatorname{arsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

area szinusz hiperbolikusz függvény a sh függvény inverz függvénye.

- Az

$$\operatorname{arch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty)$$

area koszinusz hiperbolikusz függvény a ch függvény $[0, +\infty)$ félegyenesre való megszorításának inverz függvénye.

A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

- Az
$$\operatorname{arsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
area szinusz hiperbolikusz függvény a sh függvény inverz függvénye.
- Az
$$\operatorname{arch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty)$$
area koszinusz hiperbolikusz függvény a ch függvény $[0, +\infty)$ félegyenesre való megszorításának inverz függvénye.

A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

- Az
$$\operatorname{arth} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$$
area tangens hiperbolikusz függvény a th függvény inverz függvénye.
- Az
$$\operatorname{arcth} : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
area kotangens hiperbolikusz függvény a cth függvény inverz függvénye.

A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

- Az
$$\operatorname{arth} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$$
area tangens hiperbolikusz függvény a th függvény inverz függvénye.
- Az
$$\operatorname{arcth} : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
area kotangens hiperbolikusz függvény a cth függvény inverz függvénye.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

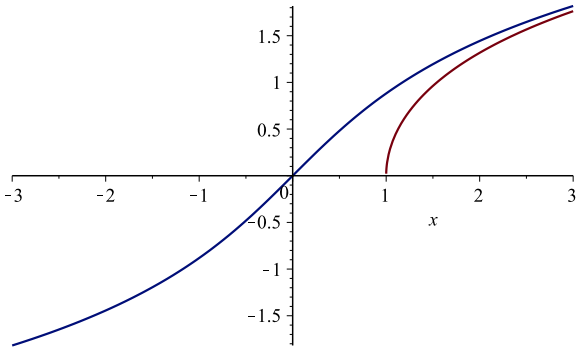

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arsh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

Az arch függvény

1. folytonos és szigorúan nő $[1, \infty)$-n,
2. értékkészlete $[0, \infty)$,
3. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arch}(x) = \infty$.

Az arsh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-n,
2. szigorúan nő és értékkészlete $\mathbb{R}$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arsh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

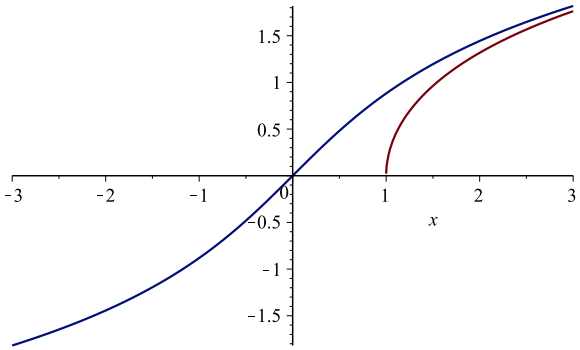

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arsh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

Az arch függvény

1. folytonos és szigorúan nő $[1, \infty)$-n,
2. értékkészlete $[0, \infty)$,
3. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arch}(x) = \infty$.

Az arsh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-n,
2. szigorúan nő és értékkészlete $\mathbb{R}$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arsh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

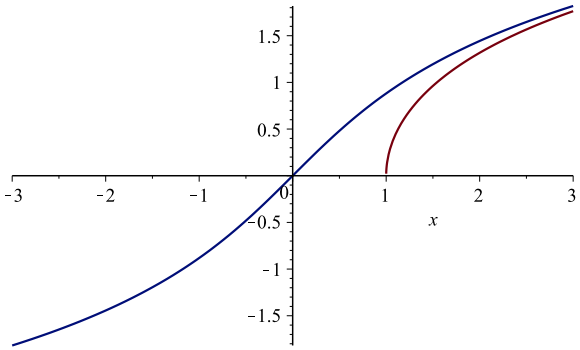

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arsh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

Az arch függvény

1. folytonos és szigorúan nő $[1, \infty)$-n,
2. értékkészlete $[0, \infty)$,
3. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arch}(x) = \infty$.

Az arsh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-n,
2. szigorúan nő és értékkészlete $\mathbb{R}$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arsh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

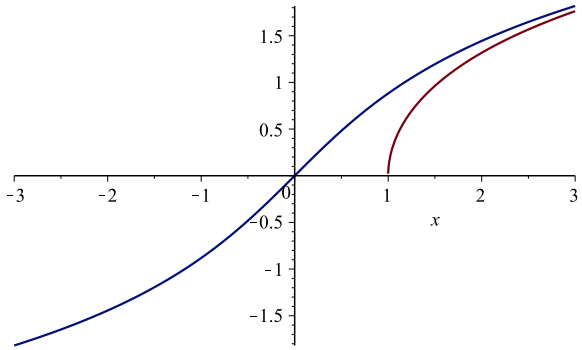

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arsh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

Az arch függvény

1. folytonos és szigorúan nő $[1, \infty)$-n,
2. értékkészlete $[0, \infty)$,
3. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arch}(x) = \infty$.

Az arsh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-n,
2. szigorúan nő és értékkészlete $\mathbb{R}$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arsh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

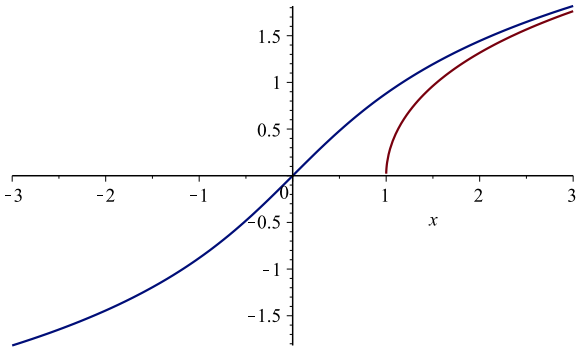

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arsh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

Az arch függvény

1. folytonos és szigorúan nő $[1, \infty)$-n,
2. értékkészlete $[0, \infty)$,
3. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arch}(x) = \infty$.

Az arsh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-n,
2. szigorúan nő és értékkészlete $\mathbb{R}$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arsh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

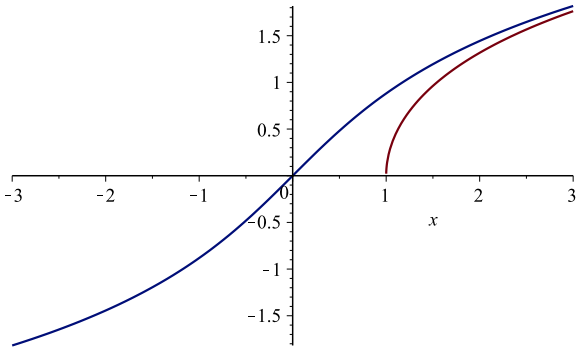

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arsh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

Az arch függvény

1. folytonos és szigorúan nő $[1, \infty)$-n,
2. értékkészlete $[0, \infty)$,
3. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arch}(x) = \infty$.

Az arsh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-n,
2. szigorúan nő és értékkészlete $\mathbb{R}$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arsh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

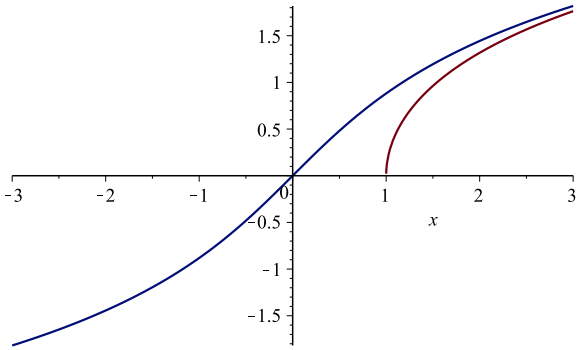

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arsh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

Az arch függvény

1. folytonos és szigorúan nő $[1, \infty)$-n,
2. értékkészlete $[0, \infty)$,
3. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arch}(x) = \infty$.

Az arsh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-n,
2. szigorúan nő és értékkészlete $\mathbb{R}$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arsh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

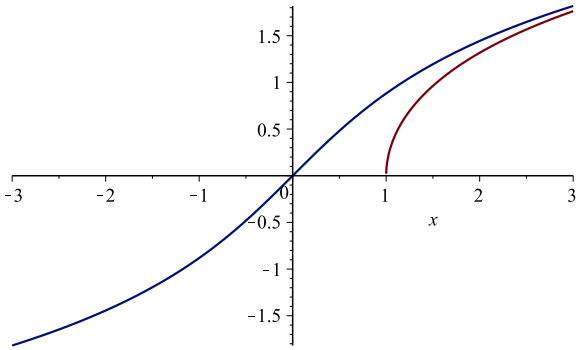

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arch}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arsh}(x)$ (kék) függvény grafikonja

Az arch függvény

1. folytonos és szigorúan nő $[1, \infty)$-n,
2. értékkészlete $[0, \infty)$,
3. nem páros, nem páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arch}(x) = \infty$.

Az arsh függvény

1. folytonos $\mathbb{R}$-n,
2. szigorúan nő és értékkészlete $\mathbb{R}$,
3. páratlan, nem periódikus,
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arsh}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

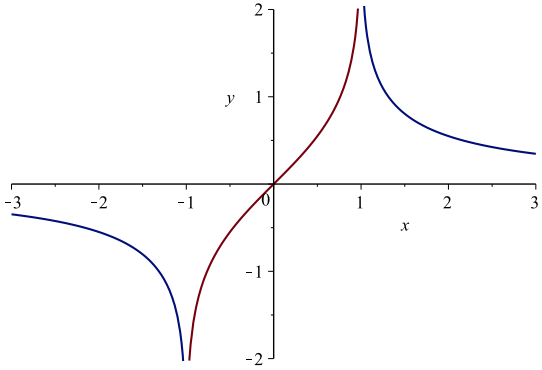

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arth}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arcth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $(-1, 1)$-en, értékkészlete $\mathbb{R}$,
2. páratlan, nem periódikus,
3. $\lim_{x \to \pm 1 \mp 0} \operatorname{arth}(x) = \pm\infty$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, -1)$-en és $(1, \infty)$-n,
3. értékkészlete $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arcth}(x) = 0$, $\lim_{x \to \pm 1 \pm 0} \operatorname{arcth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

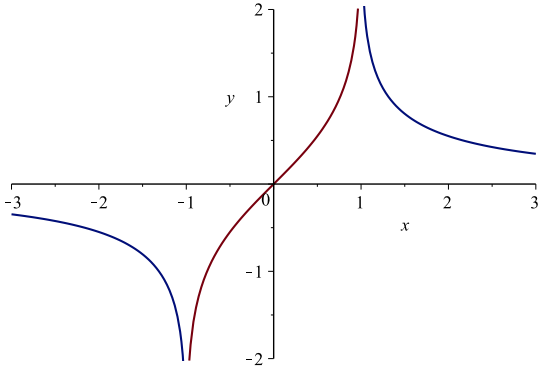

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arth}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arcth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $(-1, 1)$-en, értékkészlete $\mathbb{R}$,
2. páratlan, nem periódikus,
3. $\lim_{x \to \pm 1 \mp 0} \operatorname{arth}(x) = \pm\infty$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, -1)$-en és $(1, \infty)$-n,
3. értékkészlete $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arcth}(x) = 0$, $\lim_{x \to \pm 1 \pm 0} \operatorname{arcth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

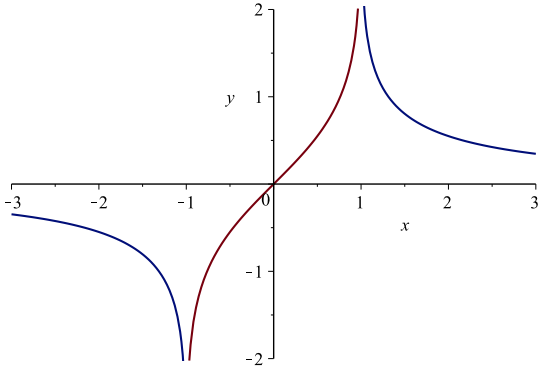

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arth}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arcth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $(-1, 1)$-en, értékkészlete $\mathbb{R}$,
2. páratlan, nem periódikus,
3. $\lim_{x \to \pm 1 \mp 0} \operatorname{arth}(x) = \pm\infty$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, -1)$-en és $(1, \infty)$-n,
3. értékkészlete $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arcth}(x) = 0$, $\lim_{x \to \pm 1 \pm 0} \operatorname{arcth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

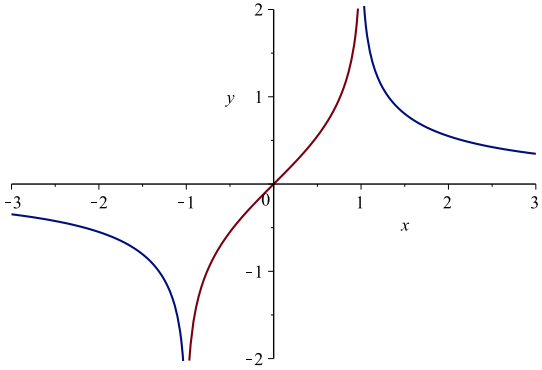

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arth}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arcth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $(-1, 1)$-en, értékkészlete $\mathbb{R}$,
2. páratlan, nem periódikus,
3. $\lim_{x \to \pm 1 \mp 0} \operatorname{arth}(x) = \pm\infty$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, -1)$-en és $(1, \infty)$-n,
3. értékkészlete $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arcth}(x) = 0$, $\lim_{x \to \pm 1 \pm 0} \operatorname{arcth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

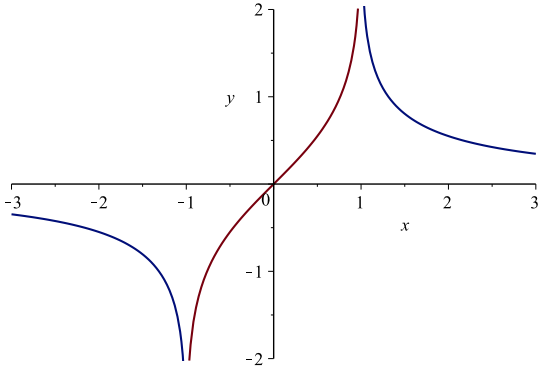

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arth}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arcth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $(-1, 1)$-en, értékkészlete $\mathbb{R}$,
2. páratlan, nem periódikus,
3. $\lim_{x \to \pm 1 \mp 0} \operatorname{arth}(x) = \pm\infty$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, -1)$-en és $(1, \infty)$-n,
3. értékkészlete $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arcth}(x) = 0$, $\lim_{x \to \pm 1 \pm 0} \operatorname{arcth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

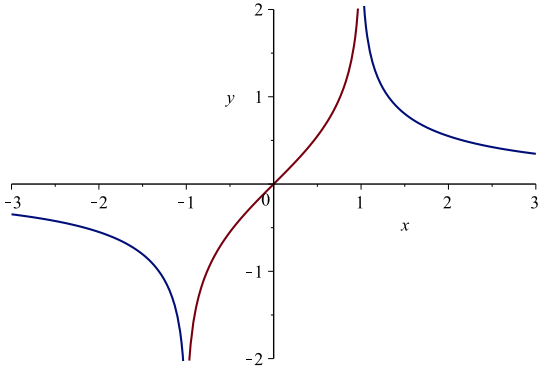

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arth}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arcth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $(-1, 1)$-en, értékkészlete $\mathbb{R}$,
2. páratlan, nem periódikus,
3. $\lim_{x \to \pm 1 \mp 0} \operatorname{arth}(x) = \pm\infty$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, -1)$-en és $(1, \infty)$-n,
3. értékkészlete $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arcth}(x) = 0$, $\lim_{x \to \pm 1 \pm 0} \operatorname{arcth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

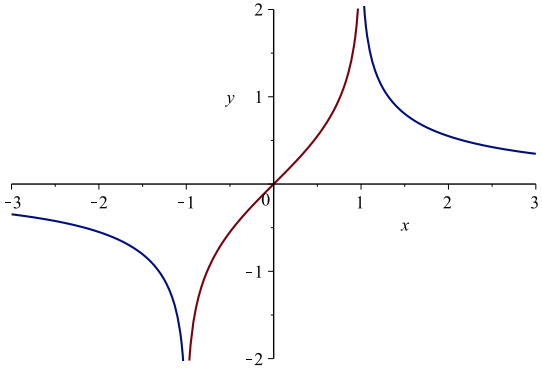

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arth}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arcth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $(-1, 1)$-en, értékkészlete $\mathbb{R}$,
2. páratlan, nem periódikus,
3. $\lim_{x \to \pm 1 \mp 0} \operatorname{arth}(x) = \pm\infty$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, -1)$-en és $(1, \infty)$-n,
3. értékkészlete $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arcth}(x) = 0$, $\lim_{x \to \pm 1 \pm 0} \operatorname{arcth}(x) = \pm\infty$.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

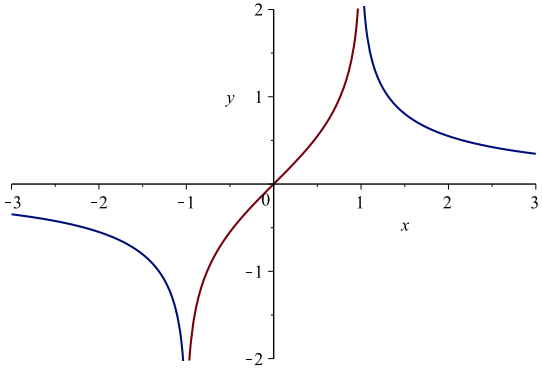

FIGURE: Az $x \mapsto \operatorname{arth}(x)$ (piros) és az $x \mapsto \operatorname{arcth}(x)$ (kék) függvény grafikonja

A th függvény

1. folytonos és szigorúan nő $(-1, 1)$-en, értékkészlete $\mathbb{R}$,
2. páratlan, nem periódikus,
3. $\lim_{x \to \pm 1 \mp 0} \operatorname{arth}(x) = \pm\infty$.

A cth függvény

1. folytonos $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$-en,
2. szigorúan csökken $(-\infty, -1)$-en és $(1, \infty)$-n,
3. értékkészlete $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
4. páratlan, nem periódikus,
5. $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arcth}(x) = 0$, $\lim_{x \to \pm 1 \pm 0} \operatorname{arcth}(x) = \pm\infty$.

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKR INVERZEIRE

ÁLLÍTÁS

Az értelmezési tartományuk minden x pontjában

$$\operatorname{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$\operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right).$$

$$\operatorname{arcth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right).$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKR INVERZEIRE

ÁLLÍTÁS

Az értelmezési tartományuk minden x pontjában

$$\operatorname{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$\operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right).$$

$$\operatorname{arcth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right).$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKR INVERZEIRE

ÁLLÍTÁS

Az értelmezési tartományuk minden x pontjában

$$\operatorname{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$\operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

$$\operatorname{arcth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKR INVERZEIRE

ÁLLÍTÁS

Az értelmezési tartományuk minden x pontjában

$$\operatorname{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$\operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right).$$

$$\operatorname{arcth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right).$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEKR INVERZEIRE

ÁLLÍTÁS

Az értelmezési tartományuk minden x pontjában

$$\operatorname{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$\operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right).$$

$$\operatorname{arcth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right).$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEIRE

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonságai alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x)) = x \Longrightarrow \frac{e^{\operatorname{arsh}(x)} - e^{-\operatorname{arsh}(x)}}{2} = x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 1}{2e^{\operatorname{arsh}(x)}} = x \Longrightarrow \left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 2xe^{\operatorname{arsh}(x)} - 1 = 0.$$

Másodfokú egyenletként megoldva

$$\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

De az exponenciális függvény mindenhol pozitív és $|x| < \sqrt{x^2+1}$, tehát

$$e^{\operatorname{arsh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \operatorname{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEIRE

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonságai alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x)) = x \Longrightarrow \frac{e^{\operatorname{arsh}(x)} - e^{-\operatorname{arsh}(x)}}{2} = x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 1}{2e^{\operatorname{arsh}(x)}} = x \Longrightarrow \left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 2xe^{\operatorname{arsh}(x)} - 1 = 0.$$

Másodfokú egyenletként megoldva

$$\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

De az exponenciális függvény mindenhol pozitív és $|x| < \sqrt{x^2+1}$, tehát

$$e^{\operatorname{arsh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \operatorname{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEIRE

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonságai alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x)) = x \Longrightarrow \frac{e^{\operatorname{arsh}(x)} - e^{-\operatorname{arsh}(x)}}{2} = x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 1}{2e^{\operatorname{arsh}(x)}} = x \Longrightarrow \left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 2xe^{\operatorname{arsh}(x)} - 1 = 0.$$

Másodfokú egyenletként megoldva

$$\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

De az exponenciális függvény mindenhol pozitív és $|x| < \sqrt{x^2+1}$, tehát

$$e^{\operatorname{arsh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \operatorname{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEIRE

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonságai alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x)) = x \Longrightarrow \frac{e^{\operatorname{arsh}(x)} - e^{-\operatorname{arsh}(x)}}{2} = x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 1}{2e^{\operatorname{arsh}(x)}} = x \Longrightarrow \left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 2xe^{\operatorname{arsh}(x)} - 1 = 0.$$

Másodfokú egyenletként megoldva

$$\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

De az exponenciális függvény mindenhol pozitív és $|x| < \sqrt{x^2+1}$, tehát

$$e^{\operatorname{arsh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \operatorname{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEIRE

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonságai alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x)) = x \Longrightarrow \frac{e^{\operatorname{arsh}(x)} - e^{-\operatorname{arsh}(x)}}{2} = x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 1}{2e^{\operatorname{arsh}(x)}} = x \Longrightarrow \left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 2xe^{\operatorname{arsh}(x)} - 1 = 0.$$

Másodfokú egyenletként megoldva

$$\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

De az exponenciális függvény mindenhol pozitív és $|x| < \sqrt{x^2+1}$, tehát

$$e^{\operatorname{arsh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \operatorname{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEIRE

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonságai alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x)) = x \Longrightarrow \frac{e^{\operatorname{arsh}(x)} - e^{-\operatorname{arsh}(x)}}{2} = x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 1}{2e^{\operatorname{arsh}(x)}} = x \Longrightarrow \left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 2xe^{\operatorname{arsh}(x)} - 1 = 0.$$

Másodfokú egyenletként megoldva

$$\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

De az exponenciális függvény mindenhol pozitív és $|x| < \sqrt{x^2+1}$, tehát

$$e^{\operatorname{arsh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \operatorname{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEIRE

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonságai alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x)) = x \Longrightarrow \frac{e^{\operatorname{arsh}(x)} - e^{-\operatorname{arsh}(x)}}{2} = x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 1}{2e^{\operatorname{arsh}(x)}} = x \Longrightarrow \left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 2xe^{\operatorname{arsh}(x)} - 1 = 0.$$

Másodfokú egyenletként megoldva

$$\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

De az exponenciális függvény mindenhol pozitív és $|x| < \sqrt{x^2+1}$, tehát

$$e^{\operatorname{arsh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \operatorname{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEIRE

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonságai alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x)) = x \Longrightarrow \frac{e^{\operatorname{arsh}(x)} - e^{-\operatorname{arsh}(x)}}{2} = x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 1}{2e^{\operatorname{arsh}(x)}} = x \Longrightarrow \left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 2xe^{\operatorname{arsh}(x)} - 1 = 0.$$

Másodfokú egyenletként megoldva

$$\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

De az exponenciális függvény mindenhol pozitív és $|x| < \sqrt{x^2+1}$, tehát

$$e^{\operatorname{arsh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \operatorname{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEIRE

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonságai alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x)) = x \Longrightarrow \frac{e^{\operatorname{arsh}(x)} - e^{-\operatorname{arsh}(x)}}{2} = x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 1}{2e^{\operatorname{arsh}(x)}} = x \Longrightarrow \left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 2xe^{\operatorname{arsh}(x)} - 1 = 0.$$

Másodfokú egyenletként megoldva

$$\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

De az exponenciális függvény mindenhol pozitív és $|x| < \sqrt{x^2+1}$, tehát

$$e^{\operatorname{arsh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \operatorname{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEIRE

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonságai alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x)) = x \Longrightarrow \frac{e^{\operatorname{arsh}(x)} - e^{-\operatorname{arsh}(x)}}{2} = x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 1}{2e^{\operatorname{arsh}(x)}} = x \Longrightarrow \left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 2xe^{\operatorname{arsh}(x)} - 1 = 0.$$

Másodfokú egyenletként megoldva

$$\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

De az exponenciális függvény mindenhol pozitív és $|x| < \sqrt{x^2+1}$, tehát

$$e^{\operatorname{arsh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \operatorname{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

KÉPLETEK A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEIRE

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonságai alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x)) = x \Longrightarrow \frac{e^{\operatorname{arsh}(x)} - e^{-\operatorname{arsh}(x)}}{2} = x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 1}{2e^{\operatorname{arsh}(x)}} = x \Longrightarrow \left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)^2 - 2xe^{\operatorname{arsh}(x)} - 1 = 0.$$

Másodfokú egyenletként megoldva

$$\left(e^{\operatorname{arsh}(x)}\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

De az exponenciális függvény mindenhol pozitív és $|x| < \sqrt{x^2+1}$, tehát

$$e^{\operatorname{arsh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \operatorname{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

DEFINÍCIÓ

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos* $[a, b]$*-n, ha folytonos* x_0*-ban minden* $x_0 \in (a, b)$ *esetén, valamint a-ban folytonos jobbról és b-ben balról.*

TÉTEL (WEIERSTRASS-TÉTEL)

Ha $a < b \in \mathbb{R}$ *és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n, akkor léteznek olyan* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *értékek, amelyekben* f*-nek globális maximuma illetve minimuma van az* $[a, b]$ *intervallumon: minden* $x \in [a, b]$ *esetén*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Többek között, f *korlátos* $[a, b]$*-n.*

ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

DEFINÍCIÓ

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n, ha folytonos x_0-ban minden $x_0 \in (a, b)$ esetén, valamint a-ban folytonos jobbról és b-ben balról.

TÉTEL (WEIERSTRASS-TÉTEL)

Ha $a < b \in \mathbb{R}$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$-n, akkor léteznek olyan $x_1, x_2 \in [a, b]$ értékek, amelyekben f-nek globális maximuma illetve minimuma van az $[a, b]$ intervallumon: minden $x \in [a, b]$ esetén

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Többek között, f korlátos $[a, b]$-n.

ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

DEFINÍCIÓ

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos* $[a, b]$*-n, ha folytonos* x_0*-ban minden* $x_0 \in (a, b)$ *esetén, valamint a-ban folytonos jobbról és b-ben balról.*

TÉTEL (WEIERSTRASS-TÉTEL)

Ha $a < b \in \mathbb{R}$ *és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n, akkor léteznek olyan* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *értékek, amelyekben* f*-nek globális maximuma illetve minimuma van az* $[a, b]$ *intervallumon: minden* $x \in [a, b]$ *esetén*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Többek között, f *korlátos* $[a, b]$*-n.*

ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

DEFINÍCIÓ

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n, ha folytonos x_0-ban minden $x_0 \in (a, b)$ esetén, valamint a-ban folytonos jobbról és b-ben balról.

TÉTEL (WEIERSTRASS-TÉTEL)

Ha $a < b \in \mathbb{R}$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$-n, akkor léteznek olyan $x_1, x_2 \in [a, b]$ értékek, amelyekben f-nek globális maximuma illetve minimuma van az $[a, b]$ intervallumon: minden $x \in [a, b]$ esetén

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Többek között, f korlátos $[a, b]$-n.

ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

DEFINÍCIÓ

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos* $[a, b]$*-n, ha folytonos* x_0*-ban minden* $x_0 \in (a, b)$ *esetén, valamint a-ban folytonos jobbról és b-ben balról.*

TÉTEL (WEIERSTRASS-TÉTEL)

Ha $a < b \in \mathbb{R}$ *és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n, akkor léteznek olyan* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *értékek, amelyekben* f*-nek globális maximuma illetve minimuma van az* $[a, b]$ *intervallumon: minden* $x \in [a, b]$ *esetén*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Többek között, f *korlátos* $[a, b]$*-n.*

ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

TÉTEL (BOLZANO-TÉTEL)

Ha $a < b \in \mathbb{R}$ *és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n, valamint* γ *tetszőleges érték* $f(a)$ *és* $f(b)$ *között, akkor létezik olyan* $c \in [a, b]$ *amelyre* $f(c) = \gamma$.

KÖVETKEZMÉNY

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos, akkor értékkészlete egy* $[c, d]$ *zárt intervallum.*

KÖVETKEZMÉNY

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos és szigorúan monoton, akkor* f*-nek van inverz függvénye.*

ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

TÉTEL (BOLZANO-TÉTEL)

Ha $a < b \in \mathbb{R}$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$-n, valamint γ tetszőleges érték $f(a)$ és $f(b)$ között, akkor létezik olyan $c \in [a, b]$ amelyre $f(c) = \gamma$.

KÖVETKEZMÉNY

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor értékkészlete egy $[c, d]$ zárt intervallum.

KÖVETKEZMÉNY

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton, akkor f-nek van inverz függvénye.

ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

TÉTEL (BOLZANO-TÉTEL)

Ha $a < b \in \mathbb{R}$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$-n, valamint γ tetszőleges érték $f(a)$ és $f(b)$ között, akkor létezik olyan $c \in [a, b]$ amelyre $f(c) = \gamma$.

KÖVETKEZMÉNY

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor értékkészlete egy $[c, d]$ zárt intervallum.

KÖVETKEZMÉNY

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton, akkor f-nek van inverz függvénye.

ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

TÉTEL (BOLZANO-TÉTEL)

Ha $a < b \in \mathbb{R}$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$-n, valamint γ tetszőleges érték $f(a)$ és $f(b)$ között, akkor létezik olyan $c \in [a, b]$ amelyre $f(c) = \gamma$.

KÖVETKEZMÉNY

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor értékkészlete egy $[c, d]$ zárt intervallum.

KÖVETKEZMÉNY

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton, akkor f-nek van inverz függvénye.

ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

TÉTEL (BOLZANO-TÉTEL)

Ha $a < b \in \mathbb{R}$ *és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n, valamint* γ *tetszőleges érték* $f(a)$ *és* $f(b)$ *között, akkor létezik olyan* $c \in [a, b]$ *amelyre* $f(c) = \gamma$.

KÖVETKEZMÉNY

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos, akkor értékkészlete egy* $[c, d]$ *zárt intervallum.*

KÖVETKEZMÉNY

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos és szigorúan monoton, akkor* f*-nek van inverz függvénye.*

ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

TÉTEL (BOLZANO-TÉTEL)

Ha $a < b \in \mathbb{R}$ *és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n, valamint* γ *tetszőleges érték* $f(a)$ *és* $f(b)$ *között, akkor létezik olyan* $c \in [a, b]$ *amelyre* $f(c) = \gamma$.

KÖVETKEZMÉNY

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos, akkor értékkészlete egy* $[c, d]$ *zárt intervallum.*

KÖVETKEZMÉNY

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos és szigorúan monoton, akkor* f*-nek van inverz függvénye.*