13. ELŐADÁS: ELEMI FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI, KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEK

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk. Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás. Legyen n nemnegatív. Teljes indukciót használunk.
Ha $n = 0$, akkor $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$.
Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Másrészt

$$(x^{-k})' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{1' \cdot x^k - 1 \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2} = \frac{-k}{x^{k+1}} = (-k)x^{-k-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $r = \frac{1}{m}$, ahol $m \in \mathbb{Z}_+$. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Általában, ha $r = \frac{n}{m}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}_+$, akkor a láncszabály alapján

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(\sqrt[m]{x}\right)^n\right)' = n\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Minden $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $(e^x)' = e^x$.

ÁLLÍTÁS

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Bizonyítás.

EMLÉKEZTETŐ (BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG)

Ha $x > -1$ *és* $n \in \mathbb{N}$, *akkor* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Minden $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $(e^x)' = e^x$.

ÁLLÍTÁS

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Bizonyítás.

EMLÉKEZTETŐ (BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG)

Ha $x > -1$ *és* $n \in \mathbb{N}$, *akkor* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Minden $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $(e^x)' = e^x$.

ÁLLÍTÁS

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Bizonyítás.

EMLÉKEZTETŐ (BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG)

Ha $x > -1$ *és* $n \in \mathbb{N}$, *akkor* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Minden $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $(e^x)' = e^x$.

ÁLLÍTÁS

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Bizonyítás.

EMLÉKEZTETŐ (BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG)

Ha $x > -1$ *és* $n \in \mathbb{N}$, *akkor* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Ha $|x| < 1$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenségből:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x.$$

Másrészt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+x-x}{n+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n}$$

mert $\frac{x}{n+x} > -1$, ha $|x| < 1$ és $n \geq 2$. De

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n} = \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

Tehát ha $|x| < 1$, és $n \geq 2$, akkor

$$1 + x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Ha $|x| < 1$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenségből:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x.$$

Másrészt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+x-x}{n+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n}$$

mert $\frac{x}{n+x} > -1$, ha $|x| < 1$ és $n \geq 2$. De

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n} = \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

Tehát ha $|x| < 1$, és $n \geq 2$, akkor

$$1 + x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Ha $|x| < 1$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenségből:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x.$$

Másrészt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+x-x}{n+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n}$$

mert $\frac{x}{n+x} > -1$, ha $|x| < 1$ és $n \geq 2$. De

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n} = \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

Tehát ha $|x| < 1$, és $n \geq 2$, akkor

$$1 + x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Ha $|x| < 1$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenségből:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x.$$

Másrészt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+x-x}{n+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n}$$

mert $\frac{x}{n+x} > -1$, ha $|x| < 1$ és $n \geq 2$. De

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n} = \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

Tehát ha $|x| < 1$, és $n \geq 2$, akkor

$$1 + x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Ha $|x| < 1$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenségből:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x.$$

Másrészt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+x-x}{n+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n}$$

mert $\frac{x}{n+x} > -1$, ha $|x| < 1$ és $n \geq 2$. De

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n} = \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

Tehát ha $|x| < 1$, és $n \geq 2$, akkor

$$1 + x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Ha $|x| < 1$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenségből:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x.$$

Másrészt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+x-x}{n+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n}$$

mert $\frac{x}{n+x} > -1$, ha $|x| < 1$ és $n \geq 2$. De

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n} = \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

Tehát ha $|x| < 1$, és $n \geq 2$, akkor

$$1 + x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Ha $|x| < 1$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenségből:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x.$$

Másrészt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+x-x}{n+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n}$$

mert $\frac{x}{n+x} > -1$, ha $|x| < 1$ és $n \geq 2$. De

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n} = \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

Tehát ha $|x| < 1$, és $n \geq 2$, akkor

$$1 + x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Ha $|x| < 1$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenségből:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x.$$

Másrészt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+x-x}{n+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n}$$

mert $\frac{x}{n+x} > -1$, ha $|x| < 1$ és $n \geq 2$. De

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n} = \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

Tehát ha $|x| < 1$, és $n \geq 2$, akkor

$$1 + x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Ha $|x| < 1$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenségből:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x.$$

Másrészt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+x-x}{n+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n}$$

mert $\frac{x}{n+x} > -1$, ha $|x| < 1$ és $n \geq 2$. De

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n} = \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

Tehát ha $|x| < 1$, és $n \geq 2$, akkor

$$1 + x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Ha $|x| < 1$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenségből:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x.$$

Másrészt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+x-x}{n+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n}$$

mert $\frac{x}{n+x} > -1$, ha $|x| < 1$ és $n \geq 2$. De

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{n+x}\cdot n} = \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

Tehát ha $|x| < 1$, és $n \geq 2$, akkor

$$1 + x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{n+x}{n+x-nx}.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

A tanultak szerint $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Ebből

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}.$$

1. eset: $0 < x < 1$. Ekkor

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \le \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x} \le \frac{\frac{n+x}{n+x-nx}-1}{x} =$$

$$= \frac{\frac{n+x-(n+x-nx)}{n+x-nx}}{x} = \frac{\frac{nx}{n+x-nx}}{x} = \frac{n}{n+x-nx}$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x-nx} = \lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}-x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

A tanultak szerint $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Ebből

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}.$$

1. eset: $0 < x < 1$. Ekkor

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \le \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x} \le \frac{\frac{n+x}{n+x-nx}-1}{x} =$$

$$= \frac{\frac{n+x-(n+x-nx)}{n+x-nx}}{x} = \frac{\frac{nx}{n+x-nx}}{x} = \frac{n}{n+x-nx}$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x-nx} = \lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}-x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

A tanultak szerint $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Ebből

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}.$$

1. eset: $0 < x < 1$. Ekkor

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \le \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x} \le \frac{\frac{n+x}{n+x-nx}-1}{x} =$$

$$= \frac{\frac{n+x-(n+x-nx)}{n+x-nx}}{x} = \frac{\frac{nx}{n+x-nx}}{x} = \frac{n}{n+x-nx}$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x-nx} = \lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}-x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

A tanultak szerint $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Ebből

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}.$$

1. eset: $0 < x < 1$. Ekkor

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \le \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x} \le \frac{\frac{n+x}{n+x-nx}-1}{x} =$$

$$= \frac{\frac{n+x-(n+x-nx)}{n+x-nx}}{x} = \frac{\frac{nx}{n+x-nx}}{x} = \frac{n}{n+x-nx}$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x-nx} = \lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}-x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

A tanultak szerint $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Ebből

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}.$$

1. eset: $0 < x < 1$. Ekkor

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \le \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x} \le \frac{\frac{n+x}{n+x-nx}-1}{x} =$$

$$= \frac{\frac{n+x-(n+x-nx)}{n+x-nx}}{x} = \frac{\frac{nx}{n+x-nx}}{x} = \frac{n}{n+x-nx}$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x-nx} = \lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}-x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

A tanultak szerint $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Ebből

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}.$$

1. eset: $0 < x < 1$. Ekkor

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \le \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x} \le \frac{\frac{n+x}{n+x-nx}-1}{x} =$$

$$= \frac{\frac{n+x-(n+x-nx)}{n+x-nx}}{x} = \frac{\frac{nx}{n+x-nx}}{x} = \frac{n}{n+x-nx}$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x-nx} = \lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}-x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

A tanultak szerint $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Ebből

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}.$$

1. eset: $0 < x < 1$. Ekkor

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \le \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x} \le \frac{\frac{n+x}{n+x-nx}-1}{x} =$$

$$= \frac{\frac{n+x-(n+x-nx)}{n+x-nx}}{x} = \frac{\frac{nx}{n+x-nx}}{x} = \frac{n}{n+x-nx}$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x-nx} = \lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}-x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

A tanultak szerint $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Ebből

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}.$$

1. eset: $0 < x < 1$. Ekkor

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \le \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x} \le \frac{\frac{n+x}{n+x-nx}-1}{x} =$$

$$= \frac{\frac{n+x-(n+x-nx)}{n+x-nx}}{x} = \frac{\frac{nx}{n+x-nx}}{x} = \frac{n}{n+x-nx}$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x-nx} = \lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}-x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

A tanultak szerint $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Ebből

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}.$$

1. eset: $0 < x < 1$. Ekkor

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \le \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x} \le \frac{\frac{n+x}{n+x-nx}-1}{x} =$$

$$= \frac{\frac{n+x-(n+x-nx)}{n+x-nx}}{x} = \frac{\frac{nx}{n+x-nx}}{x} = \frac{n}{n+x-nx}$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x-nx} = \lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}-x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

A tanultak szerint $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Ebből

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}.$$

1. eset: $0 < x < 1$. Ekkor

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \le \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x} \le \frac{\frac{n+x}{n+x-nx}-1}{x} =$$

$$= \frac{\frac{n+x-(n+x-nx)}{n+x-nx}}{x} = \frac{\frac{nx}{n+x-nx}}{x} = \frac{n}{n+x-nx}$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x-nx} = \lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}-x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

A tanultak szerint $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Ebből

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}.$$

1. eset: $0 < x < 1$. Ekkor

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \le \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x} \le \frac{\frac{n+x}{n+x-nx}-1}{x} =$$

$$= \frac{\frac{n+x-(n+x-nx)}{n+x-nx}}{x} = \frac{\frac{nx}{n+x-nx}}{x} = \frac{n}{n+x-nx}$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x-nx} = \lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}-x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

A tanultak szerint $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Ebből

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}.$$

1. eset: $0 < x < 1$. Ekkor

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \le \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x} \le \frac{\frac{n+x}{n+x-nx}-1}{x} =$$

$$= \frac{\frac{n+x-(n+x-nx)}{n+x-nx}}{x} = \frac{\frac{nx}{n+x-nx}}{x} = \frac{n}{n+x-nx}$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x-nx} = \lim_{x\to 0+0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}-x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

a rendőr-elv miatt $\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

2. eset: $-1 < x < 0$. Ekkor

$$1 = \frac{1 + x - 1}{x} \geq \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1}{x} \geq \frac{n}{n + x - nx}.$$

Ebből az 1. esethez hasonlóan kapjuk a rendőr-elv segítségével, hogy

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

2. eset: $-1 < x < 0$. Ekkor

$$1 = \frac{1 + x - 1}{x} \geq \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1}{x} \geq \frac{n}{n + x - nx}.$$

Ebből az 1. esethez hasonlóan kapjuk a rendőr-elv segítségével, hogy

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

2. eset: $-1 < x < 0$. Ekkor

$$1 = \frac{1 + x - 1}{x} \geq \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1}{x} \geq \frac{n}{n + x - nx}.$$

Ebből az 1. esethez hasonlóan kapjuk a rendőr-elv segítségével, hogy

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Tétel bizonyítása.

Legyen $f(x) = e^x$. Ekkor

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a},$$

ahol $a = x - x_0$. De a segédállításunk szerint $\lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1$, amiből a tétel következik.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Tétel bizonyítása.
Legyen $f(x) = e^x$. Ekkor

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a},$$

ahol $a = x - x_0$. De a segédállításunk szerint $\lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1$, amiből a tétel következik.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Tétel bizonyítása.
Legyen $f(x) = e^x$. Ekkor

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a},$$

ahol $a = x - x_0$. De a segédállításunk szerint $\lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1$, amiből a tétel következik.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Tétel bizonyítása.
Legyen $f(x) = e^x$. Ekkor

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a},$$

ahol $a = x - x_0$. De a segédállításunk szerint $\lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1$, amiből a tétel következik.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Tétel bizonyítása.
Legyen $f(x) = e^x$. Ekkor

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a},$$

ahol $a = x - x_0$. De a segédállításunk szerint $\lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1$, amiből a tétel következik.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Tétel bizonyítása.
Legyen $f(x) = e^x$. Ekkor

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a},$$

ahol $a = x - x_0$. De a segédállításunk szerint $\lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1$, amiből a tétel következik.

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

Tétel bizonyítása.
Legyen $f(x) = e^x$. Ekkor

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a},$$

ahol $a = x - x_0$. De a segédállításunk szerint $\lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1$, amiből a tétel következik.

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a), \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x \ln(a)}\right)' = e^{x \ln(a)} \cdot (x \ln(a))' = a^x \ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}; \quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}.(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}.(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}\cdot(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}.(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}\cdot(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}\cdot(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}.(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}.(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}.(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}.(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}.(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}.(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}.(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x};\quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ (\ln(x))' = \frac{1}{x},\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Bizonyítás.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}.(x\ln(a))' = a^x\ln(a).$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}; \quad (\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Bizonyítás.

$$(x^a)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^a\right)' = \left(e^{a\ln(x)}\right)' =$$

$$= e^{a\ln(x)} \cdot (a\ln(x))' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Bizonyítás.

$$(x^a)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^a\right)' = \left(e^{a\ln(x)}\right)' =$$

$$= e^{a\ln(x)} \cdot (a\ln(x))' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Bizonyítás.

$$(x^a)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^a\right)' = \left(e^{a\ln(x)}\right)' =$$

$$= e^{a\ln(x)} \cdot (a\ln(x))' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Bizonyítás.

$$(x^a)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^a\right)' = \left(e^{a\ln(x)}\right)' =$$

$$= e^{a\ln(x)} \cdot (a\ln(x))' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Bizonyítás.

$$(x^a)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^a\right)' = \left(e^{a\ln(x)}\right)' =$$

$$= e^{a\ln(x)} \cdot (a\ln(x))' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Bizonyítás.

$$(x^a)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^a\right)' = \left(e^{a\ln(x)}\right)' =$$

$$= e^{a\ln(x)} \cdot (a\ln(x))' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

HATVÁNYFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

TÉTEL

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Bizonyítás.

$$(x^a)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^a\right)' = \left(e^{a\ln(x)}\right)' =$$

$$= e^{a\ln(x)} \cdot (a\ln(x))' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

SZÖGFÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

Bizonyítás. A múlt órán szerepelt, hogy $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

$$(\mathrm{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x).$$

A $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ azonosság hasonlóan vezethető le.

SZÖGFÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

Bizonyítás. A múlt órán szerepelt, hogy $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

$$(\mathrm{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x).$$

A $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ azonosság hasonlóan vezethető le.

SZÖGFÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

Bizonyítás. A múlt órán szerepelt, hogy $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

$$(\mathrm{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x).$$

A $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ azonosság hasonlóan vezethető le.

SZÖGFÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

Bizonyítás. A múlt órán szerepelt, hogy $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

$$(\mathrm{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x).$$

A $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ azonosság hasonlóan vezethető le.

SZÖGFÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

Bizonyítás. A múlt órán szerepelt, hogy $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

$$(\mathrm{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x).$$

A $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ azonosság hasonlóan vezethető le.

SZÖGFÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

Bizonyítás. A múlt órán szerepelt, hogy $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

$$(\mathrm{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x).$$

A $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ azonosság hasonlóan vezethető le.

SZÖGFÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

Bizonyítás. A múlt órán szerepelt, hogy $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

$$(\mathrm{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x).$$

A $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ azonosság hasonlóan vezethető le.

SZÖGFÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

Bizonyítás. A múlt órán szerepelt, hogy $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

$$(\mathrm{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x).$$

A $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ azonosság hasonlóan vezethető le.

SZÖGFÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

Bizonyítás. A múlt órán szerepelt, hogy $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

$$(\mathrm{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x).$$

A $(\mathrm{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ azonosság hasonlóan vezethető le.

CIKLOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Bizonyítás.
A múlt órán szerepelt, hogy $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Belátjuk, hogy $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

ahol használtuk az $f(f^{-1}(x)) = x$ azonosságot.
A többi azonosság hasonlóan látható be.

CIKLOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Bizonyítás.

A múlt órán szerepelt, hogy $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Belátjuk, hogy $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

ahol használtuk az $f(f^{-1}(x)) = x$ azonosságot.
A többi azonosság hasonlóan látható be.

CIKLOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Bizonyítás.
A múlt órán szerepelt, hogy $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Belátjuk, hogy $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

ahol használtuk az $f(f^{-1}(x)) = x$ azonosságot.
A többi azonosság hasonlóan látható be.

CIKLOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Bizonyítás.
A múlt órán szerepelt, hogy $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Belátjuk, hogy $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

ahol használtuk az $f(f^{-1}(x)) = x$ azonosságot.
A többi azonosság hasonlóan látható be.

CIKLOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Bizonyítás.
A múlt órán szerepelt, hogy $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Belátjuk, hogy $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

ahol használtuk az $f(f^{-1}(x)) = x$ azonosságot.
A többi azonosság hasonlóan látható be.

CIKLOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Bizonyítás.
A múlt órán szerepelt, hogy $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Belátjuk, hogy $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

ahol használtuk az $f(f^{-1}(x)) = x$ azonosságot.
A többi azonosság hasonlóan látható be.

CIKLOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Bizonyítás.
A múlt órán szerepelt, hogy $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Belátjuk, hogy $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

ahol használtuk az $f(f^{-1}(x)) = x$ azonosságot.
A többi azonosság hasonlóan látható be.

CIKLOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Bizonyítás.
A múlt órán szerepelt, hogy $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Belátjuk, hogy $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

ahol használtuk az $f(f^{-1}(x)) = x$ azonosságot.
A többi azonosság hasonlóan látható be.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INVERZEIK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$, $(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x)$, $(\mathrm{th}(x))' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, $(\mathrm{cth}(x))' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$. *Emellett* $(\mathrm{arsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\mathrm{arch}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\mathrm{arth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$, $(\mathrm{arcth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás.Az elsőt belátjuk, a többi az előzőekhez hasonlóan vezethető le.

$$(\mathrm{sh}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-x)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}(x).$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INVERZEIK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$, $(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x)$, $(\mathrm{th}(x))' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, $(\mathrm{cth}(x))' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$. *Emellett* $(\mathrm{arsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\mathrm{arch}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\mathrm{arth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$, $(\mathrm{arcth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás.Az elsőt belátjuk, a többi az előzőekhez hasonlóan vezethető le.

$$(\mathrm{sh}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-x)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}(x).$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INVERZEIK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$, $(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x)$, $(\mathrm{th}(x))' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, $(\mathrm{cth}(x))' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$. *Emellett* $(\mathrm{arsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\mathrm{arch}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\mathrm{arth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$, $(\mathrm{arcth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás. Az elsőt belátjuk, a többi az előzőekhez hasonlóan vezethető le.

$$(\mathrm{sh}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-x)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}(x).$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INVERZEIK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$, $(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x)$, $(\mathrm{th}(x))' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, $(\mathrm{cth}(x))' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$. *Emellett* $(\mathrm{arsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\mathrm{arch}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\mathrm{arth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$, $(\mathrm{arcth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás.Az elsőt belátjuk, a többi az előzőekhez hasonlóan vezethető le.

$$(\mathrm{sh}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-x)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}(x).$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INVERZEIK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$, $(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x)$, $(\mathrm{th}(x))' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, $(\mathrm{cth}(x))' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$. *Emellett* $(\mathrm{arsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\mathrm{arch}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\mathrm{arth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$, $(\mathrm{arcth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás.Az elsőt belátjuk, a többi az előzőekhez hasonlóan vezethető le.

$$(\mathrm{sh}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-x)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}(x).$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INVERZEIK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$, $(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x)$, $(\mathrm{th}(x))' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, $(\mathrm{cth}(x))' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$. *Emellett* $(\mathrm{arsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\mathrm{arch}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\mathrm{arth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$, $(\mathrm{arcth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás.Az elsőt belátjuk, a többi az előzőekhez hasonlóan vezethető le.

$$(\mathrm{sh}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-x)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}(x).$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INVERZEIK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$, $(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x)$, $(\mathrm{th}(x))' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, $(\mathrm{cth}(x))' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$. *Emellett* $(\mathrm{arsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\mathrm{arch}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\mathrm{arth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$, $(\mathrm{arcth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás.Az elsőt belátjuk, a többi az előzőekhez hasonlóan vezethető le.

$$(\mathrm{sh}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-x)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}(x).$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INVERZEIK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$, $(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x)$, $(\mathrm{th}(x))' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, $(\mathrm{cth}(x))' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$. *Emellett* $(\mathrm{arsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\mathrm{arch}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\mathrm{arth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$, $(\mathrm{arcth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás.Az elsőt belátjuk, a többi az előzőekhez hasonlóan vezethető le.

$$(\mathrm{sh}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-x)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}(x).$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INVERZEIK DERIVÁLTJAI

TÉTEL

$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$, $(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x)$, $(\mathrm{th}(x))' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, $(\mathrm{cth}(x))' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$. *Emellett* $(\mathrm{arsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\mathrm{arch}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\mathrm{arth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$, $(\mathrm{arcth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás.Az elsőt belátjuk, a többi az előzőekhez hasonlóan vezethető le.

$$(\mathrm{sh}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-x)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}(x).$$

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

TÉTEL

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f deriválható x_0-ban, akkor értelmezve van x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy f-nek x_0-ban pl. lokális maximuma van. Ekkor van olyan V környezete, hogy minden $x \in V$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.
Ha $x > x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Longrightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$$

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

TÉTEL

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f deriválható x_0-ban, akkor értelmezve van x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy f-nek x_0-ban pl. lokális maximuma van. Ekkor van olyan V környezete, hogy minden $x \in V$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.
Ha $x > x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Longrightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$$

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

TÉTEL

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f deriválható x_0-ban, akkor értelmezve van x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy f-nek x_0-ban pl. lokális maximuma van. Ekkor van olyan V környezete, hogy minden $x \in V$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.
Ha $x > x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Longrightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$$

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

TÉTEL

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f deriválható x_0-ban, akkor értelmezve van x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy f-nek x_0-ban pl. lokális maximuma van. Ekkor van olyan V környezete, hogy minden $x \in V$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.
Ha $x > x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Longrightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$$

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

TÉTEL

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f deriválható x_0-ban, akkor értelmezve van x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy f-nek x_0-ban pl. lokális maximuma van. Ekkor van olyan V környezete, hogy minden $x \in V$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.
Ha $x > x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Longrightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$$

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

TÉTEL

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f deriválható x_0-ban, akkor értelmezve van x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy f-nek x_0-ban pl. lokális maximuma van. Ekkor van olyan V környezete, hogy minden $x \in V$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.
Ha $x > x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Longrightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$$

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

TÉTEL

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f deriválható x_0-ban, akkor értelmezve van x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy f-nek x_0-ban pl. lokális maximuma van. Ekkor van olyan V környezete, hogy minden $x \in V$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Ha $x > x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Longrightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$$

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

TÉTEL

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f deriválható x_0-ban, akkor értelmezve van x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy f-nek x_0-ban pl. lokális maximuma van. Ekkor van olyan V környezete, hogy minden $x \in V$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.
Ha $x > x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Longrightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$$

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

TÉTEL

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f deriválható x_0-ban, akkor értelmezve van x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy f-nek x_0-ban pl. lokális maximuma van. Ekkor van olyan V környezete, hogy minden $x \in V$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.
Ha $x > x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Longrightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$$

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

TÉTEL

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f deriválható x_0-ban, akkor értelmezve van x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy f-nek x_0-ban pl. lokális maximuma van. Ekkor van olyan V környezete, hogy minden $x \in V$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.
Ha $x > x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Longrightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$$

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

Bizonyítás. Ha $x < x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Longrightarrow f'_-(x_0) \geq 0.$$

De $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, azaz $f'(x_0) = 0$.

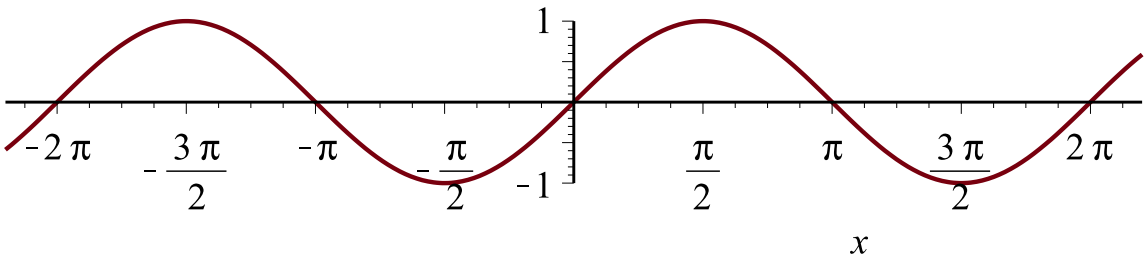

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$ függvény grafikonja

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

Bizonyítás. Ha $x < x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Longrightarrow f'_-(x_0) \geq 0.$$

De $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, azaz $f'(x_0) = 0$.

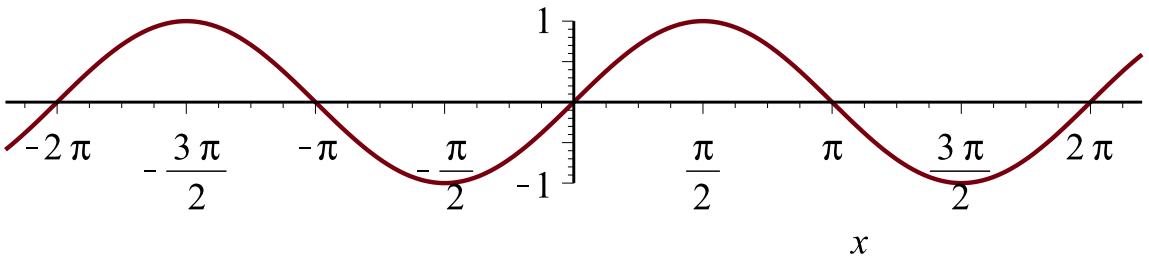

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$ függvény grafikonja

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

Bizonyítás. Ha $x < x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Longrightarrow f'_-(x_0) \geq 0.$$

De $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, azaz $f'(x_0) = 0$.

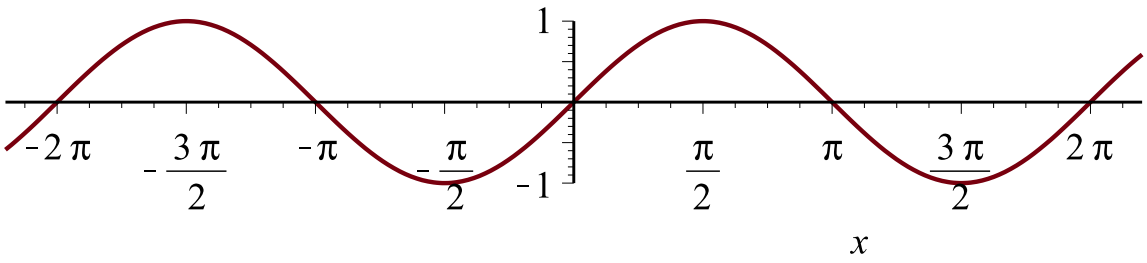

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$ függvény grafikonja

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK LÉTEZÉSÉNEK SZÜKSÉGES FELTÉTELE

Bizonyítás. Ha $x < x_0$ és $x \in V$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Longrightarrow f'_-(x_0) \geq 0.$$

De $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, azaz $f'(x_0) = 0$.

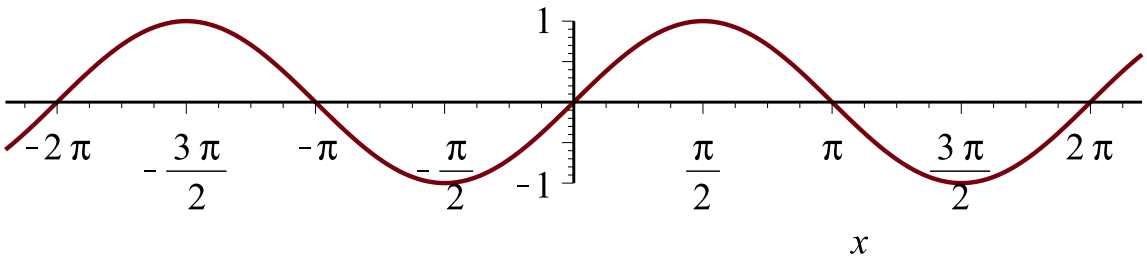

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$ függvény grafikonja

ROLLE-TÉTEL

TÉTEL

Legyen f folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n. Ha $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $c \in (a, b)$, ahol $f'(c) = 0$.

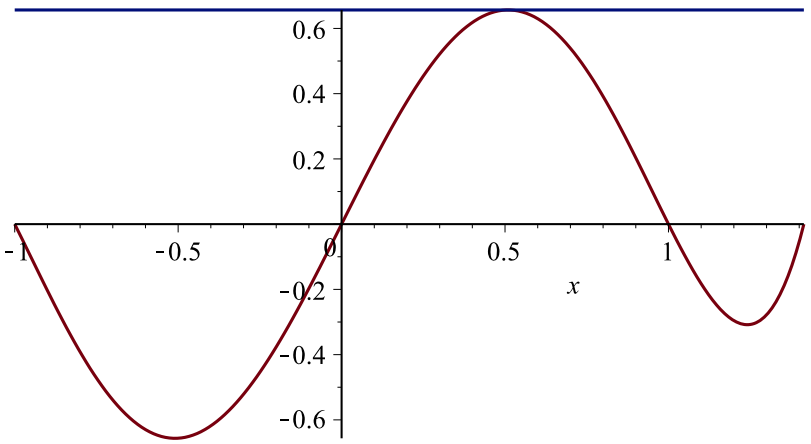

FIGURE: Az $x \mapsto x^5 - 3x^3 + 2x$ függvény grafikonja a $[-1, \sqrt{2}]$ intervallumon és érintője az $x_0 = \sqrt{0,9 - \sqrt{0,41}}$ pontban

ROLLE-TÉTEL

TÉTEL

Legyen f folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n. Ha $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $c \in (a, b)$, ahol $f'(c) = 0$.

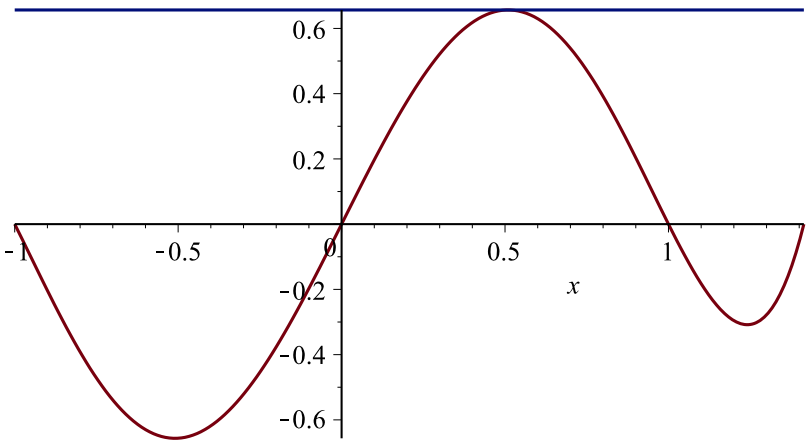

FIGURE: Az $x \mapsto x^5 - 3x^3 + 2x$ függvény grafikonja a $[-1, \sqrt{2}]$ intervallumon és érintője az $x_0 = \sqrt{0,9 - \sqrt{0,41}}$ pontban

ROLLE-TÉTEL

Bizonyítás.

A Weierstrass-tétel szerint f $[a, b]$-n felveszi a maximumát és a minimumát: léteznek olyan $c_1, c_2 \in [a, b]$ számok, hogy

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.

1. eset: $f(c_1) = f(c_2)$. Ekkor f egy konstans függvény $[a, b]$-n, azaz $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$-re.

2. eset: $f(c_1) \neq f(c_2)$. Ekkor $f(c_1)$ és $f(c_2)$ valamelyike nem $f(a) = f(b)$. Legyen pl. $c_1 \in (a, b)$. Ebből következik, hogy f deriválható c_1-ben, azaz az előző tétel szerint $f'(c_1) = 0$.

ROLLE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Weierstrass-tétel szerint f $[a, b]$-n felveszi a maximumát és a minimumát: léteznek olyan $c_1, c_2 \in [a, b]$ számok, hogy

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.
1. eset: $f(c_1) = f(c_2)$. Ekkor f egy konstans függvény $[a, b]$-n, azaz $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$-re.
2. eset: $f(c_1) \neq f(c_2)$. Ekkor $f(c_1)$ és $f(c_2)$ valamelyike nem $f(a) = f(b)$. Legyen pl. $c_1 \in (a, b)$. Ebből következik, hogy f deriválható c_1-ben, azaz az előző tétel szerint $f'(c_1) = 0$.

ROLLE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Weierstrass-tétel szerint f $[a, b]$-n felveszi a maximumát és a minimumát: léteznek olyan $c_1, c_2 \in [a, b]$ számok, hogy

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.
1. eset: $f(c_1) = f(c_2)$. Ekkor f egy konstans függvény $[a, b]$-n, azaz $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$-re.
2. eset: $f(c_1) \neq f(c_2)$. Ekkor $f(c_1)$ és $f(c_2)$ valamelyike nem $f(a) = f(b)$. Legyen pl. $c_1 \in (a, b)$. Ebből következik, hogy f deriválható c_1-ben, azaz az előző tétel szerint $f'(c_1) = 0$.

ROLLE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Weierstrass-tétel szerint f $[a, b]$-n felveszi a maximumát és a minimumát: léteznek olyan $c_1, c_2 \in [a, b]$ számok, hogy

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.
1. eset: $f(c_1) = f(c_2)$. Ekkor f egy konstans függvény $[a, b]$-n, azaz $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$-re.
2. eset: $f(c_1) \neq f(c_2)$. Ekkor $f(c_1)$ és $f(c_2)$ valamelyike nem $f(a) = f(b)$. Legyen pl. $c_1 \in (a, b)$. Ebből következik, hogy f deriválható c_1-ben, azaz az előző tétel szerint $f'(c_1) = 0$.

ROLLE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Weierstrass-tétel szerint f $[a, b]$-n felveszi a maximumát és a minimumát: léteznek olyan $c_1, c_2 \in [a, b]$ számok, hogy

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.
1. eset: $f(c_1) = f(c_2)$. Ekkor f egy konstans függvény $[a, b]$-n, azaz $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$-re.
2. eset: $f(c_1) \neq f(c_2)$. Ekkor $f(c_1)$ és $f(c_2)$ valamelyike nem $f(a) = f(b)$. Legyen pl. $c_1 \in (a, b)$. Ebből következik, hogy f deriválható c_1-ben, azaz az előző tétel szerint $f'(c_1) = 0$.

ROLLE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Weierstrass-tétel szerint f $[a, b]$-n felveszi a maximumát és a minimumát: léteznek olyan $c_1, c_2 \in [a, b]$ számok, hogy

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.
1. eset: $f(c_1) = f(c_2)$. Ekkor f egy konstans függvény $[a, b]$-n, azaz $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$-re.
2. eset: $f(c_1) \neq f(c_2)$. Ekkor $f(c_1)$ és $f(c_2)$ valamelyike nem $f(a) = f(b)$. Legyen pl. $c_1 \in (a, b)$. Ebből következik, hogy f deriválható c_1-ben, azaz az előző tétel szerint $f'(c_1) = 0$.

ROLLE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Weierstrass-tétel szerint f $[a, b]$-n felveszi a maximumát és a minimumát: léteznek olyan $c_1, c_2 \in [a, b]$ számok, hogy

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.
1. eset: $f(c_1) = f(c_2)$. Ekkor f egy konstans függvény $[a, b]$-n, azaz $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$-re.
2. eset: $f(c_1) \neq f(c_2)$. Ekkor $f(c_1)$ és $f(c_2)$ valamelyike nem $f(a) = f(b)$. Legyen pl. $c_1 \in (a, b)$. Ebből következik, hogy f deriválható c_1-ben, azaz az előző tétel szerint $f'(c_1) = 0$.

ROLLE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Weierstrass-tétel szerint f $[a, b]$-n felveszi a maximumát és a minimumát: léteznek olyan $c_1, c_2 \in [a, b]$ számok, hogy

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.
1. eset: $f(c_1) = f(c_2)$. Ekkor f egy konstans függvény $[a, b]$-n, azaz $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$-re.
2. eset: $f(c_1) \neq f(c_2)$. Ekkor $f(c_1)$ és $f(c_2)$ valamelyike nem $f(a) = f(b)$. Legyen pl. $c_1 \in (a, b)$. Ebből következik, hogy f deriválható c_1-ben, azaz az előző tétel szerint $f'(c_1) = 0$.

ROLLE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Weierstrass-tétel szerint f $[a, b]$-n felveszi a maximumát és a minimumát: léteznek olyan $c_1, c_2 \in [a, b]$ számok, hogy

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.
1. eset: $f(c_1) = f(c_2)$. Ekkor f egy konstans függvény $[a, b]$-n, azaz $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$-re.
2. eset: $f(c_1) \neq f(c_2)$. Ekkor $f(c_1)$ és $f(c_2)$ valamelyike nem $f(a) = f(b)$. Legyen pl. $c_1 \in (a, b)$. Ebből következik, hogy f deriválható c_1-ben, azaz az előző tétel szerint $f'(c_1) = 0$.

ROLLE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Weierstrass-tétel szerint f $[a, b]$-n felveszi a maximumát és a minimumát: léteznek olyan $c_1, c_2 \in [a, b]$ számok, hogy

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.
1. eset: $f(c_1) = f(c_2)$. Ekkor f egy konstans függvény $[a, b]$-n, azaz $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$-re.
2. eset: $f(c_1) \neq f(c_2)$. Ekkor $f(c_1)$ és $f(c_2)$ valamelyike nem $f(a) = f(b)$. Legyen pl. $c_1 \in (a, b)$. Ebből következik, hogy f deriválható c_1-ben, azaz az előző tétel szerint $f'(c_1) = 0$.

ROLLE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Weierstrass-tétel szerint f $[a, b]$-n felveszi a maximumát és a minimumát: léteznek olyan $c_1, c_2 \in [a, b]$ számok, hogy

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.
1. eset: $f(c_1) = f(c_2)$. Ekkor f egy konstans függvény $[a, b]$-n, azaz $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$-re.
2. eset: $f(c_1) \neq f(c_2)$. Ekkor $f(c_1)$ és $f(c_2)$ valamelyike nem $f(a) = f(b)$. Legyen pl. $c_1 \in (a, b)$. Ebből következik, hogy f deriválható c_1-ben, azaz az előző tétel szerint $f'(c_1) = 0$.

LAGRANGE-TÉTEL

TÉTEL

Legyen f folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n. Ekkor van olyan $c \in (a, b)$, ahol $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

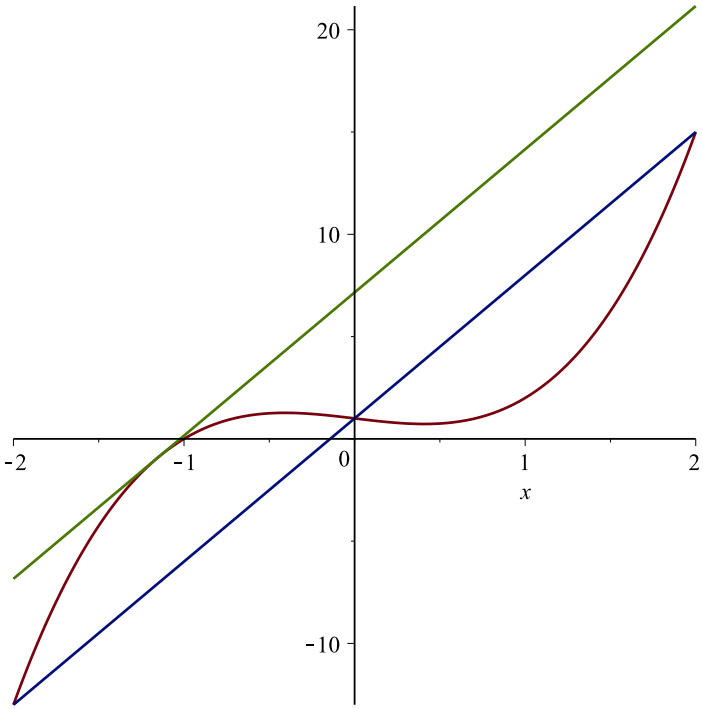

FIGURE: Az $x \mapsto 2x^3 - x + 1$ függvény grafikonja a $[-2, 2]$ intervallumon (piros), a végpontjait összekötő szelő (kék), és az érintője az $x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ pontban (zöld)

LAGRANGE-TÉTEL

TÉTEL

Legyen f folytonos $[a,b]$-n és deriválható (a,b)-n. Ekkor van olyan $c \in (a,b)$, ahol $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

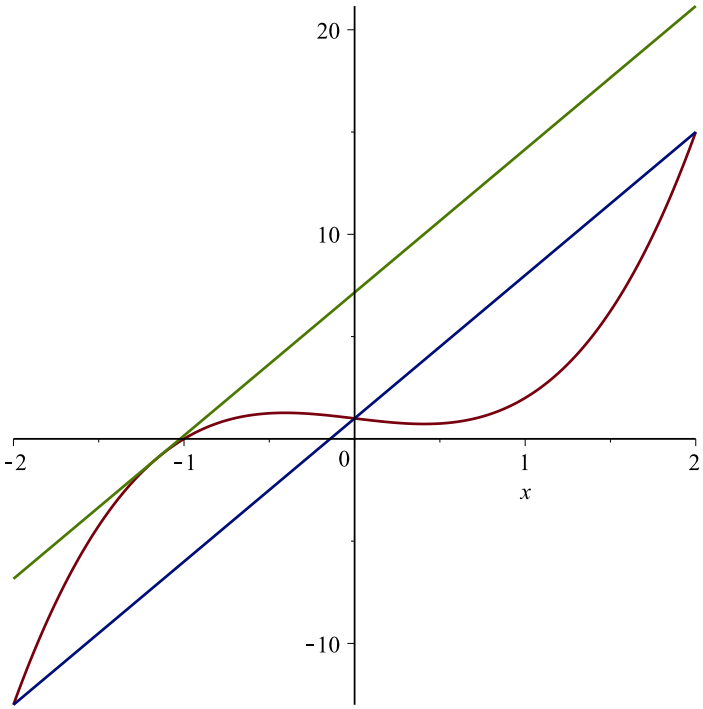

FIGURE: Az $x \mapsto 2x^3 - x + 1$ függvény grafikonja a $[-2,2]$ intervallumon (piros), a végpontjait összekötő szelő (kék), és az érintője az $x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ pontban (zöld)

LAGRANGE-TÉTEL

Bizonyítás.

A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A feltételek szerint F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n. Másrészt

$$F(a) = f(a), \quad F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Tehát a Rolle-tétel szerint van olyan $c \in (a, b)$, ahol $0 = F'(c)$. De $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tehát

$$F'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

LAGRANGE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A feltételek szerint F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n. Másrészt

$$F(a) = f(a), \quad F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Tehát a Rolle-tétel szerint van olyan $c \in (a, b)$, ahol $0 = F'(c)$. De $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tehát

$$F'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

LAGRANGE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A feltételek szerint F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n. Másrészt

$$F(a) = f(a), \quad F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Tehát a Rolle-tétel szerint van olyan $c \in (a, b)$, ahol $0 = F'(c)$. De $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tehát

$$F'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

LAGRANGE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A feltételek szerint F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n.
Másrészt

$$F(a) = f(a), \quad F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Tehát a Rolle-tétel szerint van olyan $c \in (a, b)$, ahol $0 = F'(c)$.
De $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tehát

$$F'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

LAGRANGE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A feltételek szerint F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n. Másrészt

$$F(a) = f(a), \quad F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Tehát a Rolle-tétel szerint van olyan $c \in (a, b)$, ahol $0 = F'(c)$. De $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tehát

$$F'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

LAGRANGE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A feltételek szerint F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n. Másrészt

$$F(a) = f(a), \quad F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Tehát a Rolle-tétel szerint van olyan $c \in (a, b)$, ahol $0 = F'(c)$. De $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tehát

$$F'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

LAGRANGE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A feltételek szerint F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n. Másrészt

$$F(a) = f(a), \quad F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Tehát a Rolle-tétel szerint van olyan $c \in (a, b)$, ahol $0 = F'(c)$.
De $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tehát

$$F'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

LAGRANGE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A feltételek szerint F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n. Másrészt

$$F(a) = f(a), \quad F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Tehát a Rolle-tétel szerint van olyan $c \in (a, b)$, ahol $0 = F'(c)$. De $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tehát

$$F'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

LAGRANGE-TÉTEL

Bizonyítás.
A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A feltételek szerint F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n. Másrészt

$$F(a) = f(a), \quad F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Tehát a Rolle-tétel szerint van olyan $c \in (a, b)$, ahol $0 = F'(c)$. De $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tehát

$$F'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

CAUCHY-TÉTEL

TÉTEL

Legyen f, g folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, és tegyük fel, hogy g' sehol nem nulla (a, b)-n. Ekkor van olyan $c \in (a, b)$, ahol

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás.

Mivel g' sehol nem nulla (a, b)-n, a Rolle-tétel szerint $g(a) \neq g(b)$.

A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))\,.$$

CAUCHY-TÉTEL

TÉTEL

Legyen f, g folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, és tegyük fel, hogy g' sehol nem nulla (a, b)-n. Ekkor van olyan $c \in (a, b)$, ahol

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás.

Mivel g' sehol nem nulla (a, b)-n, a Rolle-tétel szerint $g(a) \neq g(b)$.

A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))\,.$$

CAUCHY-TÉTEL

TÉTEL

Legyen f, g folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, és tegyük fel, hogy g' sehol nem nulla (a, b)-n. Ekkor van olyan $c \in (a, b)$, ahol

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás.

Mivel g' sehol nem nulla (a, b)-n, a Rolle-tétel szerint $g(a) \neq g(b)$.

A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))\,.$$

CAUCHY-TÉTEL

TÉTEL

Legyen f, g folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, és tegyük fel, hogy g' sehol nem nulla (a, b)-n. Ekkor van olyan $c \in (a, b)$, ahol

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás.

Mivel g' sehol nem nulla (a, b)-n, a Rolle-tétel szerint $g(a) \neq g(b)$.

A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))\,.$$

CAUCHY-TÉTEL

TÉTEL

Legyen f, g folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, és tegyük fel, hogy g' sehol nem nulla (a, b)-n. Ekkor van olyan $c \in (a, b)$, ahol

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás.

Mivel g' sehol nem nulla (a, b)-n, a Rolle-tétel szerint $g(a) \neq g(b)$.

A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))\,.$$

CAUCHY-TÉTEL

TÉTEL

Legyen f, g folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, és tegyük fel, hogy g' sehol nem nulla (a, b)-n. Ekkor van olyan $c \in (a, b)$, ahol

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás.

Mivel g' sehol nem nulla (a, b)-n, a Rolle-tétel szerint $g(a) \neq g(b)$.

A Rolle-tételt fogjuk alkalmazni. Legyen

$$F(x) = f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))\,.$$

CAUCHY-TÉTEL

Bizonyítás.
Ekkor F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, valamint

$$F(a) = f(a)\,(g(b) - g(a)) - g(a)\,(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b),$$

$$F(b) = f(b)\,(g(b) - g(a)) - g(b)\,(f(b) - f(a)) = -f(a)g(b) + g(b)f(a).$$

Tehát van olyan $c \in (a, b)$, ahol $F'(c) = 0$. De
$F'(x) = f'(x)\,(g(b) - g(a)) - g'(x)\,(f(b) - f(a))$, azaz

$$F'(c) = 0 \iff \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

CAUCHY-TÉTEL

Bizonyítás.
Ekkor F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, valamint

$$F(a) = f(a)\,(g(b) - g(a)) - g(a)\,(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b),$$

$$F(b) = f(b)\,(g(b) - g(a)) - g(b)\,(f(b) - f(a)) = -f(a)g(b) + g(b)f(a).$$

Tehát van olyan $c \in (a, b)$, ahol $F'(c) = 0$. De
$F'(x) = f'(x)\,(g(b) - g(a)) - g'(x)\,(f(b) - f(a))$, azaz

$$F'(c) = 0 \iff \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

CAUCHY-TÉTEL

Bizonyítás.
Ekkor F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, valamint

$$F(a) = f(a)\,(g(b) - g(a)) - g(a)\,(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b),$$

$$F(b) = f(b)\,(g(b) - g(a)) - g(b)\,(f(b) - f(a)) = -f(a)g(b) + g(b)f(a).$$

Tehát van olyan $c \in (a, b)$, ahol $F'(c) = 0$. De
$F'(x) = f'(x)\,(g(b) - g(a)) - g'(x)\,(f(b) - f(a))$, azaz

$$F'(c) = 0 \iff \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

CAUCHY-TÉTEL

Bizonyítás.
Ekkor F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, valamint

$$F(a) = f(a)\,(g(b) - g(a)) - g(a)\,(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b),$$

$$F(b) = f(b)\,(g(b) - g(a)) - g(b)\,(f(b) - f(a)) = -f(a)g(b) + g(b)f(a).$$

Tehát van olyan $c \in (a, b)$, ahol $F'(c) = 0$. De
$F'(x) = f'(x)\,(g(b) - g(a)) - g'(x)\,(f(b) - f(a))$, azaz

$$F'(c) = 0 \iff \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

CAUCHY-TÉTEL

Bizonyítás.
Ekkor F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, valamint

$$F(a) = f(a)\,(g(b) - g(a)) - g(a)\,(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b),$$

$$F(b) = f(b)\,(g(b) - g(a)) - g(b)\,(f(b) - f(a)) = -f(a)g(b) + g(b)f(a).$$

Tehát van olyan $c \in (a, b)$, ahol $F'(c) = 0$. De
$F'(x) = f'(x)\,(g(b) - g(a)) - g'(x)\,(f(b) - f(a))$, azaz

$$F'(c) = 0 \iff \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

CAUCHY-TÉTEL

Bizonyítás.
Ekkor F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, valamint

$$F(a) = f(a)\,(g(b) - g(a)) - g(a)\,(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b),$$

$$F(b) = f(b)\,(g(b) - g(a)) - g(b)\,(f(b) - f(a)) = -f(a)g(b) + g(b)f(a).$$

Tehát van olyan $c \in (a, b)$, ahol $F'(c) = 0$. De
$F'(x) = f'(x)\,(g(b) - g(a)) - g'(x)\,(f(b) - f(a))$, azaz

$$F'(c) = 0 \iff \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

CAUCHY-TÉTEL

Bizonyítás.
Ekkor F folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, valamint

$$F(a) = f(a)\,(g(b) - g(a)) - g(a)\,(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b),$$

$$F(b) = f(b)\,(g(b) - g(a)) - g(b)\,(f(b) - f(a)) = -f(a)g(b) + g(b)f(a).$$

Tehát van olyan $c \in (a, b)$, ahol $F'(c) = 0$. De
$F'(x) = f'(x)\,(g(b) - g(a)) - g'(x)\,(f(b) - f(a))$, azaz

$$F'(c) = 0 \iff \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEK

MEGJEGYZÉS

Ha a Lagrange-tételben $f(a) = f(b)$, akkor a Lagrange-tétel állítása egybeesik a Rolle-tétel állításával, mert ekkor

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

MEGJEGYZÉS

Ha a Cauchy-tételben $g(x) = x$, akkor $g'(x) = 1$ sehol nem nulla, tehát g-re teljesülnek a Cauchy-tétel feltételei. De ekkor a Cauchy-tétel állítása egybeesik a Lagrange-tétel állításával, mert ebből

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = f'(c), \text{ és } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEK

MEGJEGYZÉS

Ha a Lagrange-tételben $f(a) = f(b)$, akkor a Lagrange-tétel állítása egybeesik a Rolle-tétel állításával, mert ekkor

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

MEGJEGYZÉS

Ha a Cauchy-tételben $g(x) = x$, akkor $g'(x) = 1$ sehol nem nulla, tehát g-re teljesülnek a Cauchy-tétel feltételei. De ekkor a Cauchy-tétel állítása egybeesik a Lagrange-tétel állításával, mert ebből

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = f'(c), \text{ és } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEK

MEGJEGYZÉS

Ha a Lagrange-tételben $f(a) = f(b)$, akkor a Lagrange-tétel állítása egybeesik a Rolle-tétel állításával, mert ekkor

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

MEGJEGYZÉS

Ha a Cauchy-tételben $g(x) = x$, akkor $g'(x) = 1$ sehol nem nulla, tehát g-re teljesülnek a Cauchy-tétel feltételei. De ekkor a Cauchy-tétel állítása egybeesik a Lagrange-tétel állításával, mert ebből

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = f'(c), \text{ és } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$