14. ELŐADÁS: A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

TÉTEL

Legyen f, g deriválható x_0 egy pontozott környezetében. Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, és a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

TÉTEL

Legyen f, g deriválható x_0 egy pontozott környezetében. Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, és a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

TÉTEL

Legyen f, g deriválható x_0 egy pontozott környezetében. Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, és a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

TÉTEL

Legyen f, g deriválható x_0 egy pontozott környezetében. Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, és a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

TÉTEL

Legyen f, g deriválható x_0 egy pontozott környezetében. Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, és a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$, amiből következik, hogy f és g folytonosak x_0-ban. Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

ahol felhasználtuk, hogy a Cauchy-tétel feltételei teljesülnek f-re és g-re az $[x_0, x]$ intervallumon, így van olyan $c_x \in (x_0, x)$, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c_x \to x_0$, tehát

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$, amiből következik, hogy f és g folytonosak x_0-ban. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

ahol felhasználtuk, hogy a Cauchy-tétel feltételei teljesülnek f-re és g-re az $[x_0, x]$ intervallumon, így van olyan $c_x \in (x_0, x)$, hogy

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c_x \to x_0$, tehát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$, amiből következik, hogy f és g folytonosak x_0-ban. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

ahol felhasználtuk, hogy a Cauchy-tétel feltételei teljesülnek f-re és g-re az $[x_0, x]$ intervallumon, így van olyan $c_x \in (x_0, x)$, hogy

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c_x \to x_0$, tehát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$, amiből következik, hogy f és g folytonosak x_0-ban. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

ahol felhasználtuk, hogy a Cauchy-tétel feltételei teljesülnek f-re és g-re az $[x_0, x]$ intervallumon, így van olyan $c_x \in (x_0, x)$, hogy

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c_x \to x_0$, tehát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$, amiből következik, hogy f és g folytonosak x_0-ban. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

ahol felhasználtuk, hogy a Cauchy-tétel feltételei teljesülnek f-re és g-re az $[x_0, x]$ intervallumon, így van olyan $c_x \in (x_0, x)$, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c_x \to x_0$, tehát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$, amiből következik, hogy f és g folytonosak x_0-ban. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

ahol felhasználtuk, hogy a Cauchy-tétel feltételei teljesülnek f-re és g-re az $[x_0, x]$ intervallumon, így van olyan $c_x \in (x_0, x)$, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c_x \to x_0$, tehát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$, amiből következik, hogy f és g folytonosak x_0-ban. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

ahol felhasználtuk, hogy a Cauchy-tétel feltételei teljesülnek f-re és g-re az $[x_0, x]$ intervallumon, így van olyan $c_x \in (x_0, x)$, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c_x \to x_0$, tehát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$, amiből következik, hogy f és g folytonosak x_0-ban. Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

ahol felhasználtuk, hogy a Cauchy-tétel feltételei teljesülnek f-re és g-re az $[x_0, x]$ intervallumon, így van olyan $c_x \in (x_0, x)$, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c_x \to x_0$, tehát

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$, amiből következik, hogy f és g folytonosak x_0-ban. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

ahol felhasználtuk, hogy a Cauchy-tétel feltételei teljesülnek f-re és g-re az $[x_0, x]$ intervallumon, így van olyan $c_x \in (x_0, x)$, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c_x \to x_0$, tehát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$, amiből következik, hogy f és g folytonosak x_0-ban. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

ahol felhasználtuk, hogy a Cauchy-tétel feltételei teljesülnek f-re és g-re az $[x_0, x]$ intervallumon, így van olyan $c_x \in (x_0, x)$, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c_x \to x_0$, tehát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$, amiből következik, hogy f és g folytonosak x_0-ban. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

ahol felhasználtuk, hogy a Cauchy-tétel feltételei teljesülnek f-re és g-re az $[x_0, x]$ intervallumon, így van olyan $c_x \in (x_0, x)$, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c_x \to x_0$, tehát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

MEGJEGYZÉS

A fenti tétel nem jelenti azt, hogy ha $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *nem létezik, akkor* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *sem létezik. Például, ha* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$, *akkor* $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, *és*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ de}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

ami nem létezik.

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

MEGJEGYZÉS

A fenti tétel nem jelenti azt, hogy ha $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *nem létezik, akkor* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *sem létezik. Például, ha* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$, *akkor* $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, *és*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ de}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

ami nem létezik.

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

MEGJEGYZÉS

A fenti tétel nem jelenti azt, hogy ha $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *nem létezik, akkor* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *sem létezik. Például, ha* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$, *akkor* $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, *és*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ de}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

ami nem létezik.

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

MEGJEGYZÉS

A fenti tétel nem jelenti azt, hogy ha $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *nem létezik, akkor* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *sem létezik. Például, ha* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$, *akkor* $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, *és*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ de}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

ami nem létezik.

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

MEGJEGYZÉS

A fenti tétel nem jelenti azt, hogy ha $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *nem létezik, akkor* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *sem létezik. Például, ha* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$, *akkor* $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, *és*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ de}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

ami nem létezik.

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

MEGJEGYZÉS

A fenti tétel nem jelenti azt, hogy ha $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *nem létezik, akkor* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *sem létezik. Például, ha* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$, *akkor* $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, *és*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ de}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

ami nem létezik.

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

MEGJEGYZÉS

A fenti tétel nem jelenti azt, hogy ha $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *nem létezik, akkor* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *sem létezik. Például, ha* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$, *akkor* $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, *és*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ de}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

ami nem létezik.

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

MEGJEGYZÉS

A fenti tétel nem jelenti azt, hogy ha $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *nem létezik, akkor* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *sem létezik. Például, ha* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$, *akkor* $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, *és*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ de}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

ami nem létezik.

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

MEGJEGYZÉS

A fenti tétel nem jelenti azt, hogy ha $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *nem létezik, akkor* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *sem létezik. Például, ha* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$, *akkor* $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, *és*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ de}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

ami nem létezik.

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

MEGJEGYZÉS

A fenti tétel nem jelenti azt, hogy ha $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *nem létezik, akkor* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *sem létezik. Például, ha* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$, *akkor* $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, *és*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ de}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

ami nem létezik.

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

TÉTEL

Legyen f, g deriválható x_0 egy pontozott környezetében. Ha $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, és a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

TÉTEL

Legyen f, g deriválható x_0 egy pontozott környezetében. Ha $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, és a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

TÉTEL

Legyen f, g deriválható x_0 egy pontozott környezetében. Ha $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, és a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

TÉTEL

Legyen f, g deriválható x_0 egy pontozott környezetében. Ha $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, és a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BERNOULLI-L'HOSPITAL SZABÁLY

TÉTEL

Legyen f, g deriválható x_0 egy pontozott környezetében. Ha $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, és a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\sin(x)}^{0/0}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{0/0}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\sin(x)\ln(x)}^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\frac{-\infty}{+\infty}}}{1/\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2}\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\operatorname{tg}(x)=0.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\sin(x)}^{0/0}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{0/0}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\sin(x)\ln(x)}^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\frac{-\infty}{+\infty}}}{1/\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2}\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\operatorname{tg}(x)=0.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\sin(x)}^{0/0}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{0/0}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\sin(x)\ln(x)}^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\frac{-\infty}{+\infty}}}{1/\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2}\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\operatorname{tg}(x)=0.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\sin(x)}^{0/0}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{0/0}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\sin(x)\ln(x)}^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\frac{-\infty}{+\infty}}}{1/\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2}\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\operatorname{tg}(x)=0.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\sin(x)}^{0/0}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{0/0}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\sin(x)\ln(x)}^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\frac{-\infty}{+\infty}}}{1/\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2}\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\operatorname{tg}(x)=0.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\sin(x)}^{0/0}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{0/0}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\sin(x)\ln(x)}^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\frac{-\infty}{+\infty}}}{1/\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2}\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\operatorname{tg}(x)=0.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\sin(x)}^{0/0}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{0/0}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\sin(x)\ln(x)}^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\frac{-\infty}{+\infty}}}{1/\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2}\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\operatorname{tg}(x)=0.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\sin(x)}^{0/0}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{0/0}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\sin(x)\ln(x)}^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\frac{-\infty}{+\infty}}}{1/\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2}\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\operatorname{tg}(x)=0.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\sin(x)}^{0/0}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{0/0}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\sin(x)\ln(x)}^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\frac{-\infty}{+\infty}}}{1/\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2}\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\operatorname{tg}(x)=0.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\sin(x)}^{0/0}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{0/0}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\sin(x)\ln(x)}^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\frac{-\infty}{+\infty}}}{1/\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2}\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\operatorname{tg}(x)=0.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\sin(x)}^{0/0}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{0/0}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\sin(x)\ln(x)}^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\frac{-\infty}{+\infty}}}{1/\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2}\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\operatorname{tg}(x)=0.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\sin(x)}^{0/0}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{0/0}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\sin(x)\ln(x)}^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\frac{-\infty}{+\infty}}}{1/\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2}\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+0}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\operatorname{tg}(x)=0.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)}^{\infty-\infty}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\sin(x)-x\cos(x)}^{0/0}}{x\sin(x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos(x)-(\cos(x)-x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin(x))}{\frac{\sin(x)}{x}+\cos(x)}=0$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)}^{\infty-\infty}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\overbrace{\sin(x)-x\cos(x)}^{0/0}}{x\sin(x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos(x)-(\cos(x)-x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin(x))}{\frac{\sin(x)}{x}+\cos(x)}=0$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)}^{\infty-\infty}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)}}^{0/0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos(x)-(\cos(x)-x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin(x))}{\frac{\sin(x)}{x}+\cos(x)}=0$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)}^{\infty-\infty}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)}}^{0/0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos(x)-(\cos(x)-x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin(x))}{\frac{\sin(x)}{x}+\cos(x)}=0$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)}^{\infty-\infty}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)}}^{0/0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos(x)-(\cos(x)-x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin(x))}{\frac{\sin(x)}{x}+\cos(x)}=0$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)}^{\infty-\infty}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)}}^{0/0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos(x)-(\cos(x)-x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin(x))}{\frac{\sin(x)}{x}+\cos(x)}=0$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right)}^{\infty-\infty}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\overbrace{\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)}}^{0/0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos(x)-(\cos(x)-x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{x\sin(x))}{\sin(x)+x\cos(x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin(x))}{\frac{\sin(x)}{x}+\cos(x)}=0$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{x^{\frac{1}{x}}}^{\infty^0} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{\ln(x)}{x}}^{\frac{+\infty}{+\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{x^{\frac{1}{x}}}^{\infty^0} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{\ln(x)}{x}}^{\frac{+\infty}{+\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{x^{\frac{1}{x}}}^{\infty^0} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{\ln(x)}{x}}^{\frac{+\infty}{+\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{x^{\frac{1}{x}}}^{\infty^0} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{\ln(x)}{x}}^{\frac{+\infty}{+\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{x^{\frac{1}{x}}}^{\infty^0} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{\ln(x)}{x}}^{\frac{+\infty}{+\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{x^{\frac{1}{x}}}^{\infty^0} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{\ln(x)}{x}}^{\frac{+\infty}{+\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{x^{\frac{1}{x}}}^{\infty^0} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{\ln(x)}{x}}^{\frac{+\infty}{+\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{x^{\frac{1}{x}}}^{\infty^0} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{\ln(x)}{x}}^{\frac{+\infty}{+\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1.$$

PÉLDÁK

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{x^{\frac{1}{x}}}^{\infty^0} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{\ln(x)}{x}}^{\frac{+\infty}{+\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1.$$

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

EMLÉKEZTETŐ

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$ (az állítás nem megfordítható, ld. pl. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$).

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0-ban. Ha x_0-nak van olyan V környezete, hogy

1. *minden $x \in V \cap D$, $x < x_0$ esetén*
   $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) \geq f(x_0)$ / $f(x) < f(x_0)$ / $f(x) > f(x_0)$,
   valamint
2. *minden $x \in V \cap D$, $x > x_0$ esetén*
   $f(x) \geq f(x_0)$ / $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) > f(x_0)$ / $f(x) < f(x_0)$,

akkor azt mondjuk, hogy f x_0-ban lokálisan nő / lokálisan csökken / szigorúan lokálisan nő / szigorúan lokálisan csökken.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

EMLÉKEZTETŐ

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$ (az állítás nem megfordítható, ld. pl. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$).

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0-ban. Ha x_0-nak van olyan V környezete, hogy

1. *minden $x \in V \cap D$, $x < x_0$ esetén*
   $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) \geq f(x_0)$ / $f(x) < f(x_0)$ / $f(x) > f(x_0)$,
   valamint
2. *minden $x \in V \cap D$, $x > x_0$ esetén*
   $f(x) \geq f(x_0)$ / $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) > f(x_0)$ / $f(x) < f(x_0)$,

akkor azt mondjuk, hogy f x_0-ban lokálisan nő / lokálisan csökken / szigorúan lokálisan nő / szigorúan lokálisan csökken.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

EMLÉKEZTETŐ

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$ (az állítás nem megfordítható, ld. pl. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$).

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0-ban. Ha x_0-nak van olyan V környezete, hogy

1. *minden $x \in V \cap D$, $x < x_0$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) \geq f(x_0)$ / $f(x) < f(x_0)$ / $f(x) > f(x_0)$, valamint*
2. *minden $x \in V \cap D$, $x > x_0$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$ / $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) > f(x_0)$ / $f(x) < f(x_0)$,*

akkor azt mondjuk, hogy f x_0-ban lokálisan nő / lokálisan csökken / szigorúan lokálisan nő / szigorúan lokálisan csökken.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

EMLÉKEZTETŐ

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$ (az állítás nem megfordítható, ld. pl. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$).

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0-ban. Ha x_0-nak van olyan V környezete, hogy

1. *minden $x \in V \cap D$, $x < x_0$ esetén*
   $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) \geq f(x_0)$ / $f(x) < f(x_0)$ / $f(x) > f(x_0)$,
   valamint
2. *minden $x \in V \cap D$, $x > x_0$ esetén*
   $f(x) \geq f(x_0)$ / $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) > f(x_0)$ / $f(x) < f(x_0)$,

akkor azt mondjuk, hogy f x_0-ban lokálisan nő / lokálisan csökken / szigorúan lokálisan nő / szigorúan lokálisan csökken.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

EMLÉKEZTETŐ

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$ (az állítás nem megfordítható, ld. pl. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$).

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, mely értelmezve van x_0-ban. Ha x_0-nak van olyan V környezete, hogy

1. *minden $x \in V \cap D$, $x < x_0$ esetén*
   $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) \geq f(x_0)$ / $f(x) < f(x_0)$ / $f(x) > f(x_0)$,
   valamint
2. *minden $x \in V \cap D$, $x > x_0$ esetén*
   $f(x) \geq f(x_0)$ / $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) > f(x_0)$ / $f(x) < f(x_0)$,

akkor azt mondjuk, hogy f x_0-ban lokálisan nő / lokálisan csökken / szigorúan lokálisan nő / szigorúan lokálisan csökken.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan nő / csökken, akkor $f'(x_0) \geq 0$ / $f'(x_0) \leq 0$.

Bizonyítás.

Mivel f deriválható x_0-ban, ezért értelmezve van x_0 egy környezetében.

Tegyük fel, hogy f x_0-ban lokálisan nő. Ekkor x_0-nak van olyan V környezete, hogy itt értelmezve van, és minden $x \in V$ esetén, ha $x < x_0$ akkor $f(x) \leq f(x_0)$, és ha $x > x_0$, akkor $f(x) \geq f(x_0)$. Mindkét esetben $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ adódik, ha $x \in V \setminus \{x_0\}$, amiből $f'(x_0) \geq 0$. Ha f x_0-ban lokálisan csökken, hasonló módon igazolható az állítás.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan nő / csökken, akkor $f'(x_0) \geq 0$ / $f'(x_0) \leq 0$.

Bizonyítás.

Mivel f deriválható x_0-ban, ezért értelmezve van x_0 egy környezetében.

Tegyük fel, hogy f x_0-ban lokálisan nő. Ekkor x_0-nak van olyan V környezete, hogy itt értelmezve van, és minden $x \in V$ esetén, ha $x < x_0$ akkor $f(x) \leq f(x_0)$, és ha $x > x_0$, akkor $f(x) \geq f(x_0)$. Mindkét esetben $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ adódik, ha $x \in V \setminus \{x_0\}$, amiből $f'(x_0) \geq 0$. Ha f x_0-ban lokálisan csökken, hasonló módon igazolható az állítás.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan nő / csökken, akkor $f'(x_0) \geq 0$ / $f'(x_0) \leq 0$.

Bizonyítás.

Mivel f deriválható x_0-ban, ezért értelmezve van x_0 egy környezetében.

Tegyük fel, hogy f x_0-ban lokálisan nő. Ekkor x_0-nak van olyan V környezete, hogy itt értelmezve van, és minden $x \in V$ esetén, ha $x < x_0$ akkor $f(x) \leq f(x_0)$, és ha $x > x_0$, akkor $f(x) \geq f(x_0)$. Mindkét esetben $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ adódik, ha $x \in V \setminus \{x_0\}$, amiből $f'(x_0) \geq 0$. Ha f x_0-ban lokálisan csökken, hasonló módon igazolható az állítás.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan nő / csökken, akkor $f'(x_0) \geq 0$ / $f'(x_0) \leq 0$.

Bizonyítás.

Mivel f deriválható x_0-ban, ezért értelmezve van x_0 egy környezetében.

Tegyük fel, hogy f x_0-ban lokálisan nő. Ekkor x_0-nak van olyan V környezete, hogy itt értelmezve van, és minden $x \in V$ esetén, ha $x < x_0$ akkor $f(x) \leq f(x_0)$, és ha $x > x_0$, akkor $f(x) \geq f(x_0)$. Mindkét esetben $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ adódik, ha $x \in V \setminus \{x_0\}$, amiből $f'(x_0) \geq 0$. Ha f x_0-ban lokálisan csökken, hasonló módon igazolható az állítás.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan nő / csökken, akkor $f'(x_0) \geq 0$ / $f'(x_0) \leq 0$.

Bizonyítás.

Mivel f deriválható x_0-ban, ezért értelmezve van x_0 egy környezetében.

Tegyük fel, hogy f x_0-ban lokálisan nő. Ekkor x_0-nak van olyan V környezete, hogy itt értelmezve van, és minden $x \in V$ esetén, ha $x < x_0$ akkor $f(x) \leq f(x_0)$, és ha $x > x_0$, akkor $f(x) \geq f(x_0)$. Mindkét esetben $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ adódik, ha $x \in V \setminus \{x_0\}$, amiből $f'(x_0) \geq 0$. Ha f x_0-ban lokálisan csökken, hasonló módon igazolható az állítás.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan nő / csökken, akkor $f'(x_0) \geq 0$ / $f'(x_0) \leq 0$.

Bizonyítás.
Mivel f deriválható x_0-ban, ezért értelmezve van x_0 egy környezetében.
Tegyük fel, hogy f x_0-ban lokálisan nő. Ekkor x_0-nak van olyan V környezete, hogy itt értelmezve van, és minden $x \in V$ esetén, ha $x < x_0$ akkor $f(x) \leq f(x_0)$, és ha $x > x_0$, akkor $f(x) \geq f(x_0)$. Mindkét esetben $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ adódik, ha $x \in V \setminus \{x_0\}$, amiből $f'(x_0) \geq 0$. Ha f x_0-ban lokálisan csökken, hasonló módon igazolható az állítás.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan nő / csökken, akkor $f'(x_0) \geq 0$ / $f'(x_0) \leq 0$.

Bizonyítás.

Mivel f deriválható x_0-ban, ezért értelmezve van x_0 egy környezetében.

Tegyük fel, hogy f x_0-ban lokálisan nő. Ekkor x_0-nak van olyan V környezete, hogy itt értelmezve van, és minden $x \in V$ esetén, ha $x < x_0$ akkor $f(x) \leq f(x_0)$, és ha $x > x_0$, akkor $f(x) \geq f(x_0)$. Mindkét esetben $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ adódik, ha $x \in V \setminus \{x_0\}$, amiből $f'(x_0) \geq 0$. Ha f x_0-ban lokálisan csökken, hasonló módon igazolható az állítás.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan nő / csökken, akkor $f'(x_0) \geq 0$ / $f'(x_0) \leq 0$.

Bizonyítás.
Mivel f deriválható x_0-ban, ezért értelmezve van x_0 egy környezetében.
Tegyük fel, hogy f x_0-ban lokálisan nő. Ekkor x_0-nak van olyan V környezete, hogy itt értelmezve van, és minden $x \in V$ esetén, ha $x < x_0$ akkor $f(x) \leq f(x_0)$, és ha $x > x_0$, akkor $f(x) \geq f(x_0)$. Mindkét esetben $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ adódik, ha $x \in V \setminus \{x_0\}$, amiből $f'(x_0) \geq 0$. Ha f x_0-ban lokálisan csökken, hasonló módon igazolható az állítás.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan nő / csökken, akkor $f'(x_0) \geq 0$ / $f'(x_0) \leq 0$.

Bizonyítás.
Mivel f deriválható x_0-ban, ezért értelmezve van x_0 egy környezetében.
Tegyük fel, hogy f x_0-ban lokálisan nő. Ekkor x_0-nak van olyan V környezete, hogy itt értelmezve van, és minden $x \in V$ esetén, ha $x < x_0$ akkor $f(x) \leq f(x_0)$, és ha $x > x_0$, akkor $f(x) \geq f(x_0)$. Mindkét esetben $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ adódik, ha $x \in V \setminus \{x_0\}$, amiből $f'(x_0) \geq 0$. Ha f x_0-ban lokálisan csökken, hasonló módon igazolható az állítás.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan nő / csökken, akkor $f'(x_0) \geq 0$ / $f'(x_0) \leq 0$.

Bizonyítás.
Mivel f deriválható x_0-ban, ezért értelmezve van x_0 egy környezetében.
Tegyük fel, hogy f x_0-ban lokálisan nő. Ekkor x_0-nak van olyan V környezete, hogy itt értelmezve van, és minden $x \in V$ esetén, ha $x < x_0$ akkor $f(x) \leq f(x_0)$, és ha $x > x_0$, akkor $f(x) \geq f(x_0)$. Mindkét esetben $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ adódik, ha $x \in V \setminus \{x_0\}$, amiből $f'(x_0) \geq 0$. Ha f x_0-ban lokálisan csökken, hasonló módon igazolható az állítás.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan nő / csökken, akkor $f'(x_0) \geq 0$ / $f'(x_0) \leq 0$.

Bizonyítás.
Mivel f deriválható x_0-ban, ezért értelmezve van x_0 egy környezetében.
Tegyük fel, hogy f x_0-ban lokálisan nő. Ekkor x_0-nak van olyan V környezete, hogy itt értelmezve van, és minden $x \in V$ esetén, ha $x < x_0$ akkor $f(x) \leq f(x_0)$, és ha $x > x_0$, akkor $f(x) \geq f(x_0)$. Mindkét esetben $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ adódik, ha $x \in V \setminus \{x_0\}$, amiből $f'(x_0) \geq 0$. Ha f x_0-ban lokálisan csökken, hasonló módon igazolható az állítás.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha $f'(x_0) > 0$ / $f'(x_0) < 0$, akkor f x_0-ban szigorúan lokálisan nő / csökken.

PÉLDA

Ha $f(x) = x^3$, akkor f minden pontban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha $f'(x_0) > 0$ / $f'(x_0) < 0$, akkor f x_0-ban szigorúan lokálisan nő / csökken.

PÉLDA

Ha $f(x) = x^3$, akkor f minden pontban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha $f'(x_0) > 0$ / $f'(x_0) < 0$, akkor f x_0-ban szigorúan lokálisan nő / csökken.

PÉLDA

Ha $f(x) = x^3$, akkor f minden pontban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha $f'(x_0) > 0$ / $f'(x_0) < 0$, akkor f x_0-ban szigorúan lokálisan nő / csökken.

PÉLDA

Ha $f(x) = x^3$, akkor f minden pontban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha $f'(x_0) > 0$ / $f'(x_0) < 0$, akkor f x_0-ban szigorúan lokálisan nő / csökken.

PÉLDA

Ha $f(x) = x^3$, akkor f minden pontban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

LOKÁLIS MONOTONITÁS VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható x_0-ban. Ha $f'(x_0) > 0$ / $f'(x_0) < 0$, akkor f x_0-ban szigorúan lokálisan nő / csökken.

PÉLDA

Ha $f(x) = x^3$, akkor f minden pontban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható x_0 egy környezetében, $f'(x_0) = 0$ és f' x_0-ban előjelet vált, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha f' x_0-ban bal oldalon negatív és jobb oldalon pozitív, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Indirekt bizonyítás és a Lagrange-tétel használata.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható x_0 egy környezetében, $f'(x_0) = 0$ és f' x_0-ban előjelet vált, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van.
Emellett, ha f' x_0-ban bal oldalon negatív és jobb oldalon pozitív, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Indirekt bizonyítás és a Lagrange-tétel használata.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható x_0 egy környezetében, $f'(x_0) = 0$ és f' x_0-ban előjelet vált, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha f' x_0-ban bal oldalon negatív és jobb oldalon pozitív, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Indirekt bizonyítás és a Lagrange-tétel használata.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható x_0 egy környezetében, $f'(x_0) = 0$ és f' x_0-ban előjelet vált, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha f' x_0-ban bal oldalon negatív és jobb oldalon pozitív, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Indirekt bizonyítás és a Lagrange-tétel használata.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható x_0 egy környezetében, $f'(x_0) = 0$ és f' x_0-ban előjelet vált, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha f' x_0-ban bal oldalon negatív és jobb oldalon pozitív, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Indirekt bizonyítás és a Lagrange-tétel használata.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható x_0 egy környezetében, $f'(x_0) = 0$ és f' x_0-ban előjelet vált, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha f' x_0-ban bal oldalon negatív és jobb oldalon pozitív, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Indirekt bizonyítás és a Lagrange-tétel használata.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható x_0 egy környezetében, $f'(x_0) = 0$ és f' x_0-ban előjelet vált, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha f' x_0-ban bal oldalon negatív és jobb oldalon pozitív, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Indirekt bizonyítás és a Lagrange-tétel használata.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0-ban, $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha $f''(x_0) > 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Ha pl. $f''(x_0) > 0$, akkor f' szigorúan lokálisan nő x_0-ban, azaz $f'(x_0) = 0$ miatt f' x_0 bal oldalán negatív és a jobb oldalán pozitív.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0-ban, $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha $f''(x_0) > 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Ha pl. $f''(x_0) > 0$, akkor f' szigorúan lokálisan nő x_0-ban, azaz $f'(x_0) = 0$ miatt f' x_0 bal oldalán negatív és a jobb oldalán pozitív.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0-ban, $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha $f''(x_0) > 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Ha pl. $f''(x_0) > 0$, akkor f' szigorúan lokálisan nő x_0-ban, azaz $f'(x_0) = 0$ miatt f' x_0 bal oldalán negatív és a jobb oldalán pozitív.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0-ban, $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha $f''(x_0) > 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Ha pl. $f''(x_0) > 0$, akkor f' szigorúan lokálisan nő x_0-ban, azaz $f'(x_0) = 0$ miatt f' x_0 bal oldalán negatív és a jobb oldalán pozitív.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0-ban, $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha $f''(x_0) > 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Ha pl. $f''(x_0) > 0$, akkor f' szigorúan lokálisan nő x_0-ban, azaz $f'(x_0) = 0$ miatt f' x_0 bal oldalán negatív és a jobb oldalán pozitív.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0-ban, $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha $f''(x_0) > 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Ha pl. $f''(x_0) > 0$, akkor f' szigorúan lokálisan nő x_0-ban, azaz $f'(x_0) = 0$ miatt f' x_0 bal oldalán negatív és a jobb oldalán pozitív.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0-ban, $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Emellett, ha $f''(x_0) > 0$, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van, ellenkező esetben pedig lokális maximuma.

Bizonyítás ötlete. Ha pl. $f''(x_0) > 0$, akkor f' szigorúan lokálisan nő x_0-ban, azaz $f'(x_0) = 0$ miatt f' x_0 bal oldalán negatív és a jobb oldalán pozitív.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható az I intervallumon és f nő / csökken I-n, akkor $f'(x) \geq 0$ / $f'(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén.

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható az I intervallumon és $f'(x) > 0$ / $f'(x) < 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor f I-n szigorúan nő / csökken.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható az I intervallumon és f nő / csökken I-n, akkor $f'(x) \geq 0$ / $f'(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén.

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható az I intervallumon és $f'(x) > 0$ / $f'(x) < 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor f I-n szigorúan nő / csökken.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható az I intervallumon és f nő / csökken I-n, akkor $f'(x) \geq 0$ / $f'(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén.

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható az I intervallumon és $f'(x) > 0$ / $f'(x) < 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor f I-n szigorúan nő / csökken.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható az I intervallumon és f nő / csökken I-n, akkor $f'(x) \geq 0$ / $f'(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén.

ÁLLÍTÁS

Ha f deriválható az I intervallumon és $f'(x) > 0$ / $f'(x) < 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor f I-n szigorúan nő / csökken.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható az I intervallumon. Azt mondjuk, hogy f konvex (konkáv) I-n, ha tetszőleges $x_0, x \in I$ pontokra

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan konvex/konkáv I-n.

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f-nek inflexiós pontja van x_0-ban, ha x_0-nak van olyan baloldali környezete, ahol f konvex és olyan jobboldali környezete, ahol f konkáv, vagy fordítva.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható az I intervallumon. Azt mondjuk, hogy f konvex (konkáv) I-n, ha tetszőleges $x_0, x \in I$ pontokra

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan konvex/konkáv I-n.

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f-nek inflexiós pontja van x_0-ban, ha x_0-nak van olyan baloldali környezete, ahol f konvex és olyan jobboldali környezete, ahol f konkáv, vagy fordítva.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható az I intervallumon. Azt mondjuk, hogy f konvex (konkáv) I-n, ha tetszőleges $x_0, x \in I$ pontokra

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan konvex/konkáv I-n.

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f-nek inflexiós pontja van x_0-ban, ha x_0-nak van olyan baloldali környezete, ahol f konvex és olyan jobboldali környezete, ahol f konkáv, vagy fordítva.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható az I intervallumon. Azt mondjuk, hogy f konvex (konkáv) I-n, ha tetszőleges $x_0, x \in I$ pontokra

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan konvex/konkáv I-n.

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f-nek inflexiós pontja van x_0-ban, ha x_0-nak van olyan baloldali környezete, ahol f konvex és olyan jobboldali környezete, ahol f konkáv, vagy fordítva.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható az I intervallumon. Azt mondjuk, hogy f konvex (konkáv) I-n, ha tetszőleges $x_0, x \in I$ pontokra

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan konvex/konkáv I-n.

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f-nek inflexiós pontja van x_0-ban, ha x_0-nak van olyan baloldali környezete, ahol f konvex és olyan jobboldali környezete, ahol f konkáv, vagy fordítva.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható az I intervallumon. Azt mondjuk, hogy f konvex (konkáv) I-n, ha tetszőleges $x_0, x \in I$ pontokra

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan konvex/konkáv I-n.

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f-nek inflexiós pontja van x_0-ban, ha x_0-nak van olyan baloldali környezete, ahol f konvex és olyan jobboldali környezete, ahol f konkáv, vagy fordítva.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható az I intervallumon. Azt mondjuk, hogy f konvex (konkáv) I-n, ha tetszőleges $x_0, x \in I$ pontokra

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan konvex/konkáv I-n.

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f-nek inflexiós pontja van x_0-ban, ha x_0-nak van olyan baloldali környezete, ahol f konvex és olyan jobboldali környezete, ahol f konkáv, vagy fordítva.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható az I intervallumon. Azt mondjuk, hogy f konvex (konkáv) I-n, ha tetszőleges $x_0, x \in I$ pontokra

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan konvex/konkáv I-n.

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f-nek inflexiós pontja van x_0-ban, ha x_0-nak van olyan baloldali környezete, ahol f konvex és olyan jobboldali környezete, ahol f konkáv, vagy fordítva.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f lokálisan konvex (konkáv) x_0-ban, ha x_0 egy alkalmas környezetéből vett minden x-re teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan lokálisan konvex/konkáv x_0-ban.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f lokálisan konvex (konkáv) x_0-ban, ha x_0 egy alkalmas környezetéből vett minden x-re teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan lokálisan konvex/konkáv x_0-ban.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f lokálisan konvex (konkáv) x_0-ban, ha x_0 egy alkalmas környezetéből vett minden x-re teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan lokálisan konvex/konkáv x_0-ban.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f lokálisan konvex (konkáv) x_0-ban, ha x_0 egy alkalmas környezetéből vett minden x-re teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan lokálisan konvex/konkáv x_0-ban.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

DEFINÍCIÓ

Legyen f deriválható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f lokálisan konvex (konkáv) x_0-ban, ha x_0 egy alkalmas környezetéből vett minden x-re teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $x_0 \neq x$ esetén az egyenlőség nincs megengedve, azt mondjuk, hogy f szigorúan lokálisan konvex/konkáv x_0-ban.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f kétszer deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan konvex / konkáv, akkor $f''(x_0) \geq 0$ / $f''(x_0) \leq 0$.

ÁLLÍTÁS

Legyen f kétszer deriválható x_0-ban. Ha $f''(x_0) > 0$ / $f''(x_0) < 0$, akkor f x_0-ban szigorúan lokálisan konvex / konkáv.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f kétszer deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan konvex / konkáv, akkor $f''(x_0) \geq 0$ / $f''(x_0) \leq 0$.

ÁLLÍTÁS

Legyen f kétszer deriválható x_0-ban. Ha $f''(x_0) > 0$ / $f''(x_0) < 0$, akkor f x_0-ban szigorúan lokálisan konvex / konkáv.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f kétszer deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan konvex / konkáv, akkor $f''(x_0) \geq 0$ / $f''(x_0) \leq 0$.

ÁLLÍTÁS

Legyen f kétszer deriválható x_0-ban. Ha $f''(x_0) > 0$ / $f''(x_0) < 0$, akkor f x_0-ban szigorúan lokálisan konvex / konkáv.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Legyen f kétszer deriválható x_0-ban. Ha f x_0-ban lokálisan konvex / konkáv, akkor $f''(x_0) \geq 0$ / $f''(x_0) \leq 0$.

ÁLLÍTÁS

Legyen f kétszer deriválható x_0-ban. Ha $f''(x_0) > 0$ / $f''(x_0) < 0$, akkor f x_0-ban szigorúan lokálisan konvex / konkáv.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható az I intervallumon és f konvex / konkáv I-n, akkor $f''(x) \geq 0$ / $f''(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén.

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható az I intervallumon és $f''(x) > 0$ / $f''(x) < 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor f I-n szigorúan konvex / konkáv.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható az I intervallumon és f konvex / konkáv I-n, akkor $f''(x) \geq 0$ / $f''(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén.

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható az I intervallumon és $f''(x) > 0$ / $f''(x) < 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor f I-n szigorúan konvex / konkáv.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható az I intervallumon és f konvex / konkáv I-n, akkor $f''(x) \geq 0$ / $f''(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén.

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható az I intervallumon és $f''(x) > 0$ / $f''(x) < 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor f I-n szigorúan konvex / konkáv.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható az I intervallumon és f konvex / konkáv I-n, akkor $f''(x) \geq 0$ / $f''(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén.

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható az I intervallumon és $f''(x) > 0$ / $f''(x) < 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor f I-n szigorúan konvex / konkáv.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0-ban, és f-nek infexiós pontja van x_0-ban, akkor $f''(x_0) = 0$.

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0 egy környezetében, $f''(x_0) = 0$ és f'' x_0-ban előjelet vált, akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.

ÁLLÍTÁS

Ha f háromszor deriválható x_0-ban, $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0-ban, és f-nek infexiós pontja van x_0-ban, akkor $f''(x_0) = 0$.

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0 egy környezetében, $f''(x_0) = 0$ és f'' x_0-ban előjelet vált, akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.

ÁLLÍTÁS

Ha f háromszor deriválható x_0-ban, $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0-ban, és f-nek infexiós pontja van x_0-ban, akkor $f''(x_0) = 0$.

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0 egy környezetében, $f''(x_0) = 0$ és f'' x_0-ban előjelet vált, akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.

ÁLLÍTÁS

Ha f háromszor deriválható x_0-ban, $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0-ban, és f-nek infexiós pontja van x_0-ban, akkor $f''(x_0) = 0$.

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0 egy környezetében, $f''(x_0) = 0$ és f'' x_0-ban előjelet vált, akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.

ÁLLÍTÁS

Ha f háromszor deriválható x_0-ban, $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.

KONVEXITÁS ÉS INFLEXIÓS PONTOK VIZSGÁLATA

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0-ban, és f-nek infexiós pontja van x_0-ban, akkor $f''(x_0) = 0$.

ÁLLÍTÁS

Ha f kétszer deriválható x_0 egy környezetében, $f''(x_0) = 0$ és f'' x_0-ban előjelet vált, akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.

ÁLLÍTÁS

Ha f háromszor deriválható x_0-ban, $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.

A TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT MENETE

1. Értelmezési tartomány, zérushelyek.
2. Paritás, periodicitás.
3. Folytonosság, határértékek az 'értelmezési tartomány szélein' és a szakadási pontokban.
4. Aszimptoták a $\pm\infty$-ben.
5. Monotonitás, lokális szélsőértekek vizsgálata.
6. Konvexitás és inflexiós pontok vizsgálata.
7. Grafikon.
8. Értékkészlet.

A TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT MENETE

1. Értelmezési tartomány, zérushelyek.
2. Paritás, periodicitás.
3. Folytonosság, határértékek az 'értelmezési tartomány szélein' és a szakadási pontokban.
4. Aszimptoták a $\pm\infty$-ben.
5. Monotonitás, lokális szélsőértekek vizsgálata.
6. Konvexitás és inflexiós pontok vizsgálata.
7. Grafikon.
8. Értékkészlet.

A TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT MENETE

1. Értelmezési tartomány, zérushelyek.
2. Paritás, periodicitás.
3. Folytonosság, határértékek az 'értelmezési tartomány szélein' és a szakadási pontokban.
4. Aszimptoták a $\pm\infty$-ben.
5. Monotonitás, lokális szélsőértekek vizsgálata.
6. Konvexitás és inflexiós pontok vizsgálata.
7. Grafikon.
8. Értékkészlet.

A TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT MENETE

1. Értelmezési tartomány, zérushelyek.
2. Paritás, periodicitás.
3. Folytonosság, határértékek az 'értelmezési tartomány szélein' és a szakadási pontokban.
4. Aszimptoták a $\pm\infty$-ben.
5. Monotonitás, lokális szélsőértekek vizsgálata.
6. Konvexitás és inflexiós pontok vizsgálata.
7. Grafikon.
8. Értékkészlet.

A TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT MENETE

1. Értelmezési tartomány, zérushelyek.
2. Paritás, periodicitás.
3. Folytonosság, határértékek az 'értelmezési tartomány szélein' és a szakadási pontokban.
4. Aszimptoták a $\pm\infty$-ben.
5. Monotonitás, lokális szélsőértekek vizsgálata.
6. Konvexitás és inflexiós pontok vizsgálata.
7. Grafikon.
8. Értékkészlet.

A TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT MENETE

1. Értelmezési tartomány, zérushelyek.
2. Paritás, periodicitás.
3. Folytonosság, határértékek az 'értelmezési tartomány szélein' és a szakadási pontokban.
4. Aszimptoták a $\pm\infty$-ben.
5. Monotonitás, lokális szélsőértekek vizsgálata.
6. Konvexitás és inflexiós pontok vizsgálata.
7. Grafikon.
8. Értékkészlet.

A TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT MENETE

1. Értelmezési tartomány, zérushelyek.
2. Paritás, periodicitás.
3. Folytonosság, határértékek az 'értelmezési tartomány szélein' és a szakadási pontokban.
4. Aszimptoták a $\pm\infty$-ben.
5. Monotonitás, lokális szélsőértekek vizsgálata.
6. Konvexitás és inflexiós pontok vizsgálata.
7. Grafikon.
8. Értékkészlet.

A TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT MENETE

1. Értelmezési tartomány, zérushelyek.
2. Paritás, periodicitás.
3. Folytonosság, határértékek az 'értelmezési tartomány szélein' és a szakadási pontokban.
4. Aszimptoták a $\pm\infty$-ben.
5. Monotonitás, lokális szélsőértekek vizsgálata.
6. Konvexitás és inflexiós pontok vizsgálata.
7. Grafikon.
8. Értékkészlet.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota $(\pm\infty)$-ben $y = x$.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota $(\pm\infty)$-ben $y = x$.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota $(\pm\infty)$-ben $y = x$.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota $(\pm\infty)$-ben $y = x$.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota $(\pm\infty)$-ben $y = x$.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota $(\pm\infty)$-ben $y = x$.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota $(\pm\infty)$-ben $y = x$.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota $(\pm\infty)$-ben $y = x$.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota $(\pm\infty)$-ben $y = x$.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota $(\pm\infty)$-ben $y = x$.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota ($\pm\infty$)-ben $y = x$.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota $(\pm\infty)$-ben $y = x$.

PÉLDA ASZIMPTOTA KISZÁMÍTÁSÁRA

FELADAT

Keressük azt azokat az $y = mx + b$ *alakú egyeneseket, melyekre* $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$ *vagy* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, *ahol* $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$.

A meredekség kiszámítása: Meggondolható, hogy ha $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

A tengelymetszet kiszámítása: $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$.
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right) =$
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{x^2+1} = 0$. Azaz az aszimptota $(\pm\infty)$-ben $y = x$.

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.

Értelmezési tartomány:

$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)

Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.

Értelmezési tartomány:

$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)

Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.

Értelmezési tartomány:

$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)

Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.

Értelmezési tartomány:

$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)

Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.

Értelmezési tartomány:

$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)

Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

PÉLDA

Végezze el az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény teljes diszkusszióját!

Megoldás.
Értelmezési tartomány:
$x^3 + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1 \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zérushelyek : $\frac{x}{x^3+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Nem páros, nem páratlan, nem periodikus (ld. pl. D_f)
Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^3+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

PÉLDA

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^3+1}\right)' = \frac{1\cdot(x^3+1) - x\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}.$$

$$\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2} = 0 \Longrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x$
f'	$+$	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	$\uparrow$	lokális max.	$\downarrow$

A lokális maximum értéke $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

PÉLDA

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^3+1}\right)' = \frac{1\cdot(x^3+1) - x\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}.$$

$$\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2} = 0 \Longrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x$
f'	$+$	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	$\uparrow$	lokális max.	$\downarrow$

A lokális maximum értéke $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

PÉLDA

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^3+1}\right)' = \frac{1\cdot(x^3+1) - x\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}.$$

$$\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2} = 0 \Longrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x$
f'	$+$	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	$\uparrow$	lokális max.	$\downarrow$

A lokális maximum értéke $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

PÉLDA

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^3+1}\right)' = \frac{1\cdot(x^3+1) - x\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}.$$

$$\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2} = 0 \Longrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x$
f'	$+$	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	$\uparrow$	lokális max.	$\downarrow$

A lokális maximum értéke $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

PÉLDA

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^3+1}\right)' = \frac{1\cdot(x^3+1) - x\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}.$$

$$\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2} = 0 \Longrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x$
f'	$+$	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	$\uparrow$	lokális max.	$\downarrow$

A lokális maximum értéke $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

PÉLDA

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^3+1}\right)' = \frac{1\cdot(x^3+1) - x\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}.$$

$$\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2} = 0 \Longrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x$
f'	$+$	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	$\uparrow$	lokális max.	$\downarrow$

A lokális maximum értéke $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

PÉLDA

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^3+1}\right)' = \frac{1\cdot(x^3+1) - x\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}.$$

$$\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2} = 0 \Longrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x$
f'	$+$	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	$\uparrow$	lokális max.	$\downarrow$

A lokális maximum értéke $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

PÉLDA

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^3+1}\right)' = \frac{1\cdot(x^3+1) - x\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}.$$

$$\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2} = 0 \Longrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x$
f'	$+$	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	$\uparrow$	lokális max.	$\downarrow$

A lokális maximum értéke $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

PÉLDA

$$f''(x) = \left(\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}\right)' = \frac{-6x^2\cdot(x^3+1)^2-(1-2x^3)\cdot 2(x^3+1)3x^2}{(x^3+1)^4} = \frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3}$$

$$\frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, x^3 = 2 \Longrightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{2}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$x = \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} < x$
f''	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$\cap$	nincs infl. p.	$\cap$	infl. pont	$\cup$

Az inflexiós pont y-koordinátája $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

PÉLDA

$$f''(x) = \left(\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}\right)' = \frac{-6x^2\cdot(x^3+1)^2-(1-2x^3)\cdot 2(x^3+1)3x^2}{(x^3+1)^4} = \frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3}$$

$$\frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, x^3 = 2 \Longrightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{2}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$x = \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} < x$
f''	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$\cap$	nincs infl. p.	$\cap$	infl. pont	$\cup$

Az inflexiós pont y-koordinátája $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

PÉLDA

$$f''(x) = \left(\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}\right)' = \frac{-6x^2\cdot(x^3+1)^2-(1-2x^3)\cdot 2(x^3+1)3x^2}{(x^3+1)^4} = \frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3}$$

$$\frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, x^3 = 2 \Longrightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{2}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$x = \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} < x$
f''	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$\cap$	nincs infl. p.	$\cap$	infl. pont	$\cup$

Az inflexiós pont y-koordinátája $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

PÉLDA

$$f''(x) = \left(\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}\right)' = \frac{-6x^2\cdot(x^3+1)^2-(1-2x^3)\cdot 2(x^3+1)3x^2}{(x^3+1)^4} = \frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3}$$

$$\frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, x^3 = 2 \Longrightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{2}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$x = \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} < x$
f''	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$\cap$	nincs infl. p.	$\cap$	infl. pont	$\cup$

Az inflexiós pont y-koordinátája $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

PÉLDA

$$f''(x) = \left(\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}\right)' = \frac{-6x^2\cdot(x^3+1)^2-(1-2x^3)\cdot 2(x^3+1)3x^2}{(x^3+1)^4} = \frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3}$$

$$\frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, x^3 = 2 \Longrightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{2}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$x = \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} < x$
f''	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$\cap$	nincs infl. p.	$\cap$	infl. pont	$\cup$

Az inflexiós pont y-koordinátája $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

PÉLDA

$$f''(x) = \left(\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}\right)' = \frac{-6x^2\cdot(x^3+1)^2-(1-2x^3)\cdot 2(x^3+1)3x^2}{(x^3+1)^4} = \frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3}$$

$$\frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, x^3 = 2 \Longrightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{2}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$x = \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} < x$
f''	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$\cap$	nincs infl. p.	$\cap$	infl. pont	$\cup$

Az inflexiós pont y-koordinátája $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

PÉLDA

$$f''(x) = \left(\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}\right)' = \frac{-6x^2\cdot(x^3+1)^2-(1-2x^3)\cdot 2(x^3+1)3x^2}{(x^3+1)^4} = \frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3}$$

$$\frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, x^3 = 2 \Longrightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{2}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$x = \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} < x$
f''	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\bigcup$	$\bigcap$	nincs infl. p.	$\bigcap$	infl. pont	$\bigcup$

Az inflexiós pont y-koordinátája $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

PÉLDA

$$f''(x) = \left(\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}\right)' = \frac{-6x^2\cdot(x^3+1)^2-(1-2x^3)\cdot 2(x^3+1)3x^2}{(x^3+1)^4} = \frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3}$$

$$\frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, x^3 = 2 \Longrightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{2}.$$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$x = \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} < x$
f''	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\bigcup$	$\bigcap$	nincs infl. p.	$\bigcap$	infl. pont	$\bigcup$

Az inflexiós pont y-koordinátája $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

PÉLDA

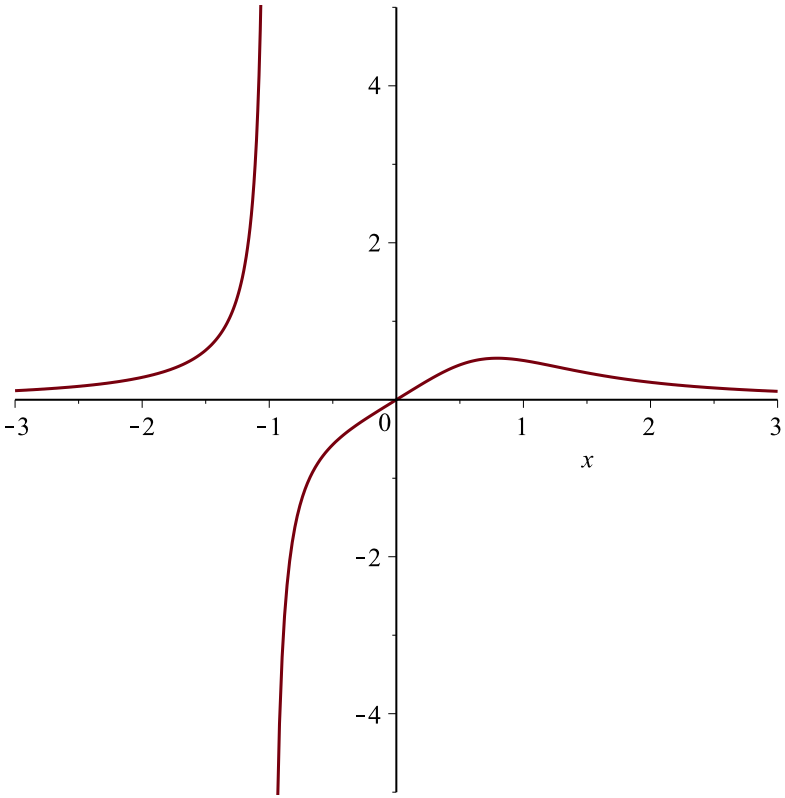

FIGURE: Az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény grafikonja a $[-3, 3]$ intervallumon

Értékkészlet: $R_f = \mathbb{R}$.

PÉLDA

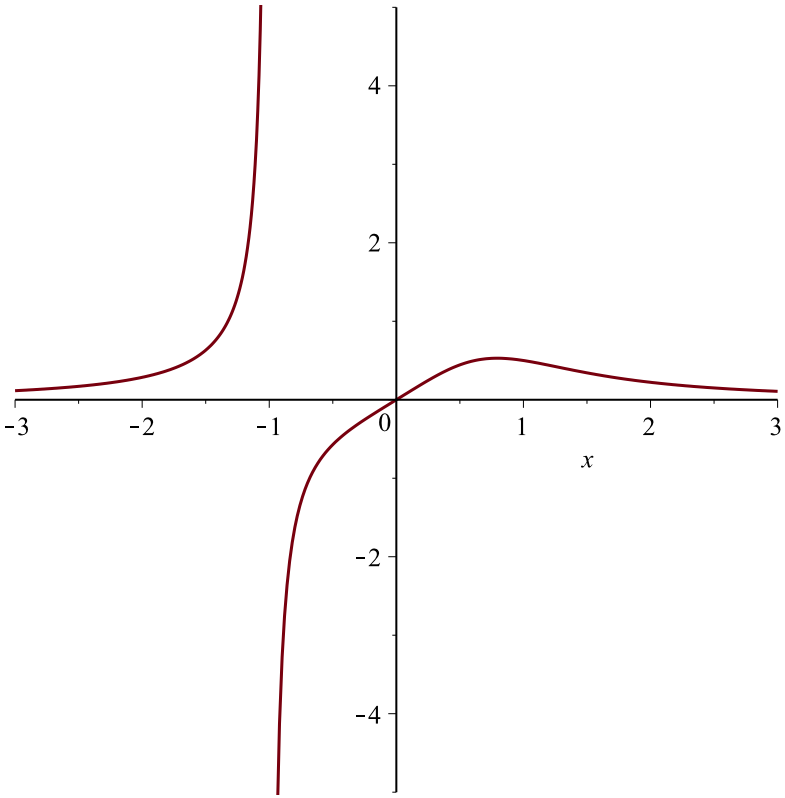

FIGURE: Az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény grafikonja a $[-3, 3]$ intervallumon

Értékkészlet: $R_f = \mathbb{R}$.