15. előadás: Speciális deriválási szabályok, Taylor-polinom

LOGARITMIKUS DERIVÁLÁS

PÉLDA

Mennyi $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ *deriváltja?*

Megoldás.

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right)' =$$

$$= e^{\frac{\ln(x)}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

LOGARITMIKUS DERIVÁLÁS

PÉLDA

Mennyi $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ deriváltja?

Megoldás.

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right)' =$$

$$= e^{\frac{\ln(x)}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

LOGARITMIKUS DERIVÁLÁS

PÉLDA

Mennyi $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ deriváltja?

Megoldás.

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right)' =$$

$$= e^{\frac{\ln(x)}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

LOGARITMIKUS DERIVÁLÁS

PÉLDA

Mennyi $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ deriváltja?

Megoldás.

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right)' =$$

$$= e^{\frac{\ln(x)}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

LOGARITMIKUS DERIVÁLÁS

PÉLDA

Mennyi $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ *deriváltja?*

Megoldás.

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right)' =$$

$$= e^{\frac{\ln(x)}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

LOGARITMIKUS DERIVÁLÁS

PÉLDA

Mennyi $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ deriváltja?

Megoldás.

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right)' =$$

$$= e^{\frac{\ln(x)}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

LOGARITMIKUS DERIVÁLÁS

KÉRDÉS

Mennyi f^g deriváltja?

Megoldás.

$$h = f^g \Longrightarrow \ln(h) = \ln\left(f^g\right) = g\ln(f)$$

$$\frac{1}{h}\cdot h' = g'\ln(f) + g\cdot\frac{1}{f}\cdot f' \Longrightarrow \frac{h'}{h} = g'\ln(f) + g\cdot\frac{f'}{f}$$

$$(f^g)' = f^g\cdot\left(g'\ln(f) + g\cdot\frac{f'}{f}\right)$$

Logaritmikus deriválás

Kérdés

Mennyi f^g deriváltja?

Megoldás.

$$h = f^g \Longrightarrow \ln(h) = \ln\left(f^g\right) = g\ln(f)$$

$$\frac{1}{h} \cdot h' = g'\ln(f) + g \cdot \frac{1}{f} \cdot f' \Longrightarrow \frac{h'}{h} = g'\ln(f) + g \cdot \frac{f'}{f}$$

$$(f^g)' = f^g \cdot \left(g'\ln(f) + g \cdot \frac{f'}{f}\right)$$

LOGARITMIKUS DERIVÁLÁS

KÉRDÉS

Mennyi f^g deriváltja?

Megoldás.

$$h = f^g \Longrightarrow \ln(h) = \ln\left(f^g\right) = g\ln(f)$$

$$\frac{1}{h}\cdot h' = g'\ln(f) + g\cdot\frac{1}{f}\cdot f' \Longrightarrow \frac{h'}{h} = g'\ln(f) + g\cdot\frac{f'}{f}$$

$$(f^g)' = f^g\cdot\left(g'\ln(f) + g\cdot\frac{f'}{f}\right)$$

LOGARITMIKUS DERIVÁLÁS

KÉRDÉS

Mennyi f^g deriváltja?

Megoldás.

$$h = f^g \Longrightarrow \ln(h) = \ln\left(f^g\right) = g\ln(f)$$

$$\frac{1}{h}\cdot h' = g'\ln(f) + g\cdot\frac{1}{f}\cdot f' \Longrightarrow \frac{h'}{h} = g'\ln(f) + g\cdot\frac{f'}{f}$$

$$\left(f^g\right)' = f^g\cdot\left(g'\ln(f) + g\cdot\frac{f'}{f}\right)$$

Logaritmikus deriválás

Kérdés

Mennyi f^g deriváltja?

Megoldás.

$$h = f^g \Longrightarrow \ln(h) = \ln\left(f^g\right) = g\ln(f)$$

$$\frac{1}{h}\cdot h' = g'\ln(f) + g\cdot\frac{1}{f}\cdot f' \Longrightarrow \frac{h'}{h} = g'\ln(f) + g\cdot\frac{f'}{f}$$

$$(f^g)' = f^g\cdot\left(g'\ln(f) + g\cdot\frac{f'}{f}\right)$$

Logaritmikus deriválás

Kérdés

Mennyi f^g deriváltja?

Megoldás.

$$h = f^g \Longrightarrow \ln(h) = \ln\left(f^g\right) = g\ln(f)$$

$$\frac{1}{h} \cdot h' = g'\ln(f) + g \cdot \frac{1}{f} \cdot f' \Longrightarrow \frac{h'}{h} = g'\ln(f) + g \cdot \frac{f'}{f}$$

$$\left(f^g\right)' = f^g \cdot \left(g'\ln(f) + g \cdot \frac{f'}{f}\right)$$

Implicit módon adott függvény/görbe

Definíció

Azon $F : D_F \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyek D_F értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$ egy részhalmaza, kétváltozós valós függvényeknek hívjuk.

Definíció

Ha $F : D_F \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós valós függvény, és az $F(x, y) = 0$ egyenlet M megoldáshalmaza egy $f : d_f \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja, azt mondjuk, hogy f egy $F(x, y) = 0$ egyenlettel implicit módon adott függvény.

Megjegyzés

Az $y = f(x)$ egyenlet egy explicit módon adott függvény egyenlete.

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

DEFINÍCIÓ

Azon $F : D_F \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyek D_F értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$ egy részhalmaza, kétváltozós valós függvényeknek hívjuk.

DEFINÍCIÓ

Ha $F : D_F \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós valós függvény, és az $F(x, y) = 0$ egyenlet M megoldáshalmaza egy $f : d_f \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja, azt mondjuk, hogy f egy $F(x, y) = 0$ egyenlettel implicit módon adott függvény.

MEGJEGYZÉS

Az $y = f(x)$ egyenlet egy explicit módon adott függvény egyenlete.

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

DEFINÍCIÓ

Azon $F : D_F \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyek D_F értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$ egy részhalmaza, kétváltozós valós függvényeknek hívjuk.

DEFINÍCIÓ

Ha $F : D_F \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós valós függvény, és az $F(x, y) = 0$ egyenlet M megoldáshalmaza egy $f : d_f \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja, azt mondjuk, hogy f egy $F(x, y) = 0$ egyenlettel implicit módon adott függvény.

MEGJEGYZÉS

Az $y = f(x)$ egyenlet egy explicit módon adott függvény egyenlete.

Implicit módon adott függvény/görbe

Definíció

Azon $F : D_F \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyek D_F értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$ egy részhalmaza, kétváltozós valós függvényeknek hívjuk.

Definíció

Ha $F : D_F \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós valós függvény, és az $F(x, y) = 0$ egyenlet M megoldáshalmaza egy $f : d_f \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja, azt mondjuk, hogy f egy $F(x, y) = 0$ egyenlettel implicit módon adott függvény.

Megjegyzés

Az $y = f(x)$ egyenlet egy explicit módon adott függvény egyenlete.

Implicit módon adott függvény/görbe

Definíció

Azon $F : D_F \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyek D_F értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$ egy részhalmaza, kétváltozós valós függvényeknek hívjuk.

Definíció

Ha $F : D_F \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós valós függvény, és az $F(x, y) = 0$ egyenlet M megoldáshalmaza egy $f : d_f \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja, azt mondjuk, hogy f egy $F(x, y) = 0$ egyenlettel implicit módon adott függvény.

Megjegyzés

Az $y = f(x)$ egyenlet egy explicit módon adott függvény egyenlete.

Implicit módon adott függvény/görbe

Példa

Az $e^{x^2y} + y$ függvény y-ra nézve szigorúan növő minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát az $e^{x^2y} + y - x = 0$ egyenlet egy implicit módon adott függvény egyenlete.

Kérdés

Hogyan lehet kiszámolni egy implicit módon adott függvény (görbe) deriváltját egy adott pontban?

Implicit módon adott függvény/görbe

Példa

Az $e^{x^2y} + y$ függvény y-ra nézve szigorúan növő minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát az $e^{x^2y} + y - x = 0$ egyenlet egy implicit módon adott függvény egyenlete.

Kérdés

Hogyan lehet kiszámolni egy implicit módon adott függvény (görbe) deriváltját egy adott pontban?

Implicit módon adott függvény/görbe

Példa

Az $e^{x^2y} + y$ függvény y-ra nézve szigorúan növő minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát az $e^{x^2y} + y - x = 0$ egyenlet egy implicit módon adott függvény egyenlete.

Kérdés

Hogyan lehet kiszámolni egy implicit módon adott függvény (görbe) deriváltját egy adott pontban?

Implicit módon adott függvény/görbe

Definíció

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós valós függvény, melyre $(x_0, y_0) \in D$. Ha a $g(x) = f(x, y_0)$ egyváltozós valós függvény deriválható x_0-ban, akkor azt mondjuk, hogy f x szerint parciálisan deriválható (x_0, y_0)-ban, és (x_0, y_0)-beli x szerinti parciális deriváltja $g'(x_0)$. Jele: $f'_x(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$, $(\partial_x f)(x_0, y_0)$.

Hasonlóan definiálható f y szerinti parciális deriváltja (x_0, y_0)-ban.

Példa

$$F(x, y) = x^2 y + x - \sin(y) \Longrightarrow \partial_x F = 2xy + 1, \partial_y F = x^2 - \cos(y)$$

Implicit módon adott függvény/görbe

Definíció

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós valós függvény, melyre $(x_0, y_0) \in D$. Ha a $g(x) = f(x, y_0)$ egyváltozós valós függvény deriválható x_0-ban, akkor azt mondjuk, hogy f x szerint parciálisan deriválható (x_0, y_0)-ban, és (x_0, y_0)-beli x szerinti parciális deriváltja $g'(x_0)$. Jele: $f'_x(x_0, y_0)$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$, $(\partial_x f)(x_0, y_0)$.

Hasonlóan definiálható f y szerinti parciális deriváltja (x_0, y_0)-ban.

Példa

$$F(x, y) = x^2 y + x - \sin(y) \implies \partial_x F = 2xy + 1, \partial_y F = x^2 - \cos(y)$$

Implicit módon adott függvény/görbe

Definíció

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós valós függvény, melyre $(x_0, y_0) \in D$. Ha a $g(x) = f(x, y_0)$ egyváltozós valós függvény deriválható x_0-ban, akkor azt mondjuk, hogy f x szerint parciálisan deriválható (x_0, y_0)-ban, és (x_0, y_0)-beli x szerinti parciális deriváltja $g'(x_0)$. Jele: $f'_x(x_0, y_0)$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$, $(\partial_x f)(x_0, y_0)$.

Hasonlóan definiálható f y szerinti parciális deriváltja (x_0, y_0)-ban.

Példa

$$F(x, y) = x^2 y + x - \sin(y) \Longrightarrow \partial_x F = 2xy + 1, \partial_y F = x^2 - \cos(y)$$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós valós függvény, melyre $(x_0, y_0) \in D$. Ha a $g(x) = f(x, y_0)$ egyváltozós valós függvény deriválható x_0-ban, akkor azt mondjuk, hogy f x szerint parciálisan deriválható (x_0, y_0)-ban, és (x_0, y_0)-beli x szerinti parciális deriváltja $g'(x_0)$. Jele: $f'_x(x_0, y_0)$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$, $(\partial_x f)(x_0, y_0)$.
Hasonlóan definiálható f y szerinti parciális deriváltja (x_0, y_0)-ban.

PÉLDA

$$F(x, y) = x^2 y + x - \sin(y) \Longrightarrow \partial_x F = 2xy + 1, \partial_y F = x^2 - \cos(y)$$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós valós függvény, melyre $(x_0, y_0) \in D$. Ha a $g(x) = f(x, y_0)$ egyváltozós valós függvény deriválható x_0-ban, akkor azt mondjuk, hogy f x szerint parciálisan deriválható (x_0, y_0)-ban, és (x_0, y_0)-beli x szerinti parciális deriváltja $g'(x_0)$. Jele: $f'_x(x_0, y_0)$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$, $(\partial_x f)(x_0, y_0)$.
Hasonlóan definiálható f y szerinti parciális deriváltja (x_0, y_0)-ban.

PÉLDA

$$F(x, y) = x^2y + x - \sin(y) \implies \partial_x F = 2xy + 1, \partial_y F = x^2 - \cos(y)$$

Implicit módon adott függvény/görbe

Definíció

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós valós függvény, melyre $(x_0, y_0) \in D$. Ha a $g(x) = f(x, y_0)$ egyváltozós valós függvény deriválható x_0-ban, akkor azt mondjuk, hogy f x szerint parciálisan deriválható (x_0, y_0)-ban, és (x_0, y_0)-beli x szerinti parciális deriváltja $g'(x_0)$. Jele: $f'_x(x_0, y_0)$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$, $(\partial_x f)(x_0, y_0)$.
Hasonlóan definiálható f y szerinti parciális deriváltja (x_0, y_0)-ban.

Példa

$$F(x, y) = x^2 y + x - \sin(y) \Longrightarrow \partial_x F = 2xy + 1, \partial_y F = x^2 - \cos(y)$$

Implicit módon adott függvény/görbe

Tétel

Legyen az $F : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény parciálisan deriválható (x_0, y_0) egy környezetében, és legyenek $\partial_x F, \partial_y F$ folytonosak (x_0, y_0)-ban. Ha $F(x_0, y_0) = 0$ és $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, akkor (x_0, y_0) egy környezetében $F(x, y) = 0$ egy implicit módon adott f függvény egyenlete, melynek deriváltja x_0-ban

$$f'(x_0) = -\frac{(\partial_x F)(x_0, y_0)}{(\partial_y F)(x_0, y_0)}.$$

Implicit módon adott függvény/görbe

Tétel

Legyen az $F : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény parciálisan deriválható (x_0, y_0) egy környezetében, és legyenek $\partial_x F, \partial_y F$ folytonosak (x_0, y_0)-ban. Ha $F(x_0, y_0) = 0$ és $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, akkor (x_0, y_0) egy környezetében $F(x, y) = 0$ egy implicit módon adott f függvény egyenlete, melynek deriváltja x_0-ban

$$f'(x_0) = -\frac{(\partial_x F)(x_0, y_0)}{(\partial_y F)(x_0, y_0)}.$$

Implicit módon adott függvény/görbe

Tétel

Legyen az $F : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény parciálisan deriválható (x_0, y_0) egy környezetében, és legyenek $\partial_x F, \partial_y F$ folytonosak (x_0, y_0)-ban. Ha $F(x_0, y_0) = 0$ és $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, akkor (x_0, y_0) egy környezetében $F(x, y) = 0$ egy implicit módon adott f függvény egyenlete, melynek deriváltja x_0-ban

$$f'(x_0) = -\frac{(\partial_x F)(x_0, y_0)}{(\partial_y F)(x_0, y_0)}.$$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

TÉTEL

Legyen az $F : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény parciálisan deriválható (x_0, y_0) egy környezetében, és legyenek $\partial_x F, \partial_y F$ folytonosak (x_0, y_0)-ban. Ha $F(x_0, y_0) = 0$ és $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, akkor (x_0, y_0) egy környezetében $F(x, y) = 0$ egy implicit módon adott f függvény egyenlete, melynek deriváltja x_0-ban

$$f'(x_0) = -\frac{(\partial_x F)(x_0, y_0)}{(\partial_y F)(x_0, y_0)}.$$

Implicit módon adott függvény/görbe

Tétel

Legyen az $F : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény parciálisan deriválható (x_0, y_0) egy környezetében, és legyenek $\partial_x F, \partial_y F$ folytonosak (x_0, y_0)-ban. Ha $F(x_0, y_0) = 0$ és $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, akkor (x_0, y_0) egy környezetében $F(x, y) = 0$ egy implicit módon adott f függvény egyenlete, melynek deriváltja x_0-ban

$$f'(x_0) = -\frac{(\partial_x F)(x_0, y_0)}{(\partial_y F)(x_0, y_0)}.$$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

PÉLDA

Írja fel az $e^{x^2y} + y - x = 0$ egyenlettel implicit módon definiált függvény érintőjének egyenletét a $(0, -1)$ pontban.

Megoldás.

$F(x, y) = e^{x^2y} + y - x \Longrightarrow F'_x(x, y) = e^{x^2y} 2xy - 1, F'_y(x, y) = e^{x^2y} x^2 + 1.$

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0, -1)}{F'_y(0, -1)} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

PÉLDA

Írja fel az $e^{x^2y} + y - x = 0$ egyenlettel implicit módon definiált függvény érintőjének egyenletét a $(0, -1)$ pontban.

Megoldás.

$$F(x, y) = e^{x^2y} + y - x \Longrightarrow F'_x(x, y) = e^{x^2y}2xy - 1, F'_y(x, y) = e^{x^2y}x^2 + 1.$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0, -1)}{F'_y(0, -1)} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

PÉLDA

Írja fel az $e^{x^2y} + y - x = 0$ egyenlettel implicit módon definiált függvény érintőjének egyenletét a $(0, -1)$ pontban.

Megoldás.

$$F(x,y) = e^{x^2y}+y-x \Longrightarrow F'_x(x,y) = e^{x^2y}2xy-1,\ F'_y(x,y) = e^{x^2y}x^2+1.$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0,-1)}{F'_y(0,-1)} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

PÉLDA

Írja fel az $e^{x^2 y} + y - x = 0$ *egyenlettel implicit módon definiált függvény érintőjének egyenletét a* $(0, -1)$ *pontban.*

Megoldás.

$$F(x,y) = e^{x^2 y} + y - x \Longrightarrow F'_x(x,y) = e^{x^2 y} 2xy - 1, \; F'_y(x,y) = e^{x^2 y} x^2 + 1.$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0,-1)}{F'_y(0,-1)} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

PÉLDA

Írja fel az $e^{x^2y} + y - x = 0$ egyenlettel implicit módon definiált függvény érintőjének egyenletét a $(0, -1)$ pontban.

Megoldás.

$$F(x,y) = e^{x^2y} + y - x \Longrightarrow F'_x(x,y) = e^{x^2y}2xy - 1, F'_y(x,y) = e^{x^2y}x^2 + 1.$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0,-1)}{F'_y(0,-1)} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

PÉLDA

Írja fel az $e^{x^2y} + y - x = 0$ egyenlettel implicit módon definiált függvény érintőjének egyenletét a $(0, -1)$ pontban.

Megoldás.

$$F(x, y) = e^{x^2y} + y - x \Longrightarrow F'_x(x, y) = e^{x^2y}2xy - 1, F'_y(x, y) = e^{x^2y}x^2 + 1.$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0, -1)}{F'_y(0, -1)} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

PÉLDA

Írja fel az $e^{x^2y} + y - x = 0$ egyenlettel implicit módon definiált függvény érintőjének egyenletét a $(0, -1)$ pontban.

Megoldás.

$$F(x,y) = e^{x^2y}+y-x \Longrightarrow F'_x(x,y) = e^{x^2y}2xy-1, F'_y(x,y) = e^{x^2y}x^2+1.$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0,-1)}{F'_y(0,-1)} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

Implicit módon adott függvény/görbe

Példa

Írja fel az $e^{x^2y} + y - x = 0$ *egyenlettel implicit módon definiált függvény érintőjének egyenletét a* $(0, -1)$ *pontban.*

Megoldás.

$$F(x,y) = e^{x^2y}+y-x \Longrightarrow F'_x(x,y) = e^{x^2y}2xy-1, F'_y(x,y) = e^{x^2y}x^2+1.$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0,-1)}{F'_y(0,-1)} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Másik megoldás.

$$e^{x^2 y} + y - x = 0 \Longrightarrow \left(e^{x^2 y} + y - x\right)' = 0 \Longrightarrow$$

$$e^{x^2 y} \cdot \left(2xy + x^2 y'\right) + y' - 1 = 0 \Longrightarrow y' \left(x^2 e^{x^2 y} + 1\right) = 1 - 2xe^{x^2 y}$$

$$y' = \frac{1 - 2xe^{x^2 y}}{x^2 e^{x^2 y} + 1} \Longrightarrow y'(0) = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Másik megoldás.

$$e^{x^2 y} + y - x = 0 \Longrightarrow \left(e^{x^2 y} + y - x\right)' = 0 \Longrightarrow$$

$$e^{x^2 y} \cdot \left(2xy + x^2 y'\right) + y' - 1 = 0 \Longrightarrow y'\left(x^2 e^{x^2 y} + 1\right) = 1 - 2xe^{x^2 y}$$

$$y' = \frac{1 - 2xe^{x^2 y}}{x^2 e^{x^2 y} + 1} \Longrightarrow y'(0) = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Másik megoldás.

$$e^{x^2y} + y - x = 0 \Longrightarrow \left(e^{x^2y} + y - x\right)' = 0 \Longrightarrow$$

$$e^{x^2y} \cdot \left(2xy + x^2y'\right) + y' - 1 = 0 \Longrightarrow y'\left(x^2e^{x^2y} + 1\right) = 1 - 2xe^{x^2y}$$

$$y' = \frac{1 - 2xe^{x^2y}}{x^2e^{x^2y} + 1} \Longrightarrow y'(0) = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Másik megoldás.

$$e^{x^2y} + y - x = 0 \Longrightarrow \left(e^{x^2y} + y - x\right)' = 0 \Longrightarrow$$

$$e^{x^2y} \cdot \left(2xy + x^2y'\right) + y' - 1 = 0 \Longrightarrow y'\left(x^2e^{x^2y} + 1\right) = 1 - 2xe^{x^2y}$$

$$y' = \frac{1 - 2xe^{x^2y}}{x^2e^{x^2y} + 1} \Longrightarrow y'(0) = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Másik megoldás.

$$e^{x^2y} + y - x = 0 \Longrightarrow \left(e^{x^2y} + y - x\right)' = 0 \Longrightarrow$$

$$e^{x^2y} \cdot \left(2xy + x^2y'\right) + y' - 1 = 0 \Longrightarrow y'\left(x^2e^{x^2y} + 1\right) = 1 - 2xe^{x^2y}$$

$$y' = \frac{1 - 2xe^{x^2y}}{x^2e^{x^2y} + 1} \Longrightarrow y'(0) = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

Implicit módon adott függvény/görbe

Másik megoldás.

$$e^{x^2y} + y - x = 0 \Longrightarrow \left(e^{x^2y} + y - x\right)' = 0 \Longrightarrow$$

$$e^{x^2y} \cdot \left(2xy + x^2y'\right) + y' - 1 = 0 \Longrightarrow y'\left(x^2e^{x^2y} + 1\right) = 1 - 2xe^{x^2y}$$

$$y' = \frac{1 - 2xe^{x^2y}}{x^2e^{x^2y} + 1} \Longrightarrow y'(0) = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Másik megoldás.

$$e^{x^2y}+y-x=0 \Longrightarrow \left(e^{x^2y}+y-x\right)'=0 \Longrightarrow$$

$$e^{x^2y}\cdot\left(2xy+x^2y'\right)+y'-1=0 \Longrightarrow y'\left(x^2e^{x^2y}+1\right)=1-2xe^{x^2y}$$

$$y'=\frac{1-2xe^{x^2y}}{x^2e^{x^2y}+1} \Longrightarrow y'(0)=1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y=-1+1\cdot(x-0)=x-1.$

IMPLICIT MÓDON ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Másik megoldás.

$$e^{x^2y} + y - x = 0 \Longrightarrow \left(e^{x^2y} + y - x\right)' = 0 \Longrightarrow$$

$$e^{x^2y} \cdot \left(2xy + x^2y'\right) + y' - 1 = 0 \Longrightarrow y' \left(x^2e^{x^2y} + 1\right) = 1 - 2xe^{x^2y}$$

$$y' = \frac{1 - 2xe^{x^2y}}{x^2e^{x^2y} + 1} \Longrightarrow y'(0) = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete : $y = -1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$

PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Legyenek $x = x(t)$ és $y = y(t)$, $t \in D \subseteq \mathbb{R}$ egyváltozós valós függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\},\, t \in D$$

egy paraméteres alakban adott görbe egyenletrendszere. Ha $x(t)$ invertálható D-n, azt mondjuk, hogy a fenti görbe egy paraméteres alakban adott függvény.

PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Legyenek $x = x(t)$ és $y = y(t)$, $t \in D \subseteq \mathbb{R}$ egyváltozós valós függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}, t \in D$$

egy paraméteres alakban adott görbe egyenletrendszere. Ha $x(t)$ invertálható D-n, azt mondjuk, hogy a fenti görbe egy paraméteres alakban adott függvény.

PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Legyenek $x = x(t)$ és $y = y(t)$, $t \in D \subseteq \mathbb{R}$ egyváltozós valós függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\}, t \in D$$

egy paraméteres alakban adott görbe egyenletrendszere. Ha $x(t)$ invertálható D-n, azt mondjuk, hogy a fenti görbe egy paraméteres alakban adott függvény.

PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Legyenek az

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}, t \in D$$

paraméteres alakban adott függvény koordinátafüggvényei deriválhatóak a $t = t_0$ paraméterértéknél. Ha $\dot{x}(t_0) \neq 0$, akkor a fenti paraméteres alakban adott függvény is deriválható a $t = t_0$ paraméterértéknél, és deriváltja

$$y'|_{t=t_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)$$

PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Legyenek az

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\}, t \in D$$

paraméteres alakban adott függvény koordinátafüggvényei deriválhatóak a $t = t_0$ paraméterértéknél. Ha $\dot{x}(t_0) \neq 0$, akkor a fenti paraméteres alakban adott függvény is deriválható a $t = t_0$ paraméterértéknél, és deriváltja

$$y'|_{t=t_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)$$

Paraméteres alakban adott függvény/görbe

Legyenek az

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\}, t \in D$$

paraméteres alakban adott függvény koordinátafüggvényei deriválhatóak a $t = t_0$ paraméterértéknél. Ha $\dot{x}(t_0) \neq 0$, akkor a fenti paraméteres alakban adott függvény is deriválható a $t = t_0$ paraméterértéknél, és deriváltja

$$y'|_{t=t_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right)$$

PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Legyenek az

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}, t \in D$$

paraméteres alakban adott függvény koordinátafüggvényei deriválhatóak a $t = t_0$ paraméterértéknél. Ha $\dot{x}(t_0) \neq 0$, akkor a fenti paraméteres alakban adott függvény is deriválható a $t = t_0$ paraméterértéknél, és deriváltja

$$y'|_{t=t_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right)$$

PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Példa. Egy vízszintes egyenes mentén gördülő r sugarú kör egy rögzített pontjának pályáját r paraméterű cikloisnak nevezzük.

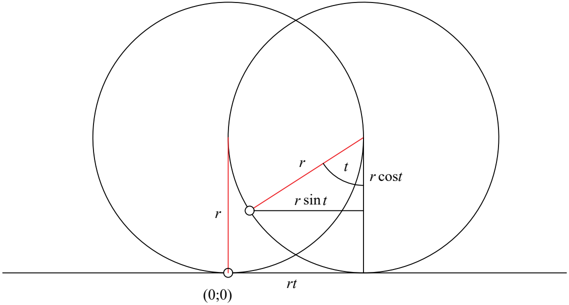

FIGURE: Az r-paraméterű ciklois generálása

Paraméteres alakban adott függvény/görbe

Az origón átmenő r paraméterű ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t - \sin(t)) \\ y &= r(1 - \cos(t)) \end{aligned}\right\}, t \in \mathbb{R}$$

Feladat

Írjuk fel a fenti ciklois érintőjének egyenletét a $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontban.

$$\dot{x}(t) = r(1 - \cos(t)) \quad , \dot{y}(t) = r\sin(t)$$

$$m = y'|_{t=\pi/3} = \frac{r \sin \frac{\pi}{3}}{r(1 - \cos \frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}.$$

Az érintési pont: $\left(r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{r}{2}\right)$. Azaz az érintő egyenlete: $y = \frac{r}{2} + \sqrt{3}\left(x - r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Az origón átmenő r paraméterű ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{array}{l} x = r(t - \sin(t)) \\ y = r(1 - \cos(t)) \end{array}\right\}, t \in \mathbb{R}$$

FELADAT

Írjuk fel a fenti ciklois érintőjének egyenletét a $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontban.

$$\dot{x}(t) = r(1 - \cos(t)) \quad , \dot{y}(t) = r\sin(t)$$

$$m = y'|_{t=\pi/3} = \frac{r\sin\frac{\pi}{3}}{r(1-\cos\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}.$$

Az érintési pont: $\left(r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{r}{2}\right)$. Azaz az érintő egyenlete: $y = \frac{r}{2} + \sqrt{3}\left(x - r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

Paraméteres alakban adott függvény/görbe

Az origón átmenő r paraméterű ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t-\sin(t)) \\ y &= r(1-\cos(t)) \end{aligned}\right\}, t \in \mathbb{R}$$

Feladat

Írjuk fel a fenti ciklois érintőjének egyenletét a $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontban.

$$\dot{x}(t) = r(1-\cos(t)) \quad , \dot{y}(t) = r\sin(t)$$

$$m = y'|_{t=\pi/3} = \frac{r\sin\frac{\pi}{3}}{r(1-\cos\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}.$$

Az érintési pont: $\left(r\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{r}{2}\right)$. Azaz az érintő egyenlete: $y = \frac{r}{2} + \sqrt{3}\left(x - r\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Az origón átmenő r paraméterű ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t - \sin(t)) \\ y &= r(1 - \cos(t)) \end{aligned}\right\}, t \in \mathbb{R}$$

FELADAT

Írjuk fel a fenti ciklois érintőjének egyenletét a $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontban.

$$\dot{x}(t) = r(1 - \cos(t)) \quad , \dot{y}(t) = r\sin(t)$$

$$m = y'|_{t=\pi/3} = \frac{r\sin\frac{\pi}{3}}{r(1-\cos\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}.$$

Az érintési pont: $\left(r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{r}{2}\right)$. Azaz az érintő egyenlete: $y = \frac{r}{2} + \sqrt{3}\left(x - r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Az origón átmenő r paraméterű ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t-\sin(t)) \\ y &= r(1-\cos(t)) \end{aligned}\right\}, t \in \mathbb{R}$$

FELADAT

Írjuk fel a fenti ciklois érintőjének egyenletét a $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontban.

$$\dot{x}(t) = r(1-\cos(t)) \quad , \dot{y}(t) = r\sin(t)$$

$$m = y'|_{t=\pi/3} = \frac{r \sin\frac{\pi}{3}}{r(1-\cos\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}.$$

Az érintési pont: $\left(r\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{r}{2}\right)$. Azaz az érintő egyenlete: $y = \frac{r}{2} + \sqrt{3}\left(x - r\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

Paraméteres alakban adott függvény/görbe

Az origón átmenő r paraméterű ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t-\sin(t)) \\ y &= r(1-\cos(t)) \end{aligned}\right\}, t \in \mathbb{R}$$

Feladat

Írjuk fel a fenti ciklois érintőjének egyenletét a $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontban.

$$\dot{x}(t) = r(1-\cos(t)) \quad , \dot{y}(t) = r\sin(t)$$

$$m = y'|_{t=\pi/3} = \frac{r\sin\frac{\pi}{3}}{r(1-\cos\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}.$$

Az érintési pont: $\left(r\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{r}{2}\right)$. Azaz az érintő egyenlete:

$y = \frac{r}{2} + \sqrt{3}\left(x - r\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$

PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Az origón átmenő r paraméterű ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t-\sin(t)) \\ y &= r(1-\cos(t)) \end{aligned}\right\} , t \in \mathbb{R}$$

FELADAT

Írjuk fel a fenti ciklois érintőjének egyenletét a $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontban.

$$\dot{x}(t) = r(1-\cos(t)) \quad , \dot{y}(t) = r\sin(t)$$

$$m = y'|_{t=\pi/3} = \frac{r\sin\frac{\pi}{3}}{r(1-\cos\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}.$$

Az érintési pont: $\left(r\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{r}{2}\right)$. Azaz az érintő egyenlete: $y = \frac{r}{2} + \sqrt{3}\left(x - r\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

Paraméteres alakban adott függvény/görbe

Az origón átmenő r paraméterű ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{array}{l} x = r(t - \sin(t)) \\ y = r(1 - \cos(t)) \end{array}\right\}, t \in \mathbb{R}$$

Feladat

Írjuk fel a fenti ciklois érintőjének egyenletét a $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontban.

$$\dot{x}(t) = r(1 - \cos(t)) \quad , \dot{y}(t) = r\sin(t)$$

$$m = y'|_{t=\pi/3} = \frac{r\sin\frac{\pi}{3}}{r(1-\cos\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}.$$

Az érintési pont: $\left(r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{r}{2}\right)$. Azaz az érintő egyenlete:

$$y = \frac{r}{2} + \sqrt{3}\left(x - r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY/GÖRBE

Az origón átmenő r paraméterű ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t - \sin(t)) \\ y &= r(1 - \cos(t)) \end{aligned}\right\} , t \in \mathbb{R}$$

FELADAT

Írjuk fel a fenti ciklois érintőjének egyenletét a $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontban.

$$\dot{x}(t) = r(1 - \cos(t)) \quad , \dot{y}(t) = r\sin(t)$$

$$m = y'|_{t=\pi/3} = \frac{r \sin \frac{\pi}{3}}{r(1 - \cos \frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}.$$

Az érintési pont: $\left(r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{r}{2}\right)$. Azaz az érintő egyenlete: $y = \frac{r}{2} + \sqrt{3}\left(x - r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

TAYLOR-POLINOM

MEGJEGYZÉS

Az $y = f(x)$ *görbe* $(x_0, f(x_0))$ *pontján átmenő egyenesek közül a 'legjobban közelítő egyenes' az*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

KÉRDÉS

Adott $n \geq 1$ *esetén mi a legjobban közelítő legfeljebb n-edfokú polinom?*

TAYLOR-POLINOM

MEGJEGYZÉS

Az $y = f(x)$ görbe $(x_0, f(x_0))$ pontján átmenő egyenesek közül a 'legjobban közelítő egyenes' az

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

KÉRDÉS

Adott $n \geq 1$ esetén mi a legjobban közelítő legfeljebb n-edfokú polinom?

TAYLOR-POLINOM

DEFINÍCIÓ

Legyen f n-szer deriválható x_0-ban. Ekkor a

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

polinomot f x_0-beli n-edrendű Taylor-polinomjának nevezzük.

Taylor-polinom

Definíció

Legyen f n-szer deriválható x_0-ban. Ekkor a

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

polinomot f x_0-beli n-edrendű Taylor-polinomjának nevezzük.

TAYLOR-POLINOM

DEFINÍCIÓ

Legyen f n-szer deriválható x_0-ban. Ekkor a

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

polinomot f x_0-beli n-edrendű Taylor-polinomjának nevezzük.

TAYLOR-POLINOM

DEFINÍCIÓ

Legyen f n-szer deriválható x_0-ban. Ekkor a

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

polinomot f x_0-beli n-edrendű Taylor-polinomjának nevezzük.

TAYLOR-POLINOM

MEGJEGYZÉS

Meggondolható, hogy $T_n(x)$ az a legfeljebb n-edfokú polinom, melynek első n deriváltja x_0-ban megegyezik f első n deriváltjával x_0-ban.

FELADAT

Írjuk fel $f(x) = e^x$ n-edrendű Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ helyen.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, stb. Ebből $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Tehát

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

TAYLOR-POLINOM

MEGJEGYZÉS

Meggondolható, hogy $T_n(x)$ az a legfeljebb n-edfokú polinom, melynek első n deriváltja x_0-ban megegyezik f első n deriváltjával x_0-ban.

FELADAT

Írjuk fel $f(x) = e^x$ n-edrendű Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ helyen.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, stb. Ebből $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Tehát

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

TAYLOR-POLINOM

MEGJEGYZÉS

Meggondolható, hogy $T_n(x)$ az a legfeljebb n-edfokú polinom, melynek első n deriváltja x_0-ban megegyezik f első n deriváltjával x_0-ban.

FELADAT

Írjuk fel $f(x) = e^x$ n-edrendű Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ helyen.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, stb. Ebből $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Tehát

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

TAYLOR-POLINOM

MEGJEGYZÉS

Meggondolható, hogy $T_n(x)$ az a legfeljebb n-edfokú polinom, melynek első n deriváltja x_0-ban megegyezik f első n deriváltjával x_0-ban.

FELADAT

Írjuk fel $f(x) = e^x$ n-edrendű Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ helyen.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, stb. Ebből $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Tehát

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

TAYLOR-POLINOM

MEGJEGYZÉS

Meggondolható, hogy $T_n(x)$ az a legfeljebb n-edfokú polinom, melynek első n deriváltja x_0-ban megegyezik f első n deriváltjával x_0-ban.

FELADAT

Írjuk fel $f(x) = e^x$ n-edrendű Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ helyen.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, stb. Ebből
$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Tehát

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Taylor-polinom

Megjegyzés

Meggondolható, hogy $T_n(x)$ az a legfeljebb n-edfokú polinom, melynek első n deriváltja x_0-ban megegyezik f első n deriváltjával x_0-ban.

Feladat

Írjuk fel $f(x) = e^x$ n-edrendű Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ helyen.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, stb. Ebből
$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Tehát

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

A TAYLOR-TÉTEL

DEFINÍCIÓ

Legyen f n-szer deriválható x_0-ban. Ekkor $T_n(x)$ hibatagja az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ mennyiség.

TÉTEL

Legyen f $(n+1)$-szer deriválható az $[x_0, x]$ intervallumon. Ekkor van olyan $t \in (x_0, x)$, melyre

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

A bizonyítás ötlete:
A Cauchy-tételt kell alkalmazni megfelelően választott függvényekre.

A TAYLOR-TÉTEL

DEFINÍCIÓ

Legyen f n-szer deriválható x_0-ban. Ekkor $T_n(x)$ hibatagja az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ mennyiség.

TÉTEL

Legyen f $(n+1)$-szer deriválható az $[x_0, x]$ intervallumon. Ekkor van olyan $t \in (x_0, x)$, melyre

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

A bizonyítás ötlete:
A Cauchy-tételt kell alkalmazni megfelelően választott függvényekre.

A TAYLOR-TÉTEL

DEFINÍCIÓ

Legyen f n-szer deriválható x_0-ban. Ekkor $T_n(x)$ hibatagja az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ mennyiség.

TÉTEL

Legyen f $(n+1)$-szer deriválható az $[x_0, x]$ intervallumon. Ekkor van olyan $t \in (x_0, x)$, melyre

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

A bizonyítás ötlete:
A Cauchy-tételt kell alkalmazni megfelelően választott függvényekre.

A Taylor-tétel

Definíció

Legyen f n-szer deriválható x_0-ban. Ekkor $T_n(x)$ hibatagja az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ mennyiség.

Tétel

Legyen f $(n+1)$-szer deriválható az $[x_0, x]$ intervallumon. Ekkor van olyan $t \in (x_0, x)$, melyre

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

A bizonyítás ötlete:
A Cauchy-tételt kell alkalmazni megfelelően választott függvényekre.

A Taylor-tétel

Definíció

Legyen f n-szer deriválható x_0-ban. Ekkor $T_n(x)$ hibatagja az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ mennyiség.

Tétel

Legyen f $(n+1)$-szer deriválható az $[x_0, x]$ intervallumon. Ekkor van olyan $t \in (x_0, x)$, melyre

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

A bizonyítás ötlete:
A Cauchy-tételt kell alkalmazni megfelelően választott függvényekre.

Példa

Feladat

Határozzuk meg e értékét $0,001$ *pontossággal!*

Az e számot az e^x függvény Taylor-polinomjával közelítjük az $x_0 = 0$ és $x = 1$ választással. A Taylor-tétel alapján

$$e = T_n(1) + R_n(1) = e^0 + e^0 + \frac{e^0}{2} + \ldots + \frac{e^0}{n!} + \frac{e^t}{(n+1)!}, \quad t \in (0,1).$$

Ha a közelítés $e \approx T_n(1)$, akkor a hiba $R_n(1) = \frac{e^t}{(n+1)!}$ alkalmas $t \in (0,1)$ esetén. Tanultuk, hogy $0 < e < 4$, tehát e^x derviáltja pozitív, azaz $e^t < e < 4$, ha $t < 1$. Azaz elég azt garantálni, hogy $\frac{4}{(n+1)!} \leq 0,001$. De ez teljesül, ha $n = 6$, mert $\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260} < 0,001$, amiből a közelítés

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720}.$$

PÉLDA

FELADAT

Határozzuk meg e értékét 0, 001 *pontossággal!*

Az e számot az e^x függvény Taylor-polinomjával közelítjük az $x_0 = 0$ és $x = 1$ választással. A Taylor-tétel alapján

$$e = T_n(1) + R_n(1) = e^0 + e^0 + \frac{e^0}{2} + \ldots + \frac{e^0}{n!} + \frac{e^t}{(n+1)!}, \quad t \in (0,1).$$

Ha a közelítés $e \approx T_n(1)$, akkor a hiba $R_n(1) = \frac{e^t}{(n+1)!}$ alkalmas $t \in (0,1)$ esetén. Tanultuk, hogy $0 < e < 4$, tehát e^x derviáltja pozitív, azaz $e^t < e < 4$, ha $t < 1$. Azaz elég azt garantálni, hogy $\frac{4}{(n+1)!} \leq 0,001$. De ez teljesül, ha $n = 6$, mert $\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260} < 0,001$, amiből a közelítés

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720}.$$

PÉLDA

FELADAT

Határozzuk meg e értékét $0,001$ *pontossággal!*

Az e számot az e^x függvény Taylor-polinomjával közelítjük az $x_0 = 0$ és $x = 1$ választással. A Taylor-tétel alapján

$$e = T_n(1) + R_n(1) = e^0 + e^0 + \frac{e^0}{2} + \ldots + \frac{e^0}{n!} + \frac{e^t}{(n+1)!}, \quad t \in (0,1).$$

Ha a közelítés $e \approx T_n(1)$, akkor a hiba $R_n(1) = \frac{e^t}{(n+1)!}$ alkalmas $t \in (0,1)$ esetén. Tanultuk, hogy $0 < e < 4$, tehát e^x derviáltja pozitív, azaz $e^t < e < 4$, ha $t < 1$. Azaz elég azt garantálni, hogy $\frac{4}{(n+1)!} \leq 0,001$. De ez teljesül, ha $n = 6$, mert $\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260} < 0,001$, amiből a közelítés

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720}.$$

PÉLDA

FELADAT

Határozzuk meg e értékét $0,001$ *pontossággal!*

Az e számot az e^x függvény Taylor-polinomjával közelítjük az $x_0 = 0$ és $x = 1$ választással. A Taylor-tétel alapján

$$e = T_n(1) + R_n(1) = e^0 + e^0 + \frac{e^0}{2} + \ldots + \frac{e^0}{n!} + \frac{e^t}{(n+1)!}, \quad t \in (0,1).$$

Ha a közelítés $e \approx T_n(1)$, akkor a hiba $R_n(1) = \frac{e^t}{(n+1)!}$ alkalmas $t \in (0,1)$ esetén. Tanultuk, hogy $0 < e < 4$, tehát e^x derviáltja pozitív, azaz $e^t < e < 4$, ha $t < 1$. Azaz elég azt garantálni, hogy $\frac{4}{(n+1)!} \leq 0,001$. De ez teljesül, ha $n = 6$, mert $\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260} < 0,001$, amiből a közelítés

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720}.$$

PÉLDA

FELADAT

Határozzuk meg e értékét $0,001$ *pontossággal!*

Az e számot az e^x függvény Taylor-polinomjával közelítjük az $x_0 = 0$ és $x = 1$ választással. A Taylor-tétel alapján

$$e = T_n(1) + R_n(1) = e^0 + e^0 + \frac{e^0}{2} + \ldots + \frac{e^0}{n!} + \frac{e^t}{(n+1)!}, \quad t \in (0,1).$$

Ha a közelítés $e \approx T_n(1)$, akkor a hiba $R_n(1) = \frac{e^t}{(n+1)!}$ alkalmas $t \in (0,1)$ esetén. Tanultuk, hogy $0 < e < 4$, tehát e^x derviáltja pozitív, azaz $e^t < e < 4$, ha $t < 1$. Azaz elég azt garantálni, hogy $\frac{4}{(n+1)!} \leq 0,001$. De ez teljesül, ha $n = 6$, mert $\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260} < 0,001$, amiből a közelítés

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720}.$$

PÉLDA

FELADAT

Határozzuk meg e értékét $0,001$ *pontossággal!*

Az e számot az e^x függvény Taylor-polinomjával közelítjük az $x_0 = 0$ és $x = 1$ választással. A Taylor-tétel alapján

$$e = T_n(1)+R_n(1) = e^0+e^0+\frac{e^0}{2}+\ldots+\frac{e^0}{n!}+\frac{e^t}{(n+1)!}, \quad t \in (0,1).$$

Ha a közelítés $e \approx T_n(1)$, akkor a hiba $R_n(1) = \frac{e^t}{(n+1)!}$ alkalmas $t \in (0,1)$ esetén. Tanultuk, hogy $0 < e < 4$, tehát e^x derviáltja pozitív, azaz $e^t < e < 4$, ha $t < 1$. Azaz elég azt garantálni, hogy $\frac{4}{(n+1)!} \leq 0,001$. De ez teljesül, ha $n = 6$, mert $\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260} < 0,001$, amiből a közelítés

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{6!} = \frac{1957}{720}.$$

PÉLDA

FELADAT

Határozzuk meg e értékét $0,001$ *pontossággal!*

Az e számot az e^x függvény Taylor-polinomjával közelítjük az $x_0 = 0$ és $x = 1$ választással. A Taylor-tétel alapján

$$e = T_n(1)+R_n(1) = e^0+e^0+\frac{e^0}{2}+\ldots+\frac{e^0}{n!}+\frac{e^t}{(n+1)!}, \quad t \in (0,1).$$

Ha a közelítés $e \approx T_n(1)$, akkor a hiba $R_n(1) = \frac{e^t}{(n+1)!}$ alkalmas $t \in (0,1)$ esetén. Tanultuk, hogy $0 < e < 4$, tehát e^x derviáltja pozitív, azaz $e^t < e < 4$, ha $t < 1$. Azaz elég azt garantálni, hogy $\frac{4}{(n+1)!} \leq 0,001$. De ez teljesül, ha $n = 6$, mert $\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260} < 0,001$, amiből a közelítés

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{6!} = \frac{1957}{720}.$$

PÉLDA

FELADAT

Határozzuk meg e értékét $0,001$ *pontossággal!*

Az e számot az e^x függvény Taylor-polinomjával közelítjük az $x_0 = 0$ és $x = 1$ választással. A Taylor-tétel alapján

$$e = T_n(1)+R_n(1) = e^0+e^0+\frac{e^0}{2}+\ldots+\frac{e^0}{n!}+\frac{e^t}{(n+1)!}, \quad t \in (0,1).$$

Ha a közelítés $e \approx T_n(1)$, akkor a hiba $R_n(1) = \frac{e^t}{(n+1)!}$ alkalmas $t \in (0,1)$ esetén. Tanultuk, hogy $0 < e < 4$, tehát e^x derviáltja pozitív, azaz $e^t < e < 4$, ha $t < 1$. Azaz elég azt garantálni, hogy $\frac{4}{(n+1)!} \leq 0,001$. De ez teljesül, ha $n = 6$, mert $\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260} < 0,001$, amiből a közelítés

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{6!} = \frac{1957}{720}.$$

Példa

Feladat

Határozzuk meg e értékét $0,001$ *pontossággal!*

Az e számot az e^x függvény Taylor-polinomjával közelítjük az $x_0 = 0$ és $x = 1$ választással. A Taylor-tétel alapján

$$e = T_n(1) + R_n(1) = e^0 + e^0 + \frac{e^0}{2} + \ldots + \frac{e^0}{n!} + \frac{e^t}{(n+1)!}, \quad t \in (0,1).$$

Ha a közelítés $e \approx T_n(1)$, akkor a hiba $R_n(1) = \frac{e^t}{(n+1)!}$ alkalmas $t \in (0,1)$ esetén. Tanultuk, hogy $0 < e < 4$, tehát e^x derviáltja pozitív, azaz $e^t < e < 4$, ha $t < 1$. Azaz elég azt garantálni, hogy $\frac{4}{(n+1)!} \leq 0,001$. De ez teljesül, ha $n = 6$, mert $\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260} < 0,001$, amiből a közelítés

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720}.$$

PÉLDA

FELADAT

Határozzuk meg e értékét $0,001$ *pontossággal!*

Az e számot az e^x függvény Taylor-polinomjával közelítjük az $x_0 = 0$ és $x = 1$ választással. A Taylor-tétel alapján

$$e = T_n(1)+R_n(1) = e^0+e^0+\frac{e^0}{2}+\ldots+\frac{e^0}{n!}+\frac{e^t}{(n+1)!}, \quad t \in (0,1).$$

Ha a közelítés $e \approx T_n(1)$, akkor a hiba $R_n(1) = \frac{e^t}{(n+1)!}$ alkalmas $t \in (0,1)$ esetén. Tanultuk, hogy $0 < e < 4$, tehát e^x derviáltja pozitív, azaz $e^t < e < 4$, ha $t < 1$. Azaz elég azt garantálni, hogy $\frac{4}{(n+1)!} \leq 0,001$. De ez teljesül, ha $n = 6$, mert $\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260} < 0,001$, amiből a közelítés

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{6!} = \frac{1957}{720}.$$