17. előadás: Határozatlan integrál, Newton–Leibniz tétel

INTEGRÁLFÜGGVÉNY

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor f integrálfüggvénye az a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

ÁLLÍTÁS

Ekkor F folytonos, továbbá differenciálható minden olyan $x \in (a, b)$ pontban, ahol f folytonos, és ott

$$F'(x) = f(x).$$

Integrálfüggvény

Definíció

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrálható függvény. Ekkor* f *integrálfüggvénye az a* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény, amelyre*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Állítás

Ekkor F *folytonos, továbbá differenciálható minden olyan* $x \in (a, b)$ *pontban, ahol* f *folytonos, és ott*

$$F'(x) = f(x).$$

Integrálfüggvény

Definíció

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor f integrálfüggvénye az a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Állítás

Ekkor F folytonos, továbbá differenciálható minden olyan $x \in (a, b)$ pontban, ahol f folytonos, és ott

$$F'(x) = f(x).$$

INTEGRÁLFÜGGVÉNY

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor f integrálfüggvénye az a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

ÁLLÍTÁS

Ekkor F folytonos, továbbá differenciálható minden olyan $x \in (a, b)$ pontban, ahol f folytonos, és ott

$$F'(x) = f(x).$$

INTEGRÁLFÜGGVÉNY

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor f integrálfüggvénye az a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

ÁLLÍTÁS

Ekkor F folytonos, továbbá differenciálható minden olyan $x \in (a, b)$ pontban, ahol f folytonos, és ott

$$F'(x) = f(x).$$

Integrálfüggvény

Definíció

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor f integrálfüggvénye az a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Állítás

Ekkor F folytonos, továbbá differenciálható minden olyan $x \in (a, b)$ pontban, ahol f folytonos, és ott

$$F'(x) = f(x).$$

AZ INTEGRÁLFÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA ÉS DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA

Bizonyítás.

Folytonosság:

Tudjuk, hogy mivel f integrálható $[a, b]$-n, ezért korlátos, azaz létezik olyan K szám, melyre $|f(x)| \leq K$ minden $x \in [a, b]$ esetén.

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \left| \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t)|\mathrm{d}t \leq K|h|.$$

AZ INTEGRÁLFÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA ÉS DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA

Bizonyítás.
Folytonosság:
Tudjuk, hogy mivel f integrálható $[a, b]$-n, ezért korlátos, azaz létezik olyan K szám, melyre $|f(x)| \leq K$ minden $x \in [a, b]$ esetén.

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \left| \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t)|\mathrm{d}t \leq K|h|.$$

AZ INTEGRÁLFÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA ÉS DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA

Bizonyítás.
Folytonosság:
Tudjuk, hogy mivel f integrálható $[a,b]$-n, ezért korlátos, azaz létezik olyan K szám, melyre $|f(x)| \le K$ minden $x \in [a,b]$ esetén.

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \left| \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \right| \le \int_x^{x+h} |f(t)|\mathrm{d}t \le K|h|.$$

Az integrálfüggvény folytonossága és differenciálhatósága

Bizonyítás.
Folytonosság:
Tudjuk, hogy mivel f integrálható $[a, b]$-n, ezért korlátos, azaz létezik olyan K szám, melyre $|f(x)| \leq K$ minden $x \in [a, b]$ esetén.

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \left| \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t)|\mathrm{d}t \leq K|h|.$$

AZ INTEGRÁLFÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA ÉS DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA

Bizonyítás.
Folytonosság:
Tudjuk, hogy mivel f integrálható $[a,b]$-n, ezért korlátos, azaz létezik olyan K szám, melyre $|f(x)| \leq K$ minden $x \in [a,b]$ esetén.

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \left| \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t)|\mathrm{d}t \leq K|h|.$$

AZ INTEGRÁLFÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA ÉS DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA

Bizonyítás.
Folytonosság:
Tudjuk, hogy mivel f integrálható $[a, b]$-n, ezért korlátos, azaz létezik olyan K szám, melyre $|f(x)| \leq K$ minden $x \in [a, b]$ esetén.

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \left| \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t)|\mathrm{d}t \leq K|h|.$$

AZ INTEGRÁLFÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA ÉS DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA

Bizonyítás.
Differenciálhatóság:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt,$$

és minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ hogy ha $|t-x| < \delta$ akkor $f(t) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$, ebből pedig $|h|(f(x)-\varepsilon) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq |h|(f(x)+\varepsilon)$. Tehát ha $|t-x| < \delta$, akkor

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| \leq \varepsilon.$$

AZ INTEGRÁLFÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA ÉS DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA

Bizonyítás.
Differenciálhatóság:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t,$$

és minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ hogy ha $|t-x| < \delta$ akkor $f(t) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$, ebből pedig $|h|(f(x)-\varepsilon) \leq \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \leq |h|(f(x)+\varepsilon)$. Tehát ha $|t-x| < \delta$, akkor

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Az integrálfüggvény folytonossága és differenciálhatósága

Bizonyítás.
Differenciálhatóság:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t,$$

és minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ hogy ha $|t-x| < \delta$ akkor $f(t) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$, ebből pedig $|h|(f(x)-\varepsilon) \le \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \le |h|(f(x)+\varepsilon)$. Tehát ha $|t-x| < \delta$, akkor

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| \le \varepsilon.$$

Az integrálfüggvény folytonossága és differenciálhatósága

Bizonyítás.
Differenciálhatóság:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t,$$

és minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ hogy ha $|t-x| < \delta$ akkor $f(t) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$, ebből pedig $|h|(f(x)-\varepsilon) \leq \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \leq |h|(f(x)+\varepsilon)$. Tehát ha $|t-x| < \delta$, akkor

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \varepsilon.$$

AZ INTEGRÁLFÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA ÉS DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA

Bizonyítás.
Differenciálhatóság:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t,$$

és minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ hogy ha $|t-x| < \delta$ akkor $f(t) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$, ebből pedig $|h|(f(x)-\varepsilon) \leq \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \leq |h|(f(x)+\varepsilon)$. Tehát ha $|t-x| < \delta$, akkor

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \varepsilon.$$

PRIMITÍV FÜGGVÉNY

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy F az f primitív függvénye $[a, b]$-n, ha F folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-on, továbbá minden $x \in (a, b)$ esetén $F'(x) = f(x)$.

Az előző állítás miatt: minden folytonos f esetén annak F integrálfüggvénye primitív függvénye.

PRIMITÍV FÜGGVÉNY

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy F az f primitív függvénye $[a, b]$-n, ha F folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-on, továbbá minden $x \in (a, b)$ esetén $F'(x) = f(x)$.

Az előző állítás miatt: minden folytonos f esetén annak F integrálfüggvénye primitív függvénye.

Primitív függvény

Definíció

Azt mondjuk, hogy F az f primitív függvénye $[a,b]$-n, ha F folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-on, továbbá minden $x \in (a,b)$ esetén $F'(x) = f(x)$.

Az előző állítás miatt: minden folytonos f esetén annak F integrálfüggvénye primitív függvénye.

Primitív függvény

Definíció

Azt mondjuk, hogy F az f primitív függvénye $[a, b]$-n, ha F folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-on, továbbá minden $x \in (a, b)$ esetén $F'(x) = f(x)$.

Az előző állítás miatt: minden folytonos f esetén annak F integrálfüggvénye primitív függvénye.

PRIMITÍV FÜGGVÉNY

ÁLLÍTÁS

Legyen f egy függvény és F, G két primitív függvénye. Ekkor $F - G = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$ állandóra. Fordítva, ha F primitív függvénye f-nek és $F - G = c$ állandó, akkor G is primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $H = F - G$ nem konstans. Ekkor van olyan $0 \leq x_1 < x_2 \leq b$, melyekre $H(x_1) \neq H(x_2)$. De ebben az esetben a Lagrange-tétel szerint van olyan $c \in (x_1, x_2)$, ahol $H'(c) = \frac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$. De F, G f primitív függvényei, azaz $H'(c) = F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0$, ami ellentmondás. Másrészt, ha $F - G = c$ és F f primitív függvénye, akkor $G' = (F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$, tehát G is F primitív függvénye.

Primitív függvény

Állítás

Legyen f egy függvény és F, G két primitív függvénye. Ekkor $F - G = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$ állandóra. Fordítva, ha F primitív függvénye f-nek és $F - G = c$ állandó, akkor G is primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $H = F - G$ nem konstans. Ekkor van olyan $0 \leq x_1 < x_2 \leq b$, melyekre $H(x_1) \neq H(x_2)$. De ebben az esetben a Lagrange-tétel szerint van olyan $c \in (x_1, x_2)$, ahol $H'(c) = \frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$. De F, G f primitív függvényei, azaz $H'(c) = F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0$, ami ellentmondás. Másrészt, ha $F - G = c$ és F f primitív függvénye, akkor $G' = (F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$, tehát G is F primitív függvénye.

PRIMITÍV FÜGGVÉNY

ÁLLÍTÁS

Legyen f egy függvény és F, G két primitív függvénye. Ekkor $F - G = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$ állandóra. Fordítva, ha F primitív függvénye f-nek és $F - G = c$ állandó, akkor G is primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $H = F - G$ nem konstans. Ekkor van olyan $0 \leq x_1 < x_2 \leq b$, melyekre $H(x_1) \neq H(x_2)$. De ebben az esetben a Lagrange-tétel szerint van olyan $c \in (x_1, x_2)$, ahol $H'(c) = \frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$. De F, G f primitív függvényei, azaz $H'(c) = F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0$, ami ellentmondás. Másrészt, ha $F - G = c$ és F f primitív függvénye, akkor $G' = (F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$, tehát G is F primitív függvénye.

PRIMITÍV FÜGGVÉNY

ÁLLÍTÁS

Legyen f egy függvény és F, G két primitív függvénye. Ekkor $F - G = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$ állandóra. Fordítva, ha F primitív függvénye f-nek és $F - G = c$ állandó, akkor G is primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $H = F - G$ nem konstans. Ekkor van olyan $0 \le x_1 < x_2 \le b$, melyekre $H(x_1) \neq H(x_2)$. De ebben az esetben a Lagrange-tétel szerint van olyan $c \in (x_1, x_2)$, ahol $H'(c) = \frac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$. De F, G f primitív függvényei, azaz $H'(c) = F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0$, ami ellentmondás. Másrészt, ha $F - G = c$ és F f primitív függvénye, akkor $G' = (F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$, tehát G is F primitív függvénye.

PRIMITÍV FÜGGVÉNY

ÁLLÍTÁS

Legyen f egy függvény és F, G két primitív függvénye. Ekkor $F - G = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$ állandóra. Fordítva, ha F primitív függvénye f-nek és $F - G = c$ állandó, akkor G is primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $H = F - G$ nem konstans. Ekkor van olyan $0 \le x_1 < x_2 \le b$, melyekre $H(x_1) \ne H(x_2)$. De ebben az esetben a Lagrange-tétel szerint van olyan $c \in (x_1, x_2)$, ahol $H'(c) = \frac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1} \ne 0$. De F, G f primitív függvényei, azaz $H'(c) = F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0$, ami ellentmondás. Másrészt, ha $F - G = c$ és F f primitív függvénye, akkor $G' = (F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$, tehát G is F primitív függvénye.

PRIMITÍV FÜGGVÉNY

ÁLLÍTÁS

Legyen f egy függvény és F, G két primitív függvénye. Ekkor $F - G = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$ állandóra. Fordítva, ha F primitív függvénye f-nek és $F - G = c$ állandó, akkor G is primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $H = F - G$ nem konstans. Ekkor van olyan $0 \leq x_1 < x_2 \leq b$, melyekre $H(x_1) \neq H(x_2)$. De ebben az esetben a Lagrange-tétel szerint van olyan $c \in (x_1, x_2)$, ahol $H'(c) = \frac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$. De F, G f primitív függvényei, azaz $H'(c) = F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0$, ami ellentmondás. Másrészt, ha $F - G = c$ és F f primitív függvénye, akkor $G' = (F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$, tehát G is F primitív függvénye.

PRIMITÍV FÜGGVÉNY

ÁLLÍTÁS

Legyen f egy függvény és F, G két primitív függvénye. Ekkor $F - G = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$ állandóra. Fordítva, ha F primitív függvénye f-nek és $F - G = c$ állandó, akkor G is primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $H = F - G$ nem konstans. Ekkor van olyan $0 \leq x_1 < x_2 \leq b$, melyekre $H(x_1) \neq H(x_2)$. De ebben az esetben a Lagrange-tétel szerint van olyan $c \in (x_1, x_2)$, ahol $H'(c) = \frac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$. De F, G f primitív függvényei, azaz $H'(c) = F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0$, ami ellentmondás. Másrészt, ha $F - G = c$ és F f primitív függvénye, akkor $G' = (F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$, tehát G is F primitív függvénye.

Primitív függvény

Állítás

Legyen f egy függvény és F, G két primitív függvénye. Ekkor $F - G = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$ állandóra. Fordítva, ha F primitív függvénye f-nek és $F - G = c$ állandó, akkor G is primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $H = F - G$ nem konstans. Ekkor van olyan $0 \leq x_1 < x_2 \leq b$, melyekre $H(x_1) \neq H(x_2)$. De ebben az esetben a Lagrange-tétel szerint van olyan $c \in (x_1, x_2)$, ahol $H'(c) = \frac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$. De F, G f primitív függvényei, azaz $H'(c) = F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0$, ami ellentmondás. Másrészt, ha $F - G = c$ és F f primitív függvénye, akkor $G' = (F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$, tehát G is F primitív függvénye.

Primitív függvény

Állítás

Legyen f egy függvény és F, G két primitív függvénye. Ekkor $F - G = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$ állandóra. Fordítva, ha F primitív függvénye f-nek és $F - G = c$ állandó, akkor G is primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $H = F - G$ nem konstans. Ekkor van olyan $0 \leq x_1 < x_2 \leq b$, melyekre $H(x_1) \neq H(x_2)$. De ebben az esetben a Lagrange-tétel szerint van olyan $c \in (x_1, x_2)$, ahol $H'(c) = \frac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$. De F, G f primitív függvényei, azaz $H'(c) = F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0$, ami ellentmondás.
Másrészt, ha $F - G = c$ és F f primitív függvénye, akkor $G' = (F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$, tehát G is F primitív függvénye.

PRIMITÍV FÜGGVÉNY

ÁLLÍTÁS

Legyen f egy függvény és F, G két primitív függvénye. Ekkor $F - G = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$ állandóra. Fordítva, ha F primitív függvénye f-nek és $F - G = c$ állandó, akkor G is primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $H = F - G$ nem konstans. Ekkor van olyan $0 \leq x_1 < x_2 \leq b$, melyekre $H(x_1) \neq H(x_2)$. De ebben az esetben a Lagrange-tétel szerint van olyan $c \in (x_1, x_2)$, ahol $H'(c) = \frac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$. De F, G f primitív függvényei, azaz $H'(c) = F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0$, ami ellentmondás. Másrészt, ha $F - G = c$ és F f primitív függvénye, akkor $G' = (F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$, tehát G is F primitív függvénye.

PRIMITÍV FÜGGVÉNY

ÁLLÍTÁS

Legyen f egy függvény és F, G két primitív függvénye. Ekkor $F - G = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$ állandóra. Fordítva, ha F primitív függvénye f-nek és $F - G = c$ állandó, akkor G is primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $H = F - G$ nem konstans. Ekkor van olyan $0 \leq x_1 < x_2 \leq b$, melyekre $H(x_1) \neq H(x_2)$. De ebben az esetben a Lagrange-tétel szerint van olyan $c \in (x_1, x_2)$, ahol $H'(c) = \frac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$. De F, G f primitív függvényei, azaz $H'(c) = F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0$, ami ellentmondás. Másrészt, ha $F - G = c$ és F f primitív függvénye, akkor $G' = (F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$, tehát G is F primitív függvénye.

HATÁROZATLAN INTEGRÁL

DEFINÍCIÓ

Egy f függvény primitív függvényeinek halmazát f határozatlan integráljának nevezzük. Jele: $\int f$ vagy $\int f(x)dx$.

PÉLDA

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x} \Longrightarrow$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \ ha\ a \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Határozatlan integrál

Definíció

Egy f függvény primitív függvényeinek halmazát f határozatlan integráljának nevezzük. Jele: $\int f$ vagy $\int f(x)dx$.

Példa

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x} \Longrightarrow$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \ ha\ a \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Határozatlan integrál

Definíció

Egy f függvény primitív függvényeinek halmazát f határozatlan integráljának nevezzük. Jele: $\int f$ vagy $\int f(x)dx$.

Példa

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x} \Longrightarrow$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \; ha \; a \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Határozatlan integrál

Definíció

*Egy f függvény primitív függvényeinek halmazát f **határozatlan integráljának** nevezzük. Jele:* $\int f$ *vagy* $\int f(x)dx$.

Példa

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x} \Longrightarrow$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \text{ ha } a \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Határozatlan integrál

Definíció

*Egy f függvény primitív függvényeinek halmazát f **határozatlan integráljának** nevezzük. Jele:* $\int f$ *vagy* $\int f(x)dx$.

Példa

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x} \Longrightarrow$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \ ha\ a \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Határozatlan integrál tulajdonságai

Állítás

Ha az f, g valós függvényeknek van primitív függvénye $[a, b]$-n és $c \in \mathbb{R}$, akkor az $(f \pm g)$ és cf függvényeknek is, és

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

$$\int (cf) = c \int f.$$

Bizonyítás. A deriváltakra vonatkozó hasonló tulajdonságokból következik.

HATÁROZATLAN INTEGRÁL TULAJDONSÁGAI

ÁLLÍTÁS

Ha az f, g valós függvényeknek van primitív függvénye $[a, b]$-n és $c \in \mathbb{R}$, akkor az $(f \pm g)$ és cf függvényeknek is, és

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

$$\int (cf) = c \int f.$$

Bizonyítás. A deriváltakra vonatkozó hasonló tulajdonságokból következik.

HATÁROZATLAN INTEGRÁL TULAJDONSÁGAI

ÁLLÍTÁS

Ha az f, g valós függvényeknek van primitív függvénye $[a, b]$-n és $c \in \mathbb{R}$, akkor az $(f \pm g)$ és cf függvényeknek is, és

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

$$\int (cf) = c \int f.$$

Bizonyítás. A deriváltakra vonatkozó hasonló tulajdonságokból következik.

A Newton-Leibniz tétel

Tétel (Newton-Leibniz)

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, és F egy primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Jelölés

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

A NEWTON-LEIBNIZ TÉTEL

TÉTEL (NEWTON-LEIBNIZ)

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, és F egy primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

JELÖLÉS

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

A NEWTON-LEIBNIZ TÉTEL

TÉTEL (NEWTON-LEIBNIZ)

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, és F egy primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

JELÖLÉS

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

A NEWTON–LEIBNIZ TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{N} (F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

A Lagrange-féle középértéktétel miatt minden $1 \le k \le N$-re létezik olyan $\xi_k \in I_k$, hogy

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Tehát minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $F(b) - F(a)$ megegyezik f-nek a $\mathcal{P}$-hez és a $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ választásokhoz tartozó integrálközelítő összegével. Ezek határértéke tetszőleges $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ esetén:

$$\lim_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} \left(\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

A NEWTON–LEIBNIZ TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{N} (F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

A Lagrange-féle középértéktétel miatt minden $1 \le k \le N$-re létezik olyan $\xi_k \in I_k$, hogy

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Tehát minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $F(b) - F(a)$ megegyezik f-nek a $\mathcal{P}$-hez és a $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ választásokhoz tartozó integrálközelítő összegével. Ezek határértéke tetszőleges $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ esetén:

$$\lim_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} \left(\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \int_a^b f(t) dt.$$

A NEWTON–LEIBNIZ TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{N} (F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

A Lagrange-féle középértéktétel miatt minden $1 \leq k \leq N$-re létezik olyan $\xi_k \in I_k$, hogy

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Tehát minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $F(b) - F(a)$ megegyezik f-nek a $\mathcal{P}$-hez és a $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ választásokhoz tartozó integrálközelítő összegével. Ezek határértéke tetszőleges $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ esetén:

$$\lim_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} \left(\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

A Newton–Leibniz tétel bizonyítása

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{N} (F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

A Lagrange-féle középértéktétel miatt minden $1 \leq k \leq N$-re létezik olyan $\xi_k \in I_k$, hogy

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Tehát minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $F(b) - F(a)$ megegyezik f-nek a $\mathcal{P}$-hez és a $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ választásokhoz tartozó integrálközelítő összegével. Ezek határértéke tetszőleges $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ esetén:

$$\lim_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} \left(\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

A NEWTON–LEIBNIZ TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{N} (F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

A Lagrange-féle középértéktétel miatt minden $1 \leq k \leq N$-re létezik olyan $\xi_k \in I_k$, hogy

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Tehát minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $F(b) - F(a)$ megegyezik f-nek a $\mathcal{P}$-hez és a $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ választásokhoz tartozó integrálközelítő összegével. Ezek határértéke tetszőleges $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ esetén:

$$\lim_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} \left(\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

A Newton–Leibniz tétel bizonyítása

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{N} (F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

A Lagrange-féle középértéktétel miatt minden $1 \leq k \leq N$-re létezik olyan $\xi_k \in I_k$, hogy

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Tehát minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $F(b) - F(a)$ megegyezik f-nek a $\mathcal{P}$-hez és a $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ választásokhoz tartozó integrálközelítő összegével. Ezek határértéke tetszőleges $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ esetén:

$$\lim_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} \left(\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

A NEWTON–LEIBNIZ TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{N} (F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

A Lagrange-féle középértéktétel miatt minden $1 \leq k \leq N$-re létezik olyan $\xi_k \in I_k$, hogy

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Tehát minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $F(b) - F(a)$ megegyezik f-nek a $\mathcal{P}$-hez és a $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ választásokhoz tartozó integrálközelítő összegével. Ezek határértéke tetszőleges $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ esetén:

$$\lim_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} \left(\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \int_a^b f(t) \mathrm{d}t.$$

PÉLDA

PÉLDA

Mennyi az $y = \sin(x)$ *függvény grafikonja alatti terület a* $[0, \pi]$ *intervallumon?*

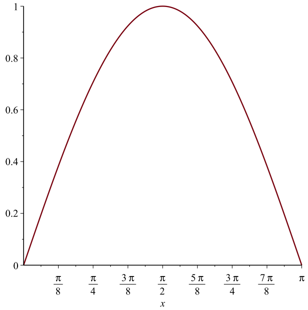

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$ függvény grafikonja a $[0, \pi]$ intervallumon

Mivel az $x \mapsto \sin(x)$ függvény folytonos $[0, \pi]$-n, itt integrálható és van primitív függvénye. Másrészt $\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$, tehát a Newton-Leibniz tétel alapján

$$\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^\pi =$$

$$= -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

PÉLDA

PÉLDA

Mennyi az $y = \sin(x)$ függvény grafikonja alatti terület a $[0, \pi]$ intervallumon?

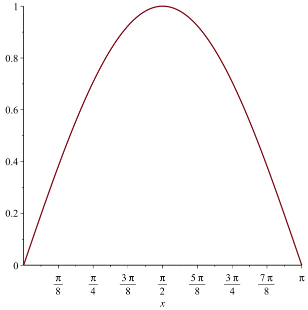

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$ függvény grafikonja a $[0, \pi]$ intervallumon

Mivel az $x \mapsto \sin(x)$ függvény folytonos $[0, \pi]$-n, itt integrálható és van primitív függvénye. Másrészt $\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$, tehát a Newton-Leibniz tétel alapján

$$\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^\pi =$$

$$= -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

PÉLDA

PÉLDA

Mennyi az $y = \sin(x)$ függvény grafikonja alatti terület a $[0, \pi]$ intervallumon?

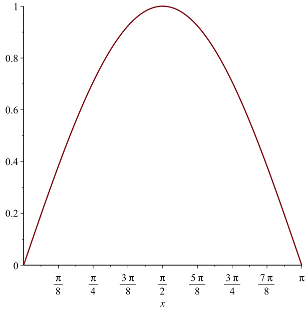

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$ függvény grafikonja a $[0, \pi]$ intervallumon

Mivel az $x \mapsto \sin(x)$ függvény folytonos $[0, \pi]$-n, itt integrálható és van primitív függvénye. Másrészt $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$, tehát a Newton-Leibniz tétel alapján

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^\pi =$$

$$= -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

PÉLDA

PÉLDA

Mennyi az $y = \sin(x)$ függvény grafikonja alatti terület a $[0, \pi]$ intervallumon?

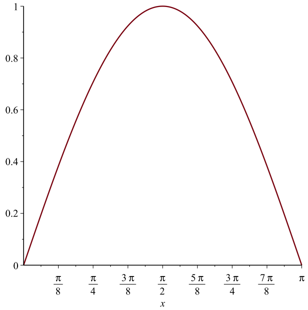

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$ függvény grafikonja a $[0, \pi]$ intervallumon

Mivel az $x \mapsto \sin(x)$ függvény folytonos $[0, \pi]$-n, itt integrálható és van primitív függvénye. Másrészt $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$, tehát a Newton-Leibniz tétel alapján

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^\pi =$$

$$= -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

PÉLDA

PÉLDA

Mennyi az $y = \sin(x)$ függvény grafikonja alatti terület a $[0, \pi]$ intervallumon?

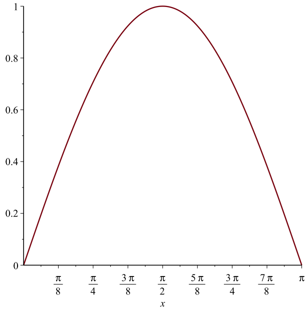

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$ függvény grafikonja a $[0, \pi]$ intervallumon

Mivel az $x \mapsto \sin(x)$ függvény folytonos $[0, \pi]$-n, itt integrálható és van primitív függvénye. Másrészt $\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$, tehát a Newton-Leibniz tétel alapján

$$\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^\pi =$$

$$= -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$