18. ELŐADÁS: INTEGRÁLÁSI TECHNIKÁK

LINEÁRIS HELYETTESTÉS

ÁLLÍTÁS

Ha F f egy primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, akkor
$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$.

Bizonyítás.

$$\left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot (F(ax+b))' = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b).$$

PÉLDA

$$\int \sqrt[2020]{2x-1}\,dx = \frac{\frac{(2x-1)^{\frac{2021}{2020}}}{\frac{2021}{2020}}}{2} + C = \frac{1010}{2021} \cdot (2x-1)^{\frac{2021}{2020}} + C$$

LINEÁRIS HELYETTESTÉS

ÁLLÍTÁS

Ha F f egy primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *akkor*
$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$.

Bizonyítás.

$$\left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot (F(ax+b))' = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b).$$

PÉLDA

$$\int \sqrt[2020]{2x-1}\,dx = \frac{\frac{(2x-1)^{\frac{2021}{2020}}}{\frac{2021}{2020}}}{2} + C = \frac{1010}{2021} \cdot (2x-1)^{\frac{2021}{2020}} + C$$

LINEÁRIS HELYETTESTÉS

ÁLLÍTÁS

Ha F f egy primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, akkor $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$.

Bizonyítás.

$$\left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot (F(ax+b))' = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b).$$

PÉLDA

$$\int \sqrt[2020]{2x-1}\,dx = \frac{\frac{(2x-1)^{\frac{2021}{2020}}}{\frac{2021}{2020}}}{2} + C = \frac{1010}{2021} \cdot (2x-1)^{\frac{2021}{2020}} + C$$

LINEÁRIS HELYETTESTÉS

ÁLLÍTÁS

Ha F f egy primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, akkor
$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C.$

Bizonyítás.

$$\left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot (F(ax+b))' = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b).$$

PÉLDA

$$\int \sqrt[2020]{2x-1}\,dx = \frac{\frac{(2x-1)^{\frac{2021}{2020}}}{\frac{2021}{2020}}}{2} + C = \frac{1010}{2021} \cdot (2x-1)^{\frac{2021}{2020}} + C$$

LINEÁRIS HELYETTESTÉS

ÁLLÍTÁS

Ha F f egy primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, akkor
$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$.

Bizonyítás.

$$\left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot (F(ax+b))' = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b).$$

PÉLDA

$$\int \sqrt[2020]{2x-1}\,dx = \frac{\frac{(2x-1)^{\frac{2021}{2020}}}{\frac{2021}{2020}}}{2} + C = \frac{1010}{2021} \cdot (2x-1)^{\frac{2021}{2020}} + C$$

LINEÁRIS HELYETTESTÉS

ÁLLÍTÁS

Ha F f egy primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, akkor $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$.

Bizonyítás.

$$\left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot (F(ax+b))' = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b).$$

PÉLDA

$$\int \sqrt[2020]{2x-1}\,dx = \frac{\frac{(2x-1)^{\frac{2021}{2020}}}{\frac{2021}{2020}}}{2} + C = \frac{1010}{2021} \cdot (2x-1)^{\frac{2021}{2020}} + C$$

LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS

ÁLLÍTÁS

Ha F f egy primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, akkor
$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$.

Bizonyítás.

$$\left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot (F(ax+b))' = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b).$$

PÉLDA

$$\int \sqrt[2020]{2x-1}\,dx = \frac{\frac{(2x-1)^{\frac{2021}{2020}}}{\frac{2021}{2020}}}{2} + C = \frac{1010}{2021} \cdot (2x-1)^{\frac{2021}{2020}} + C$$

LINEÁRIS HELYETTESTÉS

ÁLLÍTÁS

Ha F f egy primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, akkor
$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$.

Bizonyítás.

$$\left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot (F(ax+b))' = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b).$$

PÉLDA

$$\int \sqrt[2020]{2x-1}\,dx = \frac{\frac{(2x-1)^{\frac{2021}{2020}}}{\frac{2021}{2020}}}{2} + C = \frac{1010}{2021} \cdot (2x-1)^{\frac{2021}{2020}} + C$$

LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS

PÉLDA

$$\int \sin(7x-1)\sin(5x+2)dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\cos\left((7x-1)-(5x+2)\right)-\cos\left((7x-1)+(5x+2)\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(2x-3)-\cos(12x+1)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin(2x-3)}{2}-\frac{-\sin(12x+1)}{12}\right)+C =$$

$$= -\frac{\sin(2x-3)}{4}+\frac{\sin(12x+1)}{24}+C.$$

Lineáris helyettesítés

Példa

$$\int \sin(7x-1)\sin(5x+2)dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\cos\left((7x-1)-(5x+2)\right)-\cos\left((7x-1)+(5x+2)\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(2x-3)-\cos(12x+1)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin(2x-3)}{2}-\frac{-\sin(12x+1)}{12}\right)+C =$$

$$= -\frac{\sin(2x-3)}{4}+\frac{\sin(12x+1)}{24}+C.$$

Lineáris helyettesítés

Példa

$$\int \sin(7x-1)\sin(5x+2)dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\cos\left((7x-1)-(5x+2)\right)-\cos\left((7x-1)+(5x+2)\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(2x-3)-\cos(12x+1)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin(2x-3)}{2} - \frac{-\sin(12x+1)}{12}\right) + C =$$

$$= -\frac{\sin(2x-3)}{4} + \frac{\sin(12x+1)}{24} + C.$$

Lineáris helyettesítés

Példa

$$\int \sin(7x-1)\sin(5x+2)dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\cos\left((7x-1)-(5x+2)\right)-\cos\left((7x-1)+(5x+2)\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(2x-3)-\cos(12x+1)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin(2x-3)}{2}-\frac{-\sin(12x+1)}{12}\right)+C =$$

$$= -\frac{\sin(2x-3)}{4}+\frac{\sin(12x+1)}{24}+C.$$

LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS

PÉLDA

$$\int \sin(7x-1)\sin(5x+2)dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\cos\left((7x-1)-(5x+2)\right) - \cos\left((7x-1)+(5x+2)\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(2x-3) - \cos(12x+1)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin(2x-3)}{2} - \frac{-\sin(12x+1)}{12}\right) + C =$$

$$= -\frac{\sin(2x-3)}{4} + \frac{\sin(12x+1)}{24} + C.$$

LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS

PÉLDA

$$\int \frac{-2}{x^2-4x+13}dx = \int \frac{-2}{(x-2)^2+9}dx = -\frac{2}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}dx =$$

$$= -\frac{2}{9}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}}{\frac{1}{3}} + C = -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C$$

MEGJEGYZÉS

A fenti lépésekkel minden $\frac{A}{ax^2+bx+c}$, valamint $\frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ alakú függvény integrálható.

LINEÁRIS HELYETTESTÉS

PÉLDA

$$\int \frac{-2}{x^2-4x+13}dx = \int \frac{-2}{(x-2)^2+9}dx = -\frac{2}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}dx =$$

$$= -\frac{2}{9}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}}{\frac{1}{3}} + C = -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C$$

MEGJEGYZÉS

A fenti lépésekkel minden $\frac{A}{ax^2+bx+c}$, *valamint* $\frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ *alakú függvény integrálható.*

LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS

PÉLDA

$$\int \frac{-2}{x^2-4x+13}dx = \int \frac{-2}{(x-2)^2+9}dx = -\frac{2}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}dx =$$

$$= -\frac{2}{9}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}}{\frac{1}{3}} + C = -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C$$

MEGJEGYZÉS

A fenti lépésekkel minden $\frac{A}{ax^2+bx+c}$, *valamint* $\frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ *alakú függvény integrálható.*

Lineáris helyettesítés

Példa

$$\int \frac{-2}{x^2-4x+13}dx = \int \frac{-2}{(x-2)^2+9}dx = -\frac{2}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}dx =$$

$$= -\frac{2}{9}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}}{\frac{1}{3}} + C = -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C$$

Megjegyzés

A fenti lépésekkel minden $\frac{A}{ax^2+bx+c}$, valamint $\frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ alakú függvény integrálható.

Lineáris helyettesítés

Példa

$$\int \frac{-2}{x^2-4x+13}\,dx = \int \frac{-2}{(x-2)^2+9}\,dx = -\frac{2}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{9}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}}{\frac{1}{3}} + C = -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C$$

Megjegyzés

A fenti lépésekkel minden $\frac{A}{ax^2+bx+c}$, valamint $\frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ alakú függvény integrálható.

LINEÁRIS HELYETTESTÉS

PÉLDA

$$\int \frac{-2}{x^2-4x+13}dx = \int \frac{-2}{(x-2)^2+9}dx = -\frac{2}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}dx =$$

$$= -\frac{2}{9}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}}{\frac{1}{3}} + C = -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C$$

MEGJEGYZÉS

A fenti lépésekkel minden $\frac{A}{ax^2+bx+c}$, *valamint* $\frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ *alakú függvény integrálható.*

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható. Ekkor

$$\int (f'f^a) = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C, \ ha\ a \neq -1,$$

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C.$$

Bizonyítás.

$$\left(\frac{f^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\left(f^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1} \cdot (a+1) f^a f' = f^a f'.$$

Hasonlóan igazolható a második állítás.

$f'f^a$ és f'/f alakú függvények

Állítás

Legyen f deriválható. Ekkor

$$\int (f'f^a) = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C, \; ha\ a \neq -1,$$

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C.$$

Bizonyítás.

$$\left(\frac{f^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\left(f^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1} \cdot (a+1)f^a f' = f^a f'.$$

Hasonlóan igazolható a második állítás.

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható. Ekkor

$$\int (f'f^a) = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C, \; ha \; a \neq -1,$$

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C.$$

Bizonyítás.

$$\left(\frac{f^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\left(f^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\cdot(a+1)f^a f' = f^a f'.$$

Hasonlóan igazolható a második állítás.

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható. Ekkor

$$\int (f'f^a) = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C, \text{ ha } a \neq -1,$$

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C.$$

Bizonyítás.

$$\left(\frac{f^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\left(f^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1} \cdot (a+1) f^a f' = f^a f'.$$

Hasonlóan igazolható a második állítás.

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható. Ekkor

$$\int (f'f^a) = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C, \ \ ha\ a \neq -1,$$

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C.$$

Bizonyítás.

$$\left(\frac{f^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\left(f^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\cdot(a+1)f^a f' = f^a f'.$$

Hasonlóan igazolható a második állítás.

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható. Ekkor

$$\int (f'f^a) = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C, \ \textit{ha } a \neq -1,$$

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C.$$

Bizonyítás.

$$\left(\frac{f^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\left(f^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\cdot(a+1)f^a f' = f^a f'.$$

Hasonlóan igazolható a második állítás.

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható. Ekkor

$$\int (f'f^a) = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C, \ \ ha\ a \neq -1,$$

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C.$$

Bizonyítás.

$$\left(\frac{f^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\left(f^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\cdot(a+1)f^a f' = f^a f'.$$

Hasonlóan igazolható a második állítás.

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Legyen f deriválható. Ekkor

$$\int (f'f^a) = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C, \ \textit{ha } a \neq -1,$$

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C.$$

Bizonyítás.

$$\left(\frac{f^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\left(f^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}\cdot(a+1)f^a f' = f^a f'.$$

Hasonlóan igazolható a második állítás.

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

PÉLDA

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \cos^2 x \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx =$$

$$= \int \cos^2 x \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x dx =$$

$$= \int -\cos^2 x(-\sin x) + 2\cos^4 x(-\sin x) - \cos^6 x(-\sin x) dx =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

PÉLDA

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \cos^2 x \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx =$$

$$= \int \cos^2 x \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x dx =$$

$$= \int -\cos^2 x(-\sin x) + 2\cos^4 x(-\sin x) - \cos^6 x(-\sin x) dx =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

$f'f^a$ és f'/f alakú függvények

Példa

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \cos^2 x \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx =$$

$$= \int \cos^2 x \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x dx =$$

$$= \int -\cos^2 x(-\sin x) + 2\cos^4 x(-\sin x) - \cos^6 x(-\sin x) dx =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

PÉLDA

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \cos^2 x \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx =$$

$$= \int \cos^2 x \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x dx =$$

$$= \int -\cos^2 x(-\sin x) + 2\cos^4 x(-\sin x) - \cos^6 x(-\sin x) dx =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

PÉLDA

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \cos^2 x \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx =$$

$$= \int \cos^2 x \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x dx =$$

$$= \int -\cos^2 x(-\sin x) + 2\cos^4 x(-\sin x) - \cos^6 x(-\sin x) dx =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

MEGJEGYZÉS

A $\sin^n x \cos^m x$, illetve a $\mathrm{sh}^n x \,\mathrm{ch}^m x$ alakú függvények integrálására a fenti módszer használható, ha n, m legalább egyike páratlan.

Megjegyzés. Ha n, m mindegyike páros, akkor a kifejezés fokszáma felezhető az alábbi módon:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) \Longrightarrow$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \text{ és } \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Hasonlóan,

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2} \text{ és } \mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2}.$$

Ezek a linearizáló képletek.

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

MEGJEGYZÉS

A $\sin^n x \cos^m x$, illetve a $\operatorname{sh}^n x \operatorname{ch}^m x$ alakú függvények integrálására a fenti módszer használható, ha n, m legalább egyike páratlan.

Megjegyzés. Ha n, m mindegyike páros, akkor a kifejezés fokszáma felezhető az alábbi módon:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) \Longrightarrow$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \text{ és } \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Hasonlóan,

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2} \text{ és } \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}.$$

Ezek a linearizáló képletek.

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

MEGJEGYZÉS

A $\sin^n x \cos^m x$, illetve a $\operatorname{sh}^n x \operatorname{ch}^m x$ alakú függvények integrálására a fenti módszer használható, ha n, m legalább egyike páratlan.

Megjegyzés. Ha n, m mindegyike páros, akkor a kifejezés fokszáma felezhető az alábbi módon:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) \Longrightarrow$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \text{ és } \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Hasonlóan,

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2} \text{ és } \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}.$$

Ezek a linearizáló képletek.

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

MEGJEGYZÉS

A $\sin^n x \cos^m x$*, illetve a* $\operatorname{sh}^n x \operatorname{ch}^m x$ *alakú függvények integrálására a fenti módszer használható, ha* n, m *legalább egyike páratlan.*

Megjegyzés. Ha n, m mindegyike páros, akkor a kifejezés fokszáma felezhető az alábbi módon:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) \Longrightarrow$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \text{ és } \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Hasonlóan,

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2} \text{ és } \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}.$$

Ezek a linearizáló képletek.

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

PÉLDA

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4x}}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\int (2x-4)(x^2-4x)^{-\frac{1}{2}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2-4}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\frac{(x^2-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}}dx =$$

$$= 3\sqrt{x^2-4x} + 2\frac{\operatorname{arch}\frac{x-2}{2}}{\frac{1}{2}} + C = 3\sqrt{x^2-4x} + 4\operatorname{arch}\frac{x-2}{2} + C$$

$f'f^a$ és f'/f alakú függvények

Példa

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4x}}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\int (2x-4)(x^2-4x)^{-\frac{1}{2}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2-4}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\frac{(x^2-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}}dx =$$

$$= 3\sqrt{x^2-4x} + 2\frac{\operatorname{arch}\frac{x-2}{2}}{\frac{1}{2}} + C = 3\sqrt{x^2-4x} + 4\operatorname{arch}\frac{x-2}{2} + C$$

$f'f^a$ és f'/f alakú függvények

Példa

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4x}}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\int (2x-4)(x^2-4x)^{-\frac{1}{2}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2-4}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\frac{(x^2-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}}dx =$$

$$= 3\sqrt{x^2-4x} + 2\frac{\operatorname{arch}\frac{x-2}{2}}{\frac{1}{2}} + C = 3\sqrt{x^2-4x} + 4\operatorname{arch}\frac{x-2}{2} + C$$

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

PÉLDA

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4x}}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\int (2x-4)(x^2-4x)^{-\frac{1}{2}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2-4}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\frac{(x^2-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}}dx =$$

$$= 3\sqrt{x^2-4x} + 2\frac{\operatorname{arch}\frac{x-2}{2}}{\frac{1}{2}} + C = 3\sqrt{x^2-4x} + 4\operatorname{arch}\frac{x-2}{2} + C$$

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

PÉLDA

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4x}}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\int (2x-4)(x^2-4x)^{-\frac{1}{2}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2-4}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\frac{(x^2-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}}dx =$$

$$= 3\sqrt{x^2-4x} + 2\frac{\operatorname{arch}\frac{x-2}{2}}{\frac{1}{2}} + C = 3\sqrt{x^2-4x} + 4\operatorname{arch}\frac{x-2}{2} + C$$

$f'f^a$ és f'/f alakú függvények

Példa

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4x}}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\int (2x-4)(x^2-4x)^{-\frac{1}{2}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2-4}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\frac{(x^2-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}}dx =$$

$$= 3\sqrt{x^2-4x} + 2\frac{\operatorname{arch}\frac{x-2}{2}}{\frac{1}{2}} + C = 3\sqrt{x^2-4x} + 4\operatorname{arch}\frac{x-2}{2} + C$$

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

PÉLDA

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4x}}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\int (2x-4)(x^2-4x)^{-\frac{1}{2}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2-4}}dx =$$

$$\frac{3}{2}\frac{(x^2-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}}dx =$$

$$= 3\sqrt{x^2-4x} + 2\frac{\operatorname{arch}\frac{x-2}{2}}{\frac{1}{2}} + C = 3\sqrt{x^2-4x} + 4\operatorname{arch}\frac{x-2}{2} + C$$

$f'f^a$ ÉS f'/f ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

MEGJEGYZÉS

A fenti módszer alkalmazható minden $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ *és* $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ *alakú függvény integrálására.*

$f(g(x))g'(x)$ ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Ha f egy primitív függvénye F, akkor

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Bizonyítás. Összetett függvény deriválási szabálya.

PÉLDA

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$f(g(x))g'(x)$ ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Ha f egy primitív függvénye F, akkor

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Bizonyítás. Összetett függvény deriválási szabálya.

PÉLDA

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$f(g(x))g'(x)$ ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Ha f egy primitív függvénye F, akkor

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Bizonyítás. Összetett függvény deriválási szabálya.

PÉLDA

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$f(g(x))g'(x)$ ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Ha f egy primitív függvénye F, akkor

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Bizonyítás. Összetett függvény deriválási szabálya.

PÉLDA

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$f(g(x))g'(x)$ ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

ÁLLÍTÁS

Ha f egy primitív függvénye F, akkor

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Bizonyítás. Összetett függvény deriválási szabálya.

PÉLDA

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

TÉTEL

Ha f, g deriváltjaikkal együtt folytonosak, akkor

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Bizonyítás. A feltételek szerint (fg')-nek és $(f'g)$-nek létezik primitív függvénye. Így

$$\left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x\right)' =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x).$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

TÉTEL

Ha f, g deriváltjaikkal együtt folytonosak, akkor

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Bizonyítás. A feltételek szerint (fg')-nek és $(f'g)$-nek létezik primitív függvénye. Így

$$\left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x\right)' =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x).$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

TÉTEL

Ha f, g deriváltjaikkal együtt folytonosak, akkor

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Bizonyítás. A feltételek szerint (fg')-nek és $(f'g)$-nek létezik primitív függvénye. Így

$$\left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x\right)' =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x).$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

TÉTEL

Ha f, g deriváltjaikkal együtt folytonosak, akkor

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Bizonyítás. A feltételek szerint (fg')-nek és $(f'g)$-nek létezik primitív függvénye. Így

$$\left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x\right)' =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x).$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

TÉTEL

Ha f, g deriváltjaikkal együtt folytonosak, akkor

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Bizonyítás. A feltételek szerint (fg')-nek és $(f'g)$-nek létezik primitív függvénye. Így

$$\left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x\right)' =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x).$$

Parciális integrálás

Tétel

Ha f, g deriváltjaikkal együtt folytonosak, akkor

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Bizonyítás. A feltételek szerint (fg')-nek és $(f'g)$-nek létezik primitív függvénye. Így

$$\left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x \right)' =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x).$$

Parciális integrálás

Tétel

Ha f, g deriváltjaikkal együtt folytonosak $[a, b]$-n, akkor

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Bizonyítás. Az előző tétel és a Newton-Leibniz tétel következménye.

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

TÉTEL

Ha f, g deriváltjaikkal együtt folytonosak $[a, b]$-n, akkor

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Bizonyítás. Az előző tétel és a Newton-Leibniz tétel következménye.

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

PÉLDA

$$\int x^2 \sin x dx = x^2(-\cos x) - \int (2x)(-\cos x) dx =$$

$$f(x) = x^2, g'(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = 2x, g(x) = -\cos x$$

$$-x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx =$$

$$-x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

$$f(x) = 2x, g'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = 2, g(x) = \sin x$$

Parciális integrálás

Példa

$$\int x^2 \sin x dx = x^2(-\cos x) - \int (2x)(-\cos x) dx =$$

$$f(x) = x^2, g'(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = 2x, g(x) = -\cos x$$

$$-x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx =$$

$$-x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

$$f(x) = 2x, g'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = 2, g(x) = \sin x$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

PÉLDA

$$\int x^2 \sin x dx = x^2(-\cos x) - \int (2x)(-\cos x) dx =$$

$$f(x) = x^2, g'(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = 2x, g(x) = -\cos x$$

$$-x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx =$$

$$-x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

$$f(x) = 2x, g'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = 2, g(x) = \sin x$$

Parciális integrálás

Példa

$$\int x^2 \sin x dx = x^2(-\cos x) - \int (2x)(-\cos x) dx =$$

$$f(x) = x^2, g'(x) = \sin x \implies f'(x) = 2x, g(x) = -\cos x$$

$$-x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx =$$

$$-x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

$$f(x) = 2x, g'(x) = \cos x \implies f'(x) = 2, g(x) = \sin x$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

PÉLDA

$$\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int x \cdot 2\ln x \frac{1}{x} dx =$$

$$f(x) = \ln^2 x, g'(x) = 1 \Longrightarrow f'(x) = 2\ln x \frac{1}{x}, g(x) = x$$

$$= x\ln^2 x - \int 2\ln x dx = x\ln^2 x - \left(2x\ln x - \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx\right) =$$

$$f(x) = \ln x, g'(x) = 2 \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 2x$$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

PÉLDA

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \frac{1}{x} dx =$$

$$f(x) = \ln^2 x, g'(x) = 1 \Longrightarrow f'(x) = 2 \ln x \frac{1}{x}, g(x) = x$$

$$= x \ln^2 x - \int 2 \ln x dx = x \ln^2 x - \left(2x \ln x - \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$f(x) = \ln x, g'(x) = 2 \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 2x$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

PÉLDA

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \frac{1}{x} dx =$$

$$f(x) = \ln^2 x, g'(x) = 1 \Longrightarrow f'(x) = 2 \ln x \frac{1}{x}, g(x) = x$$

$$= x \ln^2 x - \int 2 \ln x dx = x \ln^2 x - \left(2x \ln x - \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx\right) =$$

$$f(x) = \ln x, g'(x) = 2 \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 2x$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

PÉLDA

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \frac{1}{x} dx =$$

$$f(x) = \ln^2 x, g'(x) = 1 \Longrightarrow f'(x) = 2 \ln x \frac{1}{x}, g(x) = x$$

$$= x \ln^2 x - \int 2 \ln x dx = x \ln^2 x - \left(2x \ln x - \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$f(x) = \ln x, g'(x) = 2 \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 2x$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$$

Parciális integrálás

Példa

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \frac{1}{x} dx =$$

$$f(x) = \ln^2 x, g'(x) = 1 \Longrightarrow f'(x) = 2 \ln x \frac{1}{x}, g(x) = x$$

$$= x \ln^2 x - \int 2 \ln x dx = x \ln^2 x - \left(2x \ln x - \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx\right) =$$

$$f(x) = \ln x, g'(x) = 2 \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 2x$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

PÉLDA

$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) dx =$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = -\cos x$$

$$-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = \sin x$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$2 \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + 2C$$

$$\int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + C$$

Parciális integrálás

Példa

$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)dx =$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = -\cos x$$

$$-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = \sin x$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + 2C$$

$$\int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

PÉLDA

$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)dx =$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = -\cos x$$

$$-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = \sin x$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + 2C$$

$$\int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

PÉLDA

$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) dx =$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = -\cos x$$

$$-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = \sin x$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + 2C$$

$$\int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C$$

Parciális integrálás

Példa

$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)dx =$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = -\cos x$$

$$-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \; - e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = \sin x$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + 2C$$

$$\int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C$$

Parciális integrálás

Példa

$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) dx =$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = -\cos x$$

$$-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \; - e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = \sin x$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$2 \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + 2C$$

$$\int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + C$$

Parciális integrálás

Példa

$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) dx =$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = -\cos x$$

$$-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$f(x) = e^x, g'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = e^x, g(x) = \sin x$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + 2C$$

$$\int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + C$$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS

TÉTEL

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény,* $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$*, és* $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *vagy* $\varphi : [\beta, \alpha] \to [a, b]$ *olyan folytonosan differenciálható függvény, amelyre*

$$\varphi(\alpha) = a \quad \text{és} \quad \varphi(\beta) = b.$$

Ekkor

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS

TÉTEL

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény,* $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$*, és* $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *vagy* $\varphi : [\beta, \alpha] \to [a, b]$ *olyan folytonosan differenciálható függvény, amelyre*

$$\varphi(\alpha) = a \quad \textit{és} \quad \varphi(\beta) = b.$$

Ekkor

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Helyettesítéses integrálás

Tétel

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény,* $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$*, és* $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *vagy* $\varphi : [\beta, \alpha] \to [a, b]$ *olyan folytonosan differenciálható függvény, amelyre*

$$\varphi(\alpha) = a \quad \textit{és} \quad \varphi(\beta) = b.$$

Ekkor

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás: Tegyük fel például, hogy $\alpha < \beta$, és tekintsük a következő függvényeket:

$$F(v) = \int_a^{\varphi(v)} f(t)\mathrm{d}t, \qquad G(v) = \int_\alpha^{v} f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

ahol $v \in [\alpha, \beta]$. A láncszabály miatt

$$F'(v) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi(v)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v).$$

Másrészt, mivel f és φ folytonosak, azért

$$G'(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v) = F'(v).$$

Tehát $F - G$ állandó. Mivel $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$, azért $F = G$. Helyettesítve $v = b$-t, megkapjuk a kívánt állítást.

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás: Tegyük fel például, hogy $\alpha < \beta$, és tekintsük a következő függvényeket:

$$F(v) = \int_a^{\varphi(v)} f(t)\mathrm{d}t, \qquad G(v) = \int_\alpha^v f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

ahol $v \in [\alpha, \beta]$. A láncszabály miatt

$$F'(v) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi(v)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v).$$

Másrészt, mivel f és φ folytonosak, azért

$$G'(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v) = F'(v).$$

Tehát $F - G$ állandó. Mivel $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$, azért $F = G$. Helyettesítve $v = b$-t, megkapjuk a kívánt állítást.

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás: Tegyük fel például, hogy $\alpha < \beta$, és tekintsük a következő függvényeket:

$$F(v) = \int_a^{\varphi(v)} f(t)\mathrm{d}t, \qquad G(v) = \int_\alpha^v f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

ahol $v \in [\alpha, \beta]$. A láncszabály miatt

$$F'(v) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi(v)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v).$$

Másrészt, mivel f és φ folytonosak, azért

$$G'(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v) = F'(v).$$

Tehát $F - G$ állandó. Mivel $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$, azért $F = G$. Helyettesítve $v = b$-t, megkapjuk a kívánt állítást.

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás: Tegyük fel például, hogy $\alpha < \beta$, és tekintsük a következő függvényeket:

$$F(v) = \int_a^{\varphi(v)} f(t)\mathrm{d}t, \qquad G(v) = \int_\alpha^v f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

ahol $v \in [\alpha, \beta]$. A láncszabály miatt

$$F'(v) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi(v)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v).$$

Másrészt, mivel f és φ folytonosak, azért

$$G'(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v) = F'(v).$$

Tehát $F - G$ állandó. Mivel $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$, azért $F = G$. Helyettesítve $v = b$-t, megkapjuk a kívánt állítást.

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás: Tegyük fel például, hogy $\alpha < \beta$, és tekintsük a következő függvényeket:

$$F(v) = \int_a^{\varphi(v)} f(t)\mathrm{d}t, \qquad G(v) = \int_\alpha^v f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

ahol $v \in [\alpha, \beta]$. A láncszabály miatt

$$F'(v) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi(v)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v).$$

Másrészt, mivel f és φ folytonosak, azért

$$G'(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v) = F'(v).$$

Tehát $F - G$ állandó. Mivel $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$, azért $F = G$. Helyettesítve $v = b$-t, megkapjuk a kívánt állítást.

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás: Tegyük fel például, hogy $\alpha < \beta$, és tekintsük a következő függvényeket:

$$F(v) = \int_a^{\varphi(v)} f(t)\mathrm{d}t, \qquad G(v) = \int_\alpha^v f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

ahol $v \in [\alpha, \beta]$. A láncszabály miatt

$$F'(v) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi(v)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v).$$

Másrészt, mivel f és φ folytonosak, azért

$$G'(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v) = F'(v).$$

Tehát $F - G$ állandó. Mivel $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$, azért $F = G$. Helyettesítve $v = b$-t, megkapjuk a kívánt állítást.

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás: Tegyük fel például, hogy $\alpha < \beta$, és tekintsük a következő függvényeket:

$$F(v) = \int_a^{\varphi(v)} f(t)\mathrm{d}t, \qquad G(v) = \int_\alpha^v f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

ahol $v \in [\alpha, \beta]$. A láncszabály miatt

$$F'(v) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi(v)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v).$$

Másrészt, mivel f és φ folytonosak, azért

$$G'(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v) = F'(v).$$

Tehát $F - G$ állandó. Mivel $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$, azért $F = G$. Helyettesítve $v = b$-t, megkapjuk a kívánt állítást.

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás: Tegyük fel például, hogy $\alpha < \beta$, és tekintsük a következő függvényeket:

$$F(v) = \int_a^{\varphi(v)} f(t)\mathrm{d}t, \qquad G(v) = \int_\alpha^v f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

ahol $v \in [\alpha, \beta]$. A láncszabály miatt

$$F'(v) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi(v)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v).$$

Másrészt, mivel f és φ folytonosak, azért

$$G'(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v) = F'(v).$$

Tehát $F - G$ állandó. Mivel $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$, azért $F = G$.

Helyettesítve $v = b$-t, megkapjuk a kívánt állítást.

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás: Tegyük fel például, hogy $\alpha < \beta$, és tekintsük a következő függvényeket:

$$F(v) = \int_a^{\varphi(v)} f(t)\mathrm{d}t, \qquad G(v) = \int_\alpha^v f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

ahol $v \in [\alpha, \beta]$. A láncszabály miatt

$$F'(v) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi(v)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v).$$

Másrészt, mivel f és φ folytonosak, azért

$$G'(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v) = F'(v).$$

Tehát $F - G$ állandó. Mivel $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$, azért $F = G$. Helyettesítve $v = b$-t, megkapjuk a kívánt állítást.

Helyettesítéses integrálás, példa

Példa

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^t \cdot 2t dt =$$

$$\sqrt{x} = t \Longrightarrow x = t^2 \Longrightarrow dx = 2t dt$$

$$= 2te^t - \int 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

$$f(t) = 2t, g'(t) = e^t \Longrightarrow f'(t) = 2, g(t) = e^t$$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, PÉLDA

PÉLDA

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t \cdot 2t dt =$$

$$\sqrt{x} = t \Longrightarrow x = t^2 \Longrightarrow dx = 2t dt$$

$$= 2te^t - \int 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

$$f(t) = 2t, g'(t) = e^t \Longrightarrow f'(t) = 2, g(t) = e^t$$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, PÉLDA

PÉLDA

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t \cdot 2t dt =$$

$$\sqrt{x} = t \Longrightarrow x = t^2 \Longrightarrow dx = 2t dt$$

$$= 2te^t - \int 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

$$f(t) = 2t, g'(t) = e^t \Longrightarrow f'(t) = 2, g(t) = e^t$$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, PÉLDA

PÉLDA

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$x = \sin t, t = \arcsin x, dx = \cos t dt$$

$$= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + \frac{\sin(2\arcsin x)}{2}\right) + C$$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, PÉLDA

PÉLDA

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$x = \sin t, t = \arcsin x, dx = \cos t dt$$

$$= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + \frac{\sin(2 \arcsin x)}{2}\right) + C$$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, PÉLDA

PÉLDA

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$x = \sin t, t = \arcsin x, dx = \cos t dt$$

$$= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + \frac{\sin(2\arcsin x)}{2}\right) + C$$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, PÉLDA

PÉLDA

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$x = \sin t, t = \arcsin x, dx = \cos t dt$$

$$= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + \frac{\sin(2\arcsin x)}{2}\right) + C$$

Helyettesítéses integrálás, példa

Példa

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$x = \sin t, t = \arcsin x, dx = \cos t dt$$

$$= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + \frac{\sin(2\arcsin x)}{2}\right) + C$$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS, PÉLDA

PÉLDA

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$x = \sin t, t = \arcsin x, dx = \cos t dt$$

$$= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + \frac{\sin(2\arcsin x)}{2}\right) + C$$