19. előadás: Racionális törtfüggvények integrálása

POLINOMOK MARADÉKOS OSZTÁSA

Legyenek P, Q valós együtthatós polinomok valamely x határozatlanban. Feltesszük, hogy $\deg(Q) > 0$.

TÉTEL

Létezik pontosan egy olyan A polinom valamint pontosan egy olyan R polinom, amelyre $\deg(R) < \deg(Q)$ és

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

BIZONYÍTÁS

Az ismert maradékos osztási eljárással, 10 helyébe x-et helyettesítve.

POLINOMOK MARADÉKOS OSZTÁSA

Legyenek P, Q valós együtthatós polinomok valamely x határozatlanban. Feltesszük, hogy $\deg(Q) > 0$.

TÉTEL

Létezik pontosan egy olyan A polinom valamint pontosan egy olyan R polinom, amelyre $\deg(R) < \deg(Q)$ és

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

BIZONYÍTÁS

Az ismert maradékos osztási eljárással, 10 *helyébe x-et helyettesítve.*

POLINOMOK MARADÉKOS OSZTÁSA

Legyenek P, Q valós együtthatós polinomok valamely x határozatlanban. Feltesszük, hogy $\deg(Q) > 0$.

TÉTEL

Létezik pontosan egy olyan A polinom valamint pontosan egy olyan R polinom, amelyre $\deg(R) < \deg(Q)$ *és*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

BIZONYÍTÁS

Az ismert maradékos osztási eljárással, 10 *helyébe x-et helyettesítve.*

POLINOMOK MARADÉKOS OSZTÁSA

Legyenek P, Q valós együtthatós polinomok valamely x határozatlanban. Feltesszük, hogy $\deg(Q) > 0$.

TÉTEL

Létezik pontosan egy olyan A polinom valamint pontosan egy olyan R polinom, amelyre $\deg(R) < \deg(Q)$ és

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

BIZONYÍTÁS

Az ismert maradékos osztási eljárással, 10 *helyébe x-et helyettesítve.*

Polinomok maradékos osztása

Legyenek P, Q valós együtthatós polinomok valamely x határozatlanban. Feltesszük, hogy $\deg(Q) > 0$.

Tétel

Létezik pontosan egy olyan A polinom valamint pontosan egy olyan R polinom, amelyre $\deg(R) < \deg(Q)$ és

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Bizonyítás

Az ismert maradékos osztási eljárással, 10 *helyébe x-et helyettesítve.*

POLINOMOK MARADÉKOS OSZTÁSA

$$\begin{array}{r} 653 \quad : 7 = 93 \\ 23 \\ 2 \end{array} \implies \frac{653}{7} = 93 + \frac{2}{7}$$

$$\begin{array}{r} (3x^3 + 2x^2 - 1) \quad : (x+3) = 3x^2 - 7x + 21 \\ -\,(3x^3 + 9x^2) \\ \hline -7x^2 - 1 \\ -\,(-7x^2 - 21x) \\ \hline 21x - 1 \\ -(21x + 63) \\ \hline -64 \end{array}$$

$$\implies \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x+3} = 3x^2 - 7x + 21 + \frac{-64}{x+3}$$

Polinomok maradékos osztása

$$\begin{array}{r} 653 \\ 23 \\ 2 \end{array} \quad : 7 = 93 \qquad \Longrightarrow \frac{653}{7} = 93 + \frac{2}{7}$$

$$\begin{array}{r} (3x^3 + 2x^2 - 1) \\ -\,(3x^3 + 9x^2) \\ \hline -7x^2 - 1 \\ -\,(-7x^2 - 21x) \\ \hline 21x - 1 \\ -(21x + 63) \\ \hline \text{-64} \end{array} \quad : (x+3) = 3x^2 - 7x + 21$$

$$\Longrightarrow \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x+3} = 3x^2 - 7x + 21 + \frac{-64}{x+3}$$

Polinomok maradékos osztása

$$
\begin{array}{r}
653 \quad : 7 = 93 \\
23 \\
2
\end{array}
\quad \Longrightarrow \frac{653}{7} = 93 + \frac{2}{7}
$$

$$
\begin{array}{r}
\left(3x^3 + 2x^2 - 1\right) \quad : (x+3) = 3x^2 - 7x + 21 \\
-\left(3x^3 + 9x^2\right) \\
\hline
-7x^2 - 1 \\
-\left(-7x^2 - 21x\right) \\
\hline
21x - 1 \\
-(21x + 63) \\
\hline
-64
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x+3} = 3x^2 - 7x + 21 + \frac{-64}{x+3}$$

POLINOMOK MARADÉKOS OSZTÁSA

$$\begin{array}{r} 653 \quad : 7 = 93 \\ 23 \\ 2 \end{array} \implies \frac{653}{7} = 93 + \frac{2}{7}$$

$$\begin{array}{r} \left(3x^3 + 2x^2 - 1\right) \quad : (x+3) = 3x^2 - 7x + 21 \\ -\left(3x^3 + 9x^2\right) \\ \hline -7x^2 - 1 \\ -\left(-7x^2 - 21x\right) \\ \hline 21x - 1 \\ -(21x + 63) \\ \hline \text{-64} \end{array}$$

$$\implies \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x + 3} = 3x^2 - 7x + 21 + \frac{-64}{x + 3}$$

A NEVEZŐ GYÖKTÉNYEZŐS FELBONTÁSA

Innentől feltesszük, hogy $\deg(P) < \deg(Q) = N$.

Az algebra alaptétele szerint léteznek olyan $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok és $a_0 \in \mathbb{R}$, amelyre

$$Q(x) = a_0(x - w_1) \cdots (x - w_N).$$

Mivel Q valós együtthatós, azért minden w gyökére $\bar{w}$ is gyöke, és w és $\bar{w}$ multiplicitása megegyezik. Vegyük észre, hogy

$$(x - w)(x - \bar{w}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(w)x + |w|^2$$

szintén valós együtthatós. Legyen $q = -2\mathrm{Re}(w)$, $s = |w|^2$, ekkor a polinom diszkriminánsa

$$q^2 - 4s < 0.$$

A NEVEZŐ GYÖKTÉNYEZŐS FELBONTÁSA

Innentől feltesszük, hogy $\deg(P) < \deg(Q) = N$.
Az algebra alaptétele szerint léteznek olyan $w_1, \dots, w_N \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok és $a_0 \in \mathbb{R}$, amelyre

$$Q(x) = a_0(x - w_1) \cdots (x - w_N).$$

Mivel Q valós együtthatós, azért minden w gyökére $\bar{w}$ is gyöke, és w és $\bar{w}$ multiplicitása megegyezik. Vegyük észre, hogy

$$(x - w)(x - \bar{w}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(w)x + |w|^2$$

szintén valós együtthatós. Legyen $q = -2\mathrm{Re}(w)$, $s = |w|^2$, ekkor a polinom diszkriminánsa

$$q^2 - 4s < 0.$$

A NEVEZŐ GYÖKTÉNYEZŐS FELBONTÁSA

Innentől feltesszük, hogy $\deg(P) < \deg(Q) = N$.
Az algebra alaptétele szerint léteznek olyan $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok és $a_0 \in \mathbb{R}$, amelyre

$$Q(x) = a_0(x - w_1) \cdots (x - w_N).$$

Mivel Q valós együtthatós, azért minden w gyökére $\bar{w}$ is gyöke, és w és $\bar{w}$ multiplicitása megegyezik. Vegyük észre, hogy

$$(x - w)(x - \bar{w}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(w)x + |w|^2$$

szintén valós együtthatós. Legyen $q = -2\mathrm{Re}(w), s = |w|^2$, ekkor a polinom diszkriminánsa

$$q^2 - 4s < 0.$$

A NEVEZŐ GYÖKTÉNYEZŐS FELBONTÁSA

Innentől feltesszük, hogy $\deg(P) < \deg(Q) = N$.
Az algebra alaptétele szerint léteznek olyan $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok és $a_0 \in \mathbb{R}$, amelyre

$$Q(x) = a_0(x - w_1) \cdots (x - w_N).$$

Mivel Q valós együtthatós, azért minden w gyökére $\bar{w}$ is gyöke, és w és $\bar{w}$ multiplicitása megegyezik. Vegyük észre, hogy

$$(x - w)(x - \bar{w}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(w)x + |w|^2$$

szintén valós együtthatós. Legyen $q = -2\mathrm{Re}(w)$, $s = |w|^2$, ekkor a polinom diszkriminánsa

$$q^2 - 4s < 0.$$

A nevező gyöktényezős felbontása

Innentől feltesszük, hogy $\deg(P) < \deg(Q) = N$.
Az algebra alaptétele szerint léteznek olyan $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok és $a_0 \in \mathbb{R}$, amelyre

$$Q(x) = a_0(x - w_1) \cdots (x - w_N).$$

Mivel Q valós együtthatós, azért minden w gyökére $\bar{w}$ is gyöke, és w és $\bar{w}$ multiplicitása megegyezik. Vegyük észre, hogy

$$(x - w)(x - \bar{w}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(w)x + |w|^2$$

szintén valós együtthatós. Legyen $q = -2\mathrm{Re}(w), s = |w|^2$, ekkor a polinom diszkriminánsa

$$q^2 - 4s < 0.$$

A NEVEZŐ GYÖKTÉNYEZŐS FELBONTÁSA

Innentől feltesszük, hogy $\deg(P) < \deg(Q) = N$.
Az algebra alaptétele szerint léteznek olyan $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok és $a_0 \in \mathbb{R}$, amelyre

$$Q(x) = a_0(x - w_1) \cdots (x - w_N).$$

Mivel Q valós együtthatós, azért minden w gyökére $\bar{w}$ is gyöke, és w és $\bar{w}$ multiplicitása megegyezik. Vegyük észre, hogy

$$(x - w)(x - \bar{w}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(w)x + |w|^2$$

szintén valós együtthatós. Legyen $q = -2\mathrm{Re}(w), s = |w|^2$, ekkor a polinom diszkriminánsa

$$q^2 - 4s < 0.$$

A nevező gyöktényezős felbontása, folyt.

Csoportosítva az azonos gyököket és párosítva a konjugált gyökpárokat, kapjuk a következő felbontást:

$$Q(x) = a_0(x-w_1)^{m_1} \cdots (x-w_\kappa)^{m_\kappa}(x^2+q_1x+s_1)^{n_1} \cdots (x^2+q_\lambda x+s_\lambda)^{n_\lambda},$$

ahol

- $a_0 \in \mathbb{R}$ a Q főegyütthatója,
- $w_1, \ldots, w_\kappa \in \mathbb{R}$ a különböző valós gyökök, rendre $m_1, \ldots, m_\kappa$ multiplicitással,
- a $x^2 + q_l x + s_l$ másodfokú tényezők páronként különbözők, n_l multiplicitásúak, és minden l-re $q_l^2 - 4s_l < 0$.

Továbbá a fokok egyenlősége miatt

$$N = m_1 + \cdots + m_\kappa + 2(n_1 + \cdots + n_\lambda).$$

A NEVEZŐ GYÖKTÉNYEZŐS FELBONTÁSA, FOLYT.

Csoportosítva az azonos gyököket és párosítva a konjugált gyökpárokat, kapjuk a következő felbontást:

$$Q(x) = a_0(x-w_1)^{m_1}\cdots(x-w_\kappa)^{m_\kappa}(x^2+q_1x+s_1)^{n_1}\cdots(x^2+q_\lambda x+s_\lambda)^{n_\lambda},$$

ahol

- $a_0 \in \mathbb{R}$ a Q főegyütthatója,
- $w_1, \ldots, w_\kappa \in \mathbb{R}$ a különböző valós gyökök, rendre $m_1, \ldots, m_\kappa$ multiplicitással,
- a $x^2 + q_l x + s_l$ másodfokú tényezők páronként különbözők, n_l multiplicitásúak, és minden l-re $q_l^2 - 4s_l < 0$.

Továbbá a fokok egyenlősége miatt

$$N = m_1 + \cdots + m_\kappa + 2(n_1 + \cdots + n_\lambda).$$

A NEVEZŐ GYÖKTÉNYEZŐS FELBONTÁSA, FOLYT.

Csoportosítva az azonos gyököket és párosítva a konjugált gyökpárokat, kapjuk a következő felbontást:

$$Q(x) = a_0(x-w_1)^{m_1}\cdots(x-w_\kappa)^{m_\kappa}(x^2+q_1x+s_1)^{n_1}\cdots(x^2+q_\lambda x+s_\lambda)^{n_\lambda},$$

ahol

- $a_0 \in \mathbb{R}$ a Q főegyütthatója,
- $w_1, \dots, w_\kappa \in \mathbb{R}$ a különböző valós gyökök, rendre $m_1, \dots, m_\kappa$ multiplicitással,
- a $x^2 + q_l x + s_l$ másodfokú tényezők páronként különbözők, n_l multiplicitásúak, és minden l-re $q_l^2 - 4s_l < 0$.

Továbbá a fokok egyenlősége miatt

$$N = m_1 + \cdots + m_\kappa + 2(n_1 + \cdots + n_\lambda).$$

A NEVEZŐ GYÖKTÉNYEZŐS FELBONTÁSA, FOLYT.

Csoportosítva az azonos gyököket és párosítva a konjugált gyökpárokat, kapjuk a következő felbontást:

$$Q(x) = a_0(x-w_1)^{m_1}\cdots(x-w_\kappa)^{m_\kappa}(x^2+q_1x+s_1)^{n_1}\cdots(x^2+q_\lambda x+s_\lambda)^{n_\lambda},$$

ahol

- $a_0 \in \mathbb{R}$ a Q főegyütthatója,
- $w_1, \ldots, w_\kappa \in \mathbb{R}$ a különböző valós gyökök, rendre $m_1, \ldots, m_\kappa$ multiplicitással,
- a $x^2 + q_l x + s_l$ másodfokú tényezők páronként különbözők, n_l multiplicitásúak, és minden l-re $q_l^2 - 4s_l < 0$.

Továbbá a fokok egyenlősége miatt

$$N = m_1 + \cdots + m_\kappa + 2(n_1 + \cdots + n_\lambda).$$

A NEVEZŐ GYÖKTÉNYEZŐS FELBONTÁSA, FOLYT.

Csoportosítva az azonos gyököket és párosítva a konjugált gyökpárokat, kapjuk a következő felbontást:

$$Q(x) = a_0(x-w_1)^{m_1} \cdots (x-w_\kappa)^{m_\kappa}(x^2+q_1x+s_1)^{n_1} \cdots (x^2+q_\lambda x+s_\lambda)^{n_\lambda},$$

ahol

- $a_0 \in \mathbb{R}$ a Q főegyütthatója,
- $w_1, \ldots, w_\kappa \in \mathbb{R}$ a különböző valós gyökök, rendre $m_1, \ldots, m_\kappa$ multiplicitással,
- a $x^2 + q_l x + s_l$ másodfokú tényezők páronként különbözők, n_l multiplicitásúak, és minden l-re $q_l^2 - 4s_l < 0$.

Továbbá a fokok egyenlősége miatt

$$N = m_1 + \cdots + m_\kappa + 2(n_1 + \cdots + n_\lambda).$$

A NEVEZŐ GYÖKTÉNYEZŐS FELBONTÁSA, FOLYT.

Csoportosítva az azonos gyököket és párosítva a konjugált gyökpárokat, kapjuk a következő felbontást:

$$Q(x) = a_0(x-w_1)^{m_1} \cdots (x-w_\kappa)^{m_\kappa}(x^2+q_1x+s_1)^{n_1} \cdots (x^2+q_\lambda x+s_\lambda)^{n_\lambda},$$

ahol

- $a_0 \in \mathbb{R}$ a Q főegyütthatója,
- $w_1, \ldots, w_\kappa \in \mathbb{R}$ a különböző valós gyökök, rendre $m_1, \ldots, m_\kappa$ multiplicitással,
- a $x^2 + q_l x + s_l$ másodfokú tényezők páronként különbözők, n_l multiplicitásúak, és minden l-re $q_l^2 - 4s_l < 0$.

Továbbá a fokok egyenlősége miatt

$$N = m_1 + \cdots + m_\kappa + 2(n_1 + \cdots + n_\lambda).$$

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNY RÉSZLETTÖRTEKRE BONTÁSA

TÉTEL

Ekkor P/Q egyértelműen felbomlik a következő alakú ún. részlettörtek vagy parciális törtek összegére:

- *minden $1 \leq k \leq \kappa$ és $1 \leq m \leq m_k$ esetén*
$$\frac{a_{k,m}}{(x-w_k)^m}$$
valamely $a_{k,m} \in \mathbb{R}$-re;
- *minden $1 \leq l \leq \lambda$ és $1 \leq n \leq n_k$ esetén*
$$\frac{b_{l,n}+c_{l,n}x}{(x^2+q_lx+s_l)^n}$$
valamely $b_{l,n}, c_{l,n} \in \mathbb{R}$-re.

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNY RÉSZLETTÖRTEKRE BONTÁSA

TÉTEL

Ekkor P/Q egyértelműen felbomlik a következő alakú ún. részlettörtek vagy parciális törtek összegére:

- *minden $1 \leq k \leq \kappa$ és $1 \leq m \leq m_k$ esetén*

$$\frac{a_{k,m}}{(x-w_k)^m}$$

  valamely $a_{k,m} \in \mathbb{R}$-re;

- *minden $1 \leq l \leq \lambda$ és $1 \leq n \leq n_k$ esetén*

$$\frac{b_{l,n}+c_{l,n}x}{(x^2+q_lx+s_l)^n}$$

  valamely $b_{l,n}, c_{l,n} \in \mathbb{R}$-re.

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNY RÉSZLETTÖRTEKRE BONTÁSA

TÉTEL

Ekkor P/Q egyértelműen felbomlik a következő alakú ún. részlettörtek vagy parciális törtek összegére:

- *minden $1 \leq k \leq \kappa$ és $1 \leq m \leq m_k$ esetén*

$$\frac{a_{k,m}}{(x - w_k)^m}$$

  valamely $a_{k,m} \in \mathbb{R}$-re;

- *minden $1 \leq l \leq \lambda$ és $1 \leq n \leq n_k$ esetén*

$$\frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2 + q_l x + s_l)^n}$$

  valamely $b_{l,n}, c_{l,n} \in \mathbb{R}$-re.

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNY RÉSZLETTÖRTEKRE BONTÁSA

PÉLDA

$$\frac{P(x)}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + $$

$$+ \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}$$

alkalmas $A, B, \ldots, G \in \mathbb{R}$ *valós számokra.*

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNY RÉSZLETTÖRTEKRE BONTÁSA

PÉLDA

$$\frac{P(x)}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} +$$

$$+\frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}$$

alkalmas $A, B, \ldots, G \in \mathbb{R}$ *valós számokra.*

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNY RÉSZLETTÖRTEKRE BONTÁSA

PÉLDA

$$\frac{P(x)}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}$$

alkalmas $A, B, \ldots, G \in \mathbb{R}$ valós számokra.

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNY RÉSZLETTÖRTEKRE BONTÁSA

PÉLDA

$$\frac{P(x)}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} +$$

$$+\frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}$$

alkalmas $A, B, \ldots, G \in \mathbb{R}$ *valós számokra.*

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

Módszer az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n} \in \mathbb{R}$ számok megtalálására: a kívánt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k,m} \frac{a_{k,m}}{(x-w_k)^m} + \sum_{l,n} \frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2+q_lx+s_l)^n}$$

egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk Q-val, így kapunk egy polinomegyenletet. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét oldalon x minden hatványának azonos az együtthatója. A bal oldalon x^k együtthatója meghatározott P által; a jobb oldalon pedig lineáris kifejezés a keresett együtthatókban. A kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n}$ ismeretlenekben.

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

Módszer az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n} \in \mathbb{R}$ számok megtalálására: a kívánt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k,m} \frac{a_{k,m}}{(x - w_k)^m} + \sum_{l,n} \frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2 + q_l x + s_l)^n}$$

egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk Q-val, így kapunk egy polinomegyenletet. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét oldalon x minden hatványának azonos az együtthatója. A bal oldalon x^k együtthatója meghatározott P által; a jobb oldalon pedig lineáris kifejezés a keresett együtthatókban. A kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n}$ ismeretlenekben.

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

Módszer az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n} \in \mathbb{R}$ számok megtalálására: a kívánt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k,m} \frac{a_{k,m}}{(x-w_k)^m} + \sum_{l,n} \frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2+q_l x + s_l)^n}$$

egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk Q-val, így kapunk egy polinomegyenletet. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét oldalon x minden hatványának azonos az együtthatója. A bal oldalon x^k együtthatója meghatározott P által; a jobb oldalon pedig lineáris kifejezés a keresett együtthatókban. A kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n}$ ismeretlenekben.

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

Módszer az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n} \in \mathbb{R}$ számok megtalálására: a kívánt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k,m} \frac{a_{k,m}}{(x - w_k)^m} + \sum_{l,n} \frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2 + q_l x + s_l)^n}$$

egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk Q-val, így kapunk egy polinomegyenletet. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét oldalon x minden hatványának azonos az együtthatója. A bal oldalon x^k együtthatója meghatározott P által; a jobb oldalon pedig lineáris kifejezés a keresett együtthatókban. A kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n}$ ismeretlenekben.

A határozatlan együtthatók módszere

Módszer az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n} \in \mathbb{R}$ számok megtalálására: a kívánt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k,m} \frac{a_{k,m}}{(x - w_k)^m} + \sum_{l,n} \frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2 + q_l x + s_l)^n}$$

egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk Q-val, így kapunk egy polinomegyenletet. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét oldalon x minden hatványának azonos az együtthatója. A bal oldalon x^k együtthatója meghatározott P által; a jobb oldalon pedig lineáris kifejezés a keresett együtthatókban. A kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n}$ ismeretlenekben.

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

Módszer az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n} \in \mathbb{R}$ számok megtalálására: a kívánt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k,m} \frac{a_{k,m}}{(x - w_k)^m} + \sum_{l,n} \frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2 + q_l x + s_l)^n}$$

egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk Q-val, így kapunk egy polinomegyenletet. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét oldalon x minden hatványának azonos az együtthatója. A bal oldalon x^k együtthatója meghatározott P által; a jobb oldalon pedig lineáris kifejezés a keresett együtthatókban. A kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n}$ ismeretlenekben.

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

Módszer az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n} \in \mathbb{R}$ számok megtalálására: a kívánt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k,m} \frac{a_{k,m}}{(x - w_k)^m} + \sum_{l,n} \frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2 + q_l x + s_l)^n}$$

egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk Q-val, így kapunk egy polinomegyenletet. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét oldalon x minden hatványának azonos az együtthatója. A bal oldalon x^k együtthatója meghatározott P által; a jobb oldalon pedig lineáris kifejezés a keresett együtthatókban. A kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n}$ ismeretlenekben.

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

FELADAT

$$\int \frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2}\,dx = ?$$

$$\frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{(2x+1)^2}$$

$$3x+2 = A(2x+1)^2 + B(x+2)(2x+1) + C(x+2)$$

$$3x+2 = (4A+2B)x^2 + (4A+5B+C)x + (A+2B+2C).$$

A határozatlan együtthatók módszere

Feladat

$$\int \frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2}\,dx = ?$$

$$\frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{(2x+1)^2}$$

$$3x+2 = A(2x+1)^2 + B(x+2)(2x+1) + C(x+2)$$

$$3x+2 = (4A+2B)x^2 + (4A+5B+C)x + (A+2B+2C).$$

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

FELADAT

$$\int \frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2}\,dx = ?$$

$$\frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{(2x+1)^2}$$

$$3x+2 = A(2x+1)^2 + B(x+2)(2x+1) + C(x+2)$$

$$3x+2 = (4A+2B)x^2 + (4A+5B+C)x + (A+2B+2C).$$

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

FELADAT

$$\int \frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2}\,dx = ?$$

$$\frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{(2x+1)^2}$$

$$3x+2 = A(2x+1)^2 + B(x+2)(2x+1) + C(x+2)$$

$$3x+2 = (4A+2B)x^2 + (4A+5B+C)x + (A+2B+2C).$$

A határozatlan együtthatók módszere

Feladat

$$\int \frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2}\,dx = ?$$

$$\frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{(2x+1)^2}$$

$$3x+2 = A(2x+1)^2 + B(x+2)(2x+1) + C(x+2)$$

$$3x+2 = (4A+2B)x^2 + (4A+5B+C)x + (A+2B+2C).$$

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

FELADAT

$$\int \frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2}\,dx = ?$$

$$\frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{(2x+1)^2}$$

$$3x+2 = A(2x+1)^2 + B(x+2)(2x+1) + C(x+2)$$

$$3x+2 = (4A+2B)x^2 + (4A+5B+C)x + (A+2B+2C).$$

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A+2B &=& 0 \\ 4A+5B+C &=& 3 \\ A+2B+2C &=& 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow B=-2A$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -6A+C &=& 3 \\ -3A+2C &=& 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow C=3+6A$$

$$-3A+6+12A=2 \Longrightarrow 9A=-4$$

$$\Longrightarrow A=-\frac{4}{9},\, C=\frac{1}{3},\, B=\frac{8}{9}.$$

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A+2B &=& 0 \\ 4A+5B+C &=& 3 \\ A+2B+2C &=& 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow B=-2A$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -6A+C &=& 3 \\ -3A+2C &=& 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow C=3+6A$$

$$-3A+6+12A=2 \Longrightarrow 9A=-4$$

$$\Longrightarrow A=-\frac{4}{9}, C=\frac{1}{3}, B=\frac{8}{9}.$$

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A+2B &=& 0 \\ 4A+5B+C &=& 3 \\ A+2B+2C &=& 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow B=-2A$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -6A+C &=& 3 \\ -3A+2C &=& 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow C=3+6A$$

$$-3A+6+12A=2 \Longrightarrow 9A=-4$$

$$\Longrightarrow A=-\frac{4}{9}, C=\frac{1}{3}, B=\frac{8}{9}.$$

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A+2B &=& 0 \\ 4A+5B+C &=& 3 \\ A+2B+2C &=& 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow B=-2A$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -6A+C &=& 3 \\ -3A+2C &=& 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow C=3+6A$$

$$-3A+6+12A=2 \Longrightarrow 9A=-4$$

$$\Longrightarrow A=-\frac{4}{9}, C=\frac{1}{3}, B=\frac{8}{9}.$$

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A+2B & = & 0 \\ 4A+5B+C & = & 3 \\ A+2B+2C & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow B=-2A$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -6A+C & = & 3 \\ -3A+2C & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow C=3+6A$$

$$-3A+6+12A=2 \Longrightarrow 9A=-4$$

$$\Longrightarrow A=-\frac{4}{9}, C=\frac{1}{3}, B=\frac{8}{9}.$$

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A+2B & = & 0 \\ 4A+5B+C & = & 3 \\ A+2B+2C & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow B=-2A$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -6A+C & = & 3 \\ -3A+2C & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow C=3+6A$$

$$-3A+6+12A=2 \Longrightarrow 9A=-4$$

$$\Longrightarrow A=-\frac{4}{9}, C=\frac{1}{3}, B=\frac{8}{9}.$$

A határozatlan együtthatók módszere

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A+2B &=& 0 \\ 4A+5B+C &=& 3 \\ A+2B+2C &=& 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow B=-2A$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -6A+C &=& 3 \\ -3A+2C &=& 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow C=3+6A$$

$$-3A+6+12A=2 \Longrightarrow 9A=-4$$

$$\Longrightarrow A=-\frac{4}{9},\ C=\frac{1}{3},\ B=\frac{8}{9}.$$

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A+2B & = & 0 \\ 4A+5B+C & = & 3 \\ A+2B+2C & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow B=-2A$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -6A+C & = & 3 \\ -3A+2C & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow C=3+6A$$

$$-3A+6+12A=2 \Longrightarrow 9A=-4$$

$$\Longrightarrow A=-\frac{4}{9}, C=\frac{1}{3}, B=\frac{8}{9}.$$

A HATÁROZATLAN EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A+2B & = & 0 \\ 4A+5B+C & = & 3 \\ A+2B+2C & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow B=-2A$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -6A+C & = & 3 \\ -3A+2C & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow C=3+6A$$

$$-3A+6+12A=2 \Longrightarrow 9A=-4$$

$$\Longrightarrow A=-\frac{4}{9}, C=\frac{1}{3}, B=\frac{8}{9}.$$

A határozatlan együtthatók módszere

$$\int \frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\frac{4}{9}}{x+2} + \frac{\frac{8}{9}}{2x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{4}{9}\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x + \frac{8}{9}\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{4}{9}\frac{\ln|x+2|}{1} + C + \frac{8}{9}\frac{\ln|2x+1|}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{(2x+1)^{-1}}{-1}}{2} + C =$$

$$-\frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{4}{9}\ln|2x+1| - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x+1} + C.$$

A határozatlan együtthatók módszere

$$\int \frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{-\frac{4}{9}}{x+2} + \frac{\frac{8}{9}}{2x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{4}{9}\int \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x + \frac{8}{9}\int \frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{4}{9}\frac{\ln|x+2|}{1} + C + \frac{8}{9}\frac{\ln|2x+1|}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{(2x+1)^{-1}}{-1}}{2} + C =$$

$$-\frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{4}{9}\ln|2x+1| - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x+1} + C.$$

A határozatlan együtthatók módszere

$$\int \frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{-\frac{4}{9}}{x+2} + \frac{\frac{8}{9}}{2x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{4}{9}\int \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x + \frac{8}{9}\int \frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{4}{9}\frac{\ln|x+2|}{1} + C + \frac{8}{9}\frac{\ln|2x+1|}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{(2x+1)^{-1}}{-1}}{2} + C =$$

$$-\frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{4}{9}\ln|2x+1| - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x+1} + C.$$

A határozatlan együtthatók módszere

$$\int \frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{-\frac{4}{9}}{x+2} + \frac{\frac{8}{9}}{2x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{4}{9}\int \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x + \frac{8}{9}\int \frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{4}{9}\frac{\ln|x+2|}{1} + C + \frac{8}{9}\frac{\ln|2x+1|}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{(2x+1)^{-1}}{-1}}{2} + C =$$

$$-\frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{4}{9}\ln|2x+1| - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x+1} + C.$$

A határozatlan együtthatók módszere

$$\int \frac{3x+2}{(x+2)(2x+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{-\frac{4}{9}}{x+2} + \frac{\frac{8}{9}}{2x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{4}{9}\int \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x + \frac{8}{9}\int \frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{4}{9}\frac{\ln|x+2|}{1} + C + \frac{8}{9}\frac{\ln|2x+1|}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{(2x+1)^{-1}}{-1}}{2} + C =$$

$$-\frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{4}{9}\ln|2x+1| - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x+1} + C.$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

FELADAT

$$\int \frac{2x+1}{x^4-1}dx = ?$$

$$\frac{2x+1}{x^4-1} = \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

Zérushelyek módszere

Feladat

$$\int \frac{2x+1}{x^4-1}\,dx = ?$$

$$\frac{2x+1}{x^4-1} = \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)(x-1).$$

Zérushelyek módszere

Feladat

$$\int \frac{2x+1}{x^4-1}\,dx = ?$$

$$\frac{2x+1}{x^4-1} = \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)(x-1).$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

FELADAT

$$\int \frac{2x+1}{x^4-1}\,dx = ?$$

$$\frac{2x+1}{x^4-1} = \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad 3 = 4B \\ x = -1: &\quad -1 = -4A \\ x = 0: &\quad 1 = -A + B - D \\ x = 2: &\quad 5 = 5A + 15B + 6C + 3D \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B = \frac{3}{4}, A = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{2}, C = -1$$

Zérushelyek módszere

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad 3 = 4B \\ x = -1: &\quad -1 = -4A \\ x = 0: &\quad 1 = -A + B - D \\ x = 2: &\quad 5 = 5A + 15B + 6C + 3D \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B = \frac{3}{4}, A = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{2}, C = -1$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

$$\begin{aligned} x = 1 : &\quad 3 = 4B \\ x = -1 : &\quad -1 = -4A \\ x = 0 : &\quad 1 = -A + B - D \\ x = 2 : &\quad 5 = 5A + 15B + 6C + 3D \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B = \frac{3}{4}, A = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{2}, C = -1$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

$$\begin{aligned}
x = 1: &\quad 3 = 4B\\
x = -1: &\quad -1 = -4A\\
x = 0: &\quad 1 = -A + B - D\\
x = 2: &\quad 5 = 5A + 15B + 6C + 3D
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B = \frac{3}{4}, A = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{2}, C = -1$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad 3 = 4B \\ x = -1: &\quad -1 = -4A \\ x = 0: &\quad 1 = -A + B - D \\ x = 2: &\quad 5 = 5A + 15B + 6C + 3D \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B = \frac{3}{4}, A = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{2}, C = -1$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad 3 = 4B \\ x = -1: &\quad -1 = -4A \\ x = 0: &\quad 1 = -A + B - D \\ x = 2: &\quad 5 = 5A + 15B + 6C + 3D \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B = \frac{3}{4}, A = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{2}, C = -1$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

$$\begin{aligned}
x = 1 : &\quad 3 = 4B \\
x = -1 : &\quad -1 = -4A \\
x = 0 : &\quad 1 = -A + B - D \\
x = 2 : &\quad 5 = 5A + 15B + 6C + 3D
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B = \frac{3}{4}, A = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{2}, C = -1$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad 3 = 4B \\ x = -1: &\quad -1 = -4A \\ x = 0: &\quad 1 = -A + B - D \\ x = 2: &\quad 5 = 5A + 15B + 6C + 3D \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B = \frac{3}{4}, A = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{2}, C = -1$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

$$2x+1 = A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad 3 = 4B \\ x = -1: &\quad -1 = -4A \\ x = 0: &\quad 1 = -A + B - D \\ x = 2: &\quad 5 = 5A + 15B + 6C + 3D \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B = \frac{3}{4}, A = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{2}, C = -1$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

$$\int \frac{2x+1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{-x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Zérushelyek módszere

$$\int \frac{2x+1}{x^4-1}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{-x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

$$\int \frac{2x+1}{x^4-1}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{-x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

ZÉRUSHELYEK MÓDSZERE

$$\int \frac{2x+1}{x^4-1}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{-x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Valós gyökökhöz tartozó részlettörtek integrálása

Láttuk:

$$\int \frac{a}{(x-w)}\mathrm{d}x = a\ln|x-w| + C,$$

$$\int \frac{a}{(x-w)^m}\mathrm{d}x = \frac{a}{(1-m)(x-w)^{m-1}} + C \quad \text{ha } m > 1.$$

VALÓS GYÖKÖKHÖZ TARTOZÓ RÉSZLETTÖRTEK INTEGRÁLÁSA

Láttuk:

$$\int \frac{a}{(x-w)}\mathrm{d}x = a\ln|x-w| + C,$$

$$\int \frac{a}{(x-w)^m}\mathrm{d}x = \frac{a}{(1-m)(x-w)^{m-1}} + C \quad \text{ha } m > 1.$$

VALÓS GYÖKÖKHÖZ TARTOZÓ RÉSZLETTÖRTEK INTEGRÁLÁSA

Láttuk:

$$\int \frac{a}{(x-w)}\mathrm{d}x = a\ln|x-w| + C,$$

$$\int \frac{a}{(x-w)^m}\mathrm{d}x = \frac{a}{(1-m)(x-w)^{m-1}} + C \quad \text{ha } m > 1.$$

KONJUGÁLT GYÖKPÁROKHOZ TARTOZÓ RÉSZLETTÖRTEK INTEGRÁLÁSA, I.

Mivel

$$x^2 + qx + s = \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4} + s,$$

azért az $y = \frac{x+\frac{q}{2}}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}$ helyettesítéssel

$$\int \frac{b}{x^2+qx+s}\,dx = \frac{b}{s-\frac{q^2}{4}} \int \frac{1}{y^2+1}\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}\,dy$$

$$= \frac{b}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}\arctan(y) + C$$

$$= \frac{b}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{q}{2}}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}\right) + C.$$

KONJUGÁLT GYÖKPÁROKHOZ TARTOZÓ RÉSZLETTÖRTEK INTEGRÁLÁSA, I.

Mivel

$$x^2 + qx + s = \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4} + s,$$

azért az $y = \frac{x+\frac{q}{2}}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}$ helyettesítéssel

$$\int \frac{b}{x^2 + qx + s}\mathrm{d}x = \frac{b}{s - \frac{q^2}{4}} \int \frac{1}{y^2+1} \sqrt{s - \frac{q^2}{4}}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{b}{\sqrt{s - \frac{q^2}{4}}} \arctan(y) + C$$

$$= \frac{b}{\sqrt{s - \frac{q^2}{4}}} \arctan\left(\frac{x + \frac{q}{2}}{\sqrt{s - \frac{q^2}{4}}}\right) + C.$$

Konjugált gyökpárokhoz tartozó résztlettörtek integrálása, I.

Mivel

$$x^2 + qx + s = \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4} + s,$$

azért az $y = \frac{x+\frac{q}{2}}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}$ helyettesítéssel

$$\int \frac{b}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x = \frac{b}{s-\frac{q^2}{4}} \int \frac{1}{y^2+1}\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{b}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}\arctan(y) + C$$

$$= \frac{b}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{q}{2}}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}\right) + C.$$

Konjugált gyökpárokhoz tartozó részlettörtek integrálása, I.

Mivel

$$x^2 + qx + s = \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4} + s,$$

azért az $y = \frac{x+\frac{q}{2}}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}$ helyettesítéssel

$$\int \frac{b}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x = \frac{b}{s-\frac{q^2}{4}} \int \frac{1}{y^2+1}\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{b}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}\arctan(y) + C$$

$$= \frac{b}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{q}{2}}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}\right) + C.$$

KONJUGÁLT GYÖKPÁROKHOZ TARTOZÓ RÉSZLETTÖRTEK INTEGRÁLÁSA, I.

Mivel

$$x^2 + qx + s = \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4} + s,$$

azért az $y = \frac{x+\frac{q}{2}}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\int \frac{b}{x^2 + qx + s}\mathrm{d}x &= \frac{b}{s - \frac{q^2}{4}} \int \frac{1}{y^2 + 1}\sqrt{s - \frac{q^2}{4}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{b}{\sqrt{s - \frac{q^2}{4}}} \arctan(y) + C \\ &= \frac{b}{\sqrt{s - \frac{q^2}{4}}} \arctan\left(\frac{x + \frac{q}{2}}{\sqrt{s - \frac{q^2}{4}}}\right) + C.\end{aligned}$$

KONJUGÁLT GYÖKPÁROKHOZ TARTOZÓ RÉSZLETTÖRTEK INTEGRÁLÁSA, II.

Legyen most $c \neq 0$, ekkor

$$\int \frac{b+cx}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{c}}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{c}{2}\int \frac{2x+q}{x^2+qx+s} + \frac{\frac{2b}{c}-q}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{c}{2}\ln(x^2+qx+s) + \frac{c}{2}\int \frac{\frac{2b}{c}-q}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x,$$

utóbbi integrál pedig már olyan alakú, mint az előző pontban.

Konjugált gyökpárokhoz tartozó részlettörtek integrálása, II.

Legyen most $c \neq 0$, ekkor

$$\int \frac{b+cx}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{c}}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{c}{2}\int \frac{2x+q}{x^2+qx+s} + \frac{\frac{2b}{c}-q}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{c}{2}\ln(x^2+qx+s) + \frac{c}{2}\int \frac{\frac{2b}{c}-q}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x,$$

utóbbi integrál pedig már olyan alakú, mint az előző pontban.

Konjugált gyökpárokhoz tartozó részlettörtek integrálása, II.

Legyen most $c \neq 0$, ekkor

$$
\begin{aligned}
\int \frac{b+cx}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x &= \frac{c}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{c}}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{2}\int \frac{2x+q}{x^2+qx+s} + \frac{\frac{2b}{c}-q}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{2}\ln(x^2+qx+s) + \frac{c}{2}\int \frac{\frac{2b}{c}-q}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

utóbbi integrál pedig már olyan alakú, mint az előző pontban.

Konjugált gyökpárokhoz tartozó részlettörtek integrálása, II.

Legyen most $c \neq 0$, ekkor

$$\begin{aligned}
\int \frac{b+cx}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x &= \frac{c}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{c}}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{2}\int \frac{2x+q}{x^2+qx+s} + \frac{\frac{2b}{c}-q}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{2}\ln(x^2+qx+s) + \frac{c}{2}\int \frac{\frac{2b}{c}-q}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

utóbbi integrál pedig már olyan alakú, mint az előző pontban.

Konjugált gyökpárokhoz tartozó részlettörtek integrálása, II.

Legyen most $c \neq 0$, ekkor

$$\begin{aligned}
\int \frac{b+cx}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x &= \frac{c}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{c}}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{2}\int \frac{2x+q}{x^2+qx+s} + \frac{\frac{2b}{c}-q}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{2}\ln(x^2+qx+s) + \frac{c}{2}\int \frac{\frac{2b}{c}-q}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

utóbbi integrál pedig már olyan alakú, mint az előző pontban.

KONJUGÁLT GYÖKPÁROKHOZ TARTOZÓ RÉSZLETTÖRTEK INTEGRÁLÁSA, III.

Amennyiben $n \geq 2$, akkor

$$\int \frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2 + q_l x + s_l)^n}$$

meghatározása egy rekurzió ismételt alkalmazásával visszavezethető a

$$\int \frac{b + cx}{x^2 + qx + s} \mathrm{d}x$$

meghatározására.

KONJUGÁLT GYÖKPÁROKHOZ TARTOZÓ RÉSZLETTÖRTEK INTEGRÁLÁSA, III.

Amennyiben $n \geq 2$, akkor

$$\int \frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2 + q_l x + s_l)^n}$$

meghatározása egy rekurzió ismételt alkalmazásával visszavezethető a

$$\int \frac{b + cx}{x^2 + qx + s} \mathrm{d}x$$

meghatározására.

RACIONÁLIS TÖRTEK INTEGRÁLÁSÁNAK MENETE

Algoritmus racionális törtek integrálására

1. Polinomosztás.
2. Nevező felbontása elsőfokú és negatív diszkriminánsú másodfokú polinomok szorzatára.
3. Parciális törtekre bontás.
4. A parciális törtek integrálása.

RACIONÁLIS TÖRTEK INTEGRÁLÁSÁNAK MENETE

Algoritmus racionális törtek integrálására

1. Polinomosztás.
2. Nevező felbontása elsőfokú és negatív diszkriminánsú másodfokú polinomok szorzatára.
3. Parciális törtekre bontás.
4. A parciális törtek integrálása.

RACIONÁLIS TÖRTEK INTEGRÁLÁSÁNAK MENETE

Algoritmus racionális törtek integrálására

1. Polinomosztás.
2. Nevező felbontása elsőfokú és negatív diszkriminánsú másodfokú polinomok szorzatára.
3. Parciális törtekre bontás.
4. A parciális törtek integrálása.

RACIONÁLIS TÖRTEK INTEGRÁLÁSÁNAK MENETE

Algoritmus racionális törtek integrálására

1. Polinomosztás.
2. Nevező felbontása elsőfokú és negatív diszkriminánsú másodfokú polinomok szorzatára.
3. Parciális törtekre bontás.
4. A parciális törtek integrálása.