20. ELŐADÁS: RACIONÁLIS TÖRTEK INTEGRÁLÁSÁRA VISSZAVEZETHETŐ INTEGRÁLOK

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY RACIONÁLIS FÜGGVÉNYEI

Legyen $R(x)$ egy racionális törtfüggvény (azaz két polinom hányadosaként felírható függvény), és $a > 0, a \neq 1$.

FELADAT

$\int R(a^x)dx = ?$

Megoldás:
Az $a^x = t$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$a^x = t \Longrightarrow x = \log_a(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(a)}.$$

Ebből

$$\int R(a^x)\mathrm{d}x = \int R(t)\cdot\frac{1}{t\ln(a)}\mathrm{d}t.$$

Exponenciális függvény racionális függvényei

Legyen $R(x)$ egy racionális törtfüggvény (azaz két polinom hányadosaként felírható függvény), és $a > 0$, $a \neq 1$.

Feladat

$\int R(a^x)dx = ?$

Megoldás:

Az $a^x = t$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$a^x = t \Longrightarrow x = \log_a(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(a)}.$$

Ebből

$$\int R(a^x)\mathrm{d}x = \int R(t) \cdot \frac{1}{t\ln(a)}\mathrm{d}t.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY RACIONÁLIS FÜGGVÉNYEI

Legyen $R(x)$ egy racionális törtfüggvény (azaz két polinom hányadosaként felírható függvény), és $a > 0$, $a \neq 1$.

FELADAT

$\int R(a^x)dx = ?$

Megoldás:

Az $a^x = t$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$a^x = t \Longrightarrow x = \log_a(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(a)}.$$

Ebből

$$\int R(a^x)\mathrm{d}x = \int R(t) \cdot \frac{1}{t\ln(a)}\mathrm{d}t.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY RACIONÁLIS FÜGGVÉNYEI

Legyen $R(x)$ egy racionális törtfüggvény (azaz két polinom hányadosaként felírható függvény), és $a > 0$, $a \neq 1$.

FELADAT

$\int R(a^x)dx = ?$

Megoldás:
Az $a^x = t$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$a^x = t \Longrightarrow x = \log_a(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(a)}.$$

Ebből

$$\int R(a^x)\mathrm{d}x = \int R(t) \cdot \frac{1}{t\ln(a)}\mathrm{d}t.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY RACIONÁLIS FÜGGVÉNYEI

Legyen $R(x)$ egy racionális törtfüggvény (azaz két polinom hányadosaként felírható függvény), és $a > 0$, $a \neq 1$.

FELADAT

$\int R(a^x)dx = ?$

Megoldás:
Az $a^x = t$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$a^x = t \Longrightarrow x = \log_a(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(a)}.$$

Ebből

$$\int R(a^x)\mathrm{d}x = \int R(t) \cdot \frac{1}{t\ln(a)}\mathrm{d}t.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY RACIONÁLIS FÜGGVÉNYEI

Legyen $R(x)$ egy racionális törtfüggvény (azaz két polinom hányadosaként felírható függvény), és $a > 0$, $a \neq 1$.

FELADAT

$\int R(a^x)dx =?$

Megoldás:
Az $a^x = t$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$a^x = t \implies x = \log_a(t) \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(a)}.$$

Ebből

$$\int R(a^x)\mathrm{d}x = \int R(t)\cdot\frac{1}{t\ln(a)}\mathrm{d}t.$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY RACIONÁLIS FÜGGVÉNYEI

PÉLDA

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^3}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}dt =$$

$$e^x = t, x = \ln(t), dx = \frac{1}{t}dt$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \int 1 - \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= t - \operatorname{arctg}(t) + C = e^x - \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY RACIONÁLIS FÜGGVÉNYEI

PÉLDA

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^3}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}dt =$$

$$e^x = t, x = \ln(t), dx = \frac{1}{t}dt$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \int 1 - \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= t - \operatorname{arctg}(t) + C = e^x - \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

Exponenciális függvény racionális függvényei

Példa

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^3}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}dt =$$

$$e^x = t, x = \ln(t), dx = \frac{1}{t}dt$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \int 1 - \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= t - \operatorname{arctg}(t) + C = e^x - \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

Exponenciális függvény racionális függvényei

Példa

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^3}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}dt =$$

$$e^x = t, x = \ln(t), dx = \frac{1}{t}dt$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \int 1 - \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= t - \operatorname{arctg}(t) + C = e^x - \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY RACIONÁLIS FÜGGVÉNYEI

PÉLDA

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^3}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}dt =$$

$$e^x = t, x = \ln(t), dx = \frac{1}{t}dt$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \int 1 - \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= t - \operatorname{arctg}(t) + C = e^x - \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

Exponenciális függvény racionális függvényei

Példa

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^3}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}dt =$$

$$e^x = t, x = \ln(t), dx = \frac{1}{t}dt$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \int 1 - \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= t - \operatorname{arctg}(t) + C = e^x - \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

Exponenciális függvény racionális függvényei

Példa

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^3}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}dt =$$

$$e^x = t, x = \ln(t), dx = \frac{1}{t}dt$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \int 1 - \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= t - \operatorname{arctg}(t) + C = e^x - \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

GYÖKÖS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen m egy pozitív egész, és $R(x)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sqrt[m]{x})dx = ?$

Megoldás:
Az $\sqrt[m]{x} = t$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\sqrt[m]{x} = t \Longrightarrow x = t^m \Longrightarrow \mathrm{d}x = mt^{m-1}\mathrm{d}t.$$

Ebből

$$\int R(\sqrt[m]{x})\mathrm{d}x = \int R(t) \cdot mt^{m-1}\mathrm{d}t.$$

GYÖKÖS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen m egy pozitív egész, és $R(x)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sqrt[m]{x})dx = ?$

Megoldás:

Az $\sqrt[m]{x} = t$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\sqrt[m]{x} = t \Longrightarrow x = t^m \Longrightarrow \mathrm{d}x = mt^{m-1}\mathrm{d}t.$$

Ebből

$$\int R(\sqrt[m]{x})\mathrm{d}x = \int R(t) \cdot mt^{m-1}\mathrm{d}t.$$

GYÖKÖS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen m egy pozitív egész, és $R(x)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sqrt[m]{x})dx = ?$

Megoldás:
Az $\sqrt[m]{x} = t$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\sqrt[m]{x} = t \Longrightarrow x = t^m \Longrightarrow \mathrm{d}x = mt^{m-1}\mathrm{d}t.$$

Ebből

$$\int R(\sqrt[m]{x})\mathrm{d}x = \int R(t) \cdot mt^{m-1}\mathrm{d}t.$$

GYÖKÖS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen m egy pozitív egész, és $R(x)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sqrt[m]{x})dx = ?$

Megoldás:
Az $\sqrt[m]{x} = t$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\sqrt[m]{x} = t \Longrightarrow x = t^m \Longrightarrow \mathrm{d}x = mt^{m-1}\mathrm{d}t.$$

Ebből

$$\int R(\sqrt[m]{x})\mathrm{d}x = \int R(t) \cdot mt^{m-1}\mathrm{d}t.$$

GYÖKÖS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen m egy pozitív egész, és $R(x)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sqrt[m]{x})dx = ?$

Megoldás:
Az $\sqrt[m]{x} = t$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\sqrt[m]{x} = t \implies x = t^m \implies \mathrm{d}x = mt^{m-1}\mathrm{d}t.$$

Ebből

$$\int R(\sqrt[m]{x})\mathrm{d}x = \int R(t) \cdot mt^{m-1}\mathrm{d}t.$$

Gyökös függvények integrálása

Példa

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{t^2}{t^3+t^2}\cdot 6t^5 dt =$$

$$\sqrt[6]{x} = t, x = t^6, dx = 6t^5 dt$$

$$= \int \frac{6t^5}{t+1}dt =$$

GYÖKÖS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

PÉLDA

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{t^2}{t^3+t^2} \cdot 6t^5 dt =$$

$$\sqrt[6]{x} = t, x = t^6, dx = 6t^5 dt$$

$$= \int \frac{6t^5}{t+1} dt =$$

Gyökös függvények integrálása

Példa

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{t^2}{t^3+t^2}\cdot 6t^5dt =$$

$$\sqrt[6]{x} = t, x = t^6, dx = 6t^5dt$$

$$= \int \frac{6t^5}{t+1}dt =$$

Gyökös függvények integrálása

Példa

$$
\begin{array}{r}
6t^5 \\
-\left(6t^5+6t^4\right) \\ \hline
-6t^4 \\
-\left(-6t^4-6t^3\right) \\ \hline
6t^3 \\
-\left(6t^3+6t^2\right) \\ \hline
-6t^2 \\
-\left(-6t^2-6t\right) \\ \hline
6t \\
-\left(6t+6\right) \\ \hline
-6
\end{array}
\quad : (t+1) = 6t^4 - 6t^3 + 6t^2 - 6t + 6
$$

$$\Longrightarrow \frac{6t^5}{t+1} = 6t^4 - 6t^3 + 6t^2 - 6t + 6 - \frac{6}{t+1}$$

GYÖKÖS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

PÉLDA

$$
\begin{array}{r}
6t^5 \quad : (t+1) = 6t^4 - 6t^3 + 6t^2 - 6t + 6 \\
-\left(6t^5 + 6t^4\right) \\
\hline
-6t^4 \\
-\left(-6t^4 - 6t^3\right) \\
\hline
6t^3 \\
-(6t^3 + 6t^2) \\
\hline
-6t^2 \\
-(-6t^2 - 6t) \\
\hline
6t \\
-(6t + 6) \\
\hline
-6
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow \frac{6t^5}{t+1} = 6t^4 - 6t^3 + 6t^2 - 6t + 6 - \frac{6}{t+1}$$

GYÖKÖS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

PÉLDA

$$\begin{array}{r} 6t^5 \\ -\,(6t^5+6t^4) \\ \hline -6t^4 \\ -\,(-6t^4-6t^3) \\ \hline 6t^3 \\ -(6t^3+6t^2) \\ \hline -6t^2 \\ -(-6t^2-6t) \\ \hline 6t \\ -(6t+6) \\ \hline -6 \end{array} \quad : (t+1) = 6t^4-6t^3+6t^2-6t+6$$

$$\Longrightarrow \frac{6t^5}{t+1} = 6t^4-6t^3+6t^2-6t+6-\frac{6}{t+1}$$

GYÖKÖS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

PÉLDA

$$= \int \frac{6t^5}{t+1}\,dt = \int 6t^4 - 6t^3 + 6t^2 - 6t + 6 - \frac{6}{t+1}\,dt =$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{4}t^4 + \frac{6}{3}t^3 - \frac{6}{2}t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}} + 1\right| + C$$

GYÖKÖS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

PÉLDA

$$= \int \frac{6t^5}{t+1}dt = \int 6t^4 - 6t^3 + 6t^2 - 6t + 6 - \frac{6}{t+1}dt =$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{4}t^4 + \frac{6}{3}t^3 - \frac{6}{2}t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}} + 1\right| + C$$

GYÖKÖS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

PÉLDA

$$= \int \frac{6t^5}{t+1} dt = \int 6t^4 - 6t^3 + 6t^2 - 6t + 6 - \frac{6}{t+1} dt =$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{4}t^4 + \frac{6}{3}t^3 - \frac{6}{2}t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}} + 1\right| + C$$

GYÖKÖS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

PÉLDA

$$= \int \frac{6t^5}{t+1}\,dt = \int 6t^4 - 6t^3 + 6t^2 - 6t + 6 - \frac{6}{t+1}\,dt =$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{4}t^4 + \frac{6}{3}t^3 - \frac{6}{2}t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}} + 1\right| + C$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = ?$

Megoldás:
A $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2 \operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = ?$

Megoldás:
A $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2 \operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = ?$

Megoldás:

A $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = ?$

Megoldás:

A $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \implies x = 2 \operatorname{arctg}(t) \implies dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = ?$

Megoldás:
A $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = ?$

Megoldás:
A $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x,y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x),\cos(x))dx = ?$

Megoldás:

A $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = ?$

Megoldás:
A $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = ?$

Megoldás:
A $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = ?$

Megoldás:

A $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2 \operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x,y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = ?$

Megoldás:
A $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = ?$

Megoldás:
A $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = ?$

Megoldás:
A $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvényre:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2 \operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Másrészt:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Trigonometrikus függvények integrálása

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$$

Ebből

$$\int R(\sin(x), \cos(x))\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$$

Ebből

$$\int R(\sin(x), \cos(x))\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$$

Ebből

$$\int R(\sin(x), \cos(x))\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

PÉLDA

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, x = 2 \operatorname{arctg}(t), dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

Trigonometrikus függvények integrálása

Példa

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arctg}(t), dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

PÉLDA

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arctg}(t), dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

PÉLDA

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arctg}(t), dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

Trigonometrikus függvények integrálása

Példa

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, x = 2 \operatorname{arctg}(t), dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))dx = ?$

Megoldás:

$$\mathrm{th}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\,\mathrm{arth}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

$$\mathrm{sh}\,x = \frac{2t}{1-t^2}, \mathrm{ch}\,x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \mathrm{th}x = \frac{2t}{1+t^2}, \mathrm{cth}\,x = \frac{1+t^2}{2t}$$

Ebből

$$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))dx = ?$

Megoldás:

$$\mathrm{th}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\,\mathrm{arth}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

$$\mathrm{sh}\,x = \frac{2t}{1-t^2}, \mathrm{ch}\,x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \mathrm{th}x = \frac{2t}{1+t^2}, \mathrm{cth}\,x = \frac{1+t^2}{2t}$$

Ebből

$$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))dx = ?$

Megoldás:

$$\mathrm{th}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\,\mathrm{arth}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

$$\mathrm{sh}\,x = \frac{2t}{1-t^2}, \mathrm{ch}\,x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \mathrm{th}x = \frac{2t}{1+t^2}, \mathrm{cth}\,x = \frac{1+t^2}{2t}$$

Ebből

$$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x,y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\mathrm{sh}(x),\mathrm{ch}(x))dx = ?$

Megoldás:

$$\mathrm{th}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\,\mathrm{arth}(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

$$\mathrm{sh}\,x = \frac{2t}{1-t^2}, \mathrm{ch}\,x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \mathrm{th}x = \frac{2t}{1+t^2}, \mathrm{cth}\,x = \frac{1+t^2}{2t}$$

Ebből

$$\int R(\mathrm{sh}(x),\mathrm{ch}(x))\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1-t^2},\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))dx = ?$

Megoldás:

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Longrightarrow \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}, \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}$$

$$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}, \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}\right) \mathrm{d}x$$

Azaz az $e^x = t$ helyettesítés alkalmazható.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))dx = ?$

Megoldás:

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Longrightarrow \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}, \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}$$

$$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}, \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}\right) \mathrm{d}x$$

Azaz az $e^x = t$ helyettesítés alkalmazható.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\text{sh}(x), \text{ch}(x))dx = ?$

Megoldás:

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Longrightarrow \text{sh}\, x = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}, \text{ch}\, x = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}$$

$$\int R(\text{sh}(x), \text{ch}(x))\text{d}x = \int R\left(\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}, \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}\right) \text{d}x$$

Azaz az $e^x = t$ helyettesítés alkalmazható.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\text{sh}(x), \text{ch}(x))dx = ?$

Megoldás:

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Longrightarrow \text{sh}\, x = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}, \text{ch}\, x = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}$$

$$\int R(\text{sh}(x), \text{ch}(x))\text{d}x = \int R\left(\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}, \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}\right)\text{d}x$$

Azaz az $e^x = t$ helyettesítés alkalmazható.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\text{sh}(x), \text{ch}(x))dx = ?$

Megoldás:

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Longrightarrow \text{sh}\, x = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}, \text{ch}\, x = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}$$

$$\int R(\text{sh}(x), \text{ch}(x))\text{d}x = \int R\left(\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}, \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}\right)\text{d}x$$

Azaz az $e^x = t$ helyettesítés alkalmazható.

HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény.

FELADAT

$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x)) dx = ?$

Megoldás:

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Longrightarrow \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}, \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}$$

$$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x)) \mathrm{d}x = \int R\left(\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}, \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}\right) \mathrm{d}x$$

Azaz az $e^x = t$ helyettesítés alkalmazható.

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

FELADAT

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = ?$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$$

$$x = \sin t,\ t = \arcsin x,\ dx = \cos t\,dt$$

$$\int R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) dx = \int R(\sin t, \cos t)\cos t\,dt$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

FELADAT

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = ?$

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt$$

$$x = \sin t, t = \arcsin x, dx = \cos t dt$$

$$\int R\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right) dx = \int R(\sin t, \cos t) \cos t dt$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

FELADAT

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = ?$

$$\int \sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \mathrm{d}t = \int \cos^2 t \mathrm{d}t$$

$$x = \sin t, t = \arcsin x, \mathrm{d}x = \cos t \mathrm{d}t$$

$$\int R\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right) \mathrm{d}x = \int R(\sin t, \cos t) \cos t \mathrm{d}t$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

FELADAT

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = ?$

$$\int \sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \mathrm{d}t = \int \cos^2 t \mathrm{d}t$$

$$x = \sin t, t = \arcsin x, \mathrm{d}x = \cos t \mathrm{d}t$$

$$\int R\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right) \mathrm{d}x = \int R\left(\sin t, \cos t\right) \cos t \mathrm{d}t$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = ?$$

$$\mathrm{ch}^2\, t - \mathrm{sh}^2\, t = 1 \Longrightarrow x = \mathrm{sh}\, t, t = \mathrm{arsh}\, x, \mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, t\mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \mathrm{ch}\, t\, \mathrm{ch}\, t\mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x \Longrightarrow x = \mathrm{ch}\, t, \mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, t\mathrm{d}t.$$

$$\int \sqrt{-x^2-1}\mathrm{d}x \Longrightarrow -x^2-1 < 0$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = ?$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \implies x = \operatorname{sh} t, t = \operatorname{arsh} x, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \operatorname{ch} t \operatorname{ch} t\mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x \implies x = \operatorname{ch} t, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} t\mathrm{d}t.$$

$$\int \sqrt{-x^2-1}\mathrm{d}x \implies -x^2-1 < 0$$

Gyökös másodfokú függvények integrálása

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = ?$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \Longrightarrow x = \operatorname{sh} t,\ t = \operatorname{arsh} x,\ \mathrm{d}x = \operatorname{ch} t \mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \operatorname{ch} t \operatorname{ch} t \mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x \Longrightarrow x = \operatorname{ch} t,\ \mathrm{d}x = \operatorname{sh} t \mathrm{d}t.$$

$$\int \sqrt{-x^2-1}\mathrm{d}x \Longrightarrow -x^2-1 < 0$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \Longrightarrow x = \operatorname{sh} t,\, t = \operatorname{arsh} x,\, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{ch} t \operatorname{ch} t\mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow x = \operatorname{ch} t,\, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} t\mathrm{d}t.$$

$$\int \sqrt{-x^2-1}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow -x^2-1 < 0$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = ?$$

$$\mathrm{ch}^2\, t - \mathrm{sh}^2\, t = 1 \Longrightarrow x = \mathrm{sh}\, t, t = \mathrm{arsh}\, x, \mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, t\mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \mathrm{ch}\, t\, \mathrm{ch}\, t\mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x \Longrightarrow x = \mathrm{ch}\, t, \mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, t\mathrm{d}t.$$

$$\int \sqrt{-x^2-1}\mathrm{d}x \Longrightarrow -x^2-1 < 0$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = ?$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \Longrightarrow x = \operatorname{sh} t, t = \operatorname{arsh} x, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \operatorname{ch} t \operatorname{ch} t\mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x \Longrightarrow x = \operatorname{ch} t, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} t\mathrm{d}t.$$

$$\int \sqrt{-x^2-1}\mathrm{d}x \Longrightarrow -x^2-1 < 0$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \Longrightarrow x = \operatorname{sh} t,\, t = \operatorname{arsh} x,\, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} t \mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{ch} t \operatorname{ch} t \mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow x = \operatorname{ch} t,\, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} t \mathrm{d}t.$$

$$\int \sqrt{-x^2-1}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow -x^2-1 < 0$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\mathrm{ch}^2\, t - \mathrm{sh}^2\, t = 1 \Longrightarrow x = \mathrm{sh}\, t,\, t = \mathrm{arsh}\, x,\, \mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, t \mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{ch}\, t\, \mathrm{ch}\, t \mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow x = \mathrm{ch}\, t,\, \mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, t \mathrm{d}t.$$

$$\int \sqrt{-x^2-1}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow -x^2 - 1 < 0$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

FELADAT

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R'\left(x, \sqrt{\pm(a'x+b')^2 \pm 1}\right) dx$$

1. eset:
$$\int R'\left(x, \sqrt{1-(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\sin t - b'}{a'}, \cos t\right) \frac{\cos t}{a'} \mathrm{d}t, \text{ ahol}$$
$a'x+b' = \sin t$

2. eset:
$$\int R'\left(x, \sqrt{1+(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\operatorname{sh} t - b'}{a'}, \operatorname{ch} t\right) \frac{\operatorname{ch} t}{a'} \mathrm{d}t, \text{ ahol}$$
$a'x+b' = \operatorname{sh} t$

3. eset:
$$\int R'\left(x, \sqrt{(a'x+b')^2-1}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\operatorname{ch} t - b'}{a'}, \operatorname{sh} t\right) \frac{\operatorname{sh} t}{a'} \mathrm{d}t, \text{ ahol}$$
$a'x+b' = \operatorname{ch} t$

4. eset: $\int R'\left(x, \sqrt{-1-(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x$, nem létezik az integrálandó függvény

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

FELADAT

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R'\left(x, \sqrt{\pm(a'x+b')^2 \pm 1}\right) dx$$

1. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{1-(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\sin t - b'}{a'}, \cos t\right) \frac{\cos t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x + b' = \sin t$

2. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{1+(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\operatorname{sh} t - b'}{a'}, \operatorname{ch} t\right) \frac{\operatorname{ch} t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x + b' = \operatorname{sh} t$

3. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{(a'x+b')^2-1}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\operatorname{ch} t - b'}{a'}, \operatorname{sh} t\right) \frac{\operatorname{sh} t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x + b' = \operatorname{ch} t$

4. eset: $\int R'\left(x, \sqrt{-1-(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x$, nem létezik az integrálandó függvény

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

FELADAT

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R'\left(x, \sqrt{\pm(a'x+b')^2 \pm 1}\right) dx$$

1. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{1-(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\sin t - b'}{a'}, \cos t\right) \frac{\cos t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x + b' = \sin t$

2. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{1+(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\operatorname{sh} t - b'}{a'}, \operatorname{ch} t\right) \frac{\operatorname{ch} t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x + b' = \operatorname{sh} t$

3. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{(a'x+b')^2-1}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\operatorname{ch} t - b'}{a'}, \operatorname{sh} t\right) \frac{\operatorname{sh} t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x + b' = \operatorname{ch} t$

4. eset: $\int R'\left(x, \sqrt{-1-(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x$, nem létezik az integrálandó függvény

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

FELADAT

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R'\left(x, \sqrt{\pm(a'x+b')^2 \pm 1}\right) dx$$

1. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{1-(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\sin t - b'}{a'}, \cos t\right) \frac{\cos t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x+b' = \sin t$

2. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{1+(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\operatorname{sh} t - b'}{a'}, \operatorname{ch} t\right) \frac{\operatorname{ch} t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x+b' = \operatorname{sh} t$

3. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{(a'x+b')^2-1}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\operatorname{ch} t - b'}{a'}, \operatorname{sh} t\right) \frac{\operatorname{sh} t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x+b' = \operatorname{ch} t$

4. eset: $\int R'\left(x, \sqrt{-1-(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x$, nem létezik az integrálandó függvény

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

FELADAT

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R'\left(x, \sqrt{\pm(a'x+b')^2 \pm 1}\right) dx$$

1. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{1-(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\sin t - b'}{a'}, \cos t\right) \frac{\cos t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x + b' = \sin t$

2. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{1+(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\operatorname{sh} t - b'}{a'}, \operatorname{ch} t\right) \frac{\operatorname{ch} t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x + b' = \operatorname{sh} t$

3. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{(a'x+b')^2-1}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\operatorname{ch} t - b'}{a'}, \operatorname{sh} t\right) \frac{\operatorname{sh} t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x + b' = \operatorname{ch} t$

4. eset: $\int R'\left(x, \sqrt{-1-(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x$, nem létezik az integrálandó függvény

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

FELADAT

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R'\left(x, \sqrt{\pm(a'x+b')^2 \pm 1}\right) dx$$

1. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{1-(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\sin t - b'}{a'}, \cos t\right) \frac{\cos t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x+b' = \sin t$

2. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{1+(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\operatorname{sh} t - b'}{a'}, \operatorname{ch} t\right) \frac{\operatorname{ch} t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x+b' = \operatorname{sh} t$

3. eset:
$\int R'\left(x, \sqrt{(a'x+b')^2-1}\right) \mathrm{d}x = \int R'\left(\frac{\operatorname{ch} t - b'}{a'}, \operatorname{sh} t\right) \frac{\operatorname{sh} t}{a'} \mathrm{d}t$, ahol
$a'x+b' = \operatorname{ch} t$

4. eset: $\int R'\left(x, \sqrt{-1-(a'x+b')^2}\right) \mathrm{d}x$, nem létezik az integrálandó függvény

Gyökös másodfokú függvények integrálása

Feladat

$$\int \sqrt{x^2+6x+5}dx = \int \sqrt{(x+3)^2-4}dx =$$

$$= 2\int \sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 1}dx =$$

$$\frac{x+3}{2} = \operatorname{ch} t, x = 2\operatorname{ch} t - 3, dx = 2\operatorname{sh} t dt, t = \operatorname{arch}\frac{x+3}{2}$$

$$= 2\int \operatorname{sh} t \cdot 2\operatorname{sh} t dt = 4\int \operatorname{sh}^2 t dt = 2\int \operatorname{ch}(2t) - 1 dt =$$

$$= 2\left(\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} - t\right) + C = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2}\right) - 2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2} + C$$

Gyökös másodfokú függvények integrálása

Feladat

$$\int \sqrt{x^2+6x+5}dx = \int \sqrt{(x+3)^2-4}dx =$$

$$= 2\int \sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2-1}dx =$$

$$\frac{x+3}{2} = \operatorname{ch} t, x = 2\operatorname{ch} t - 3, dx = 2\operatorname{sh} t dt, t = \operatorname{arch} \frac{x+3}{2}$$

$$= 2\int \operatorname{sh} t \cdot 2\operatorname{sh} t dt = 4\int \operatorname{sh}^2 t dt = 2\int \operatorname{ch}(2t) - 1 dt =$$

$$= 2\left(\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} - t\right) + C = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2}\right) - 2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2} + C$$

Gyökös másodfokú függvények integrálása

Feladat

$$\int \sqrt{x^2+6x+5}dx = \int \sqrt{(x+3)^2-4}dx =$$

$$= 2\int \sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 1}dx =$$

$$\frac{x+3}{2} = \operatorname{ch} t, x = 2\operatorname{ch} t - 3, dx = 2\operatorname{sh} t dt, t = \operatorname{arch}\frac{x+3}{2}$$

$$= 2\int \operatorname{sh} t \cdot 2\operatorname{sh} t dt = 4\int \operatorname{sh}^2 t dt = 2\int \operatorname{ch}(2t) - 1 dt =$$

$$= 2\left(\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} - t\right) + C = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2}\right) - 2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2} + C$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

FELADAT

$$\int \sqrt{x^2+6x+5}\,dx = \int \sqrt{(x+3)^2-4}\,dx =$$

$$= 2\int \sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 1}\,dx =$$

$$\frac{x+3}{2} = \operatorname{ch} t,\ x = 2\operatorname{ch} t - 3,\ dx = 2\operatorname{sh} t\,dt,\ t = \operatorname{arch}\frac{x+3}{2}$$

$$= 2\int \operatorname{sh} t \cdot 2\operatorname{sh} t\,dt = 4\int \operatorname{sh}^2 t\,dt = 2\int \operatorname{ch}(2t) - 1\,dt =$$

$$= 2\left(\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} - t\right) + C = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2}\right) - 2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2} + C$$

Gyökös másodfokú függvények integrálása

Feladat

$$\int \sqrt{x^2+6x+5}dx = \int \sqrt{(x+3)^2-4}dx =$$

$$= 2\int \sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 1}dx =$$

$$\frac{x+3}{2} = \operatorname{ch} t, x = 2\operatorname{ch} t - 3, dx = 2\operatorname{sh} t dt, t = \operatorname{arch}\frac{x+3}{2}$$

$$= 2\int \operatorname{sh} t \cdot 2\operatorname{sh} t dt = 4\int \operatorname{sh}^2 t dt = 2\int \operatorname{ch}(2t) - 1 dt =$$

$$= 2\left(\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} - t\right) + C = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2}\right) - 2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2} + C$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

FELADAT

$$\int \sqrt{x^2+6x+5}\,dx = \int \sqrt{(x+3)^2-4}\,dx =$$

$$= 2\int \sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 1}\,dx =$$

$$\frac{x+3}{2} = \operatorname{ch} t,\ x = 2\operatorname{ch} t - 3,\ dx = 2\operatorname{sh} t\,dt,\ t = \operatorname{arch}\frac{x+3}{2}$$

$$= 2\int \operatorname{sh} t \cdot 2\operatorname{sh} t\,dt = 4\int \operatorname{sh}^2 t\,dt = 2\int \operatorname{ch}(2t) - 1\,dt =$$

$$= 2\left(\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} - t\right) + C = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2}\right) - 2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2} + C$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

FELADAT

$$\int \sqrt{x^2+6x+5}dx = \int \sqrt{(x+3)^2-4}dx =$$

$$= 2\int \sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 1}dx =$$

$$\frac{x+3}{2} = \operatorname{ch} t, x = 2\operatorname{ch} t - 3, dx = 2\operatorname{sh} t dt, t = \operatorname{arch} \frac{x+3}{2}$$

$$= 2\int \operatorname{sh} t \cdot 2\operatorname{sh} t dt = 4\int \operatorname{sh}^2 t dt = 2\int \operatorname{ch}(2t) - 1 dt =$$

$$= 2\left(\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} - t\right) + C = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2}\right) - 2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2} + C$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

FELADAT

$$\int \sqrt{x^2+6x+5}dx = \int \sqrt{(x+3)^2-4}dx =$$

$$= 2\int \sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 1}dx =$$

$$\frac{x+3}{2} = \operatorname{ch} t, x = 2\operatorname{ch} t - 3, dx = 2\operatorname{sh} t dt, t = \operatorname{arch}\frac{x+3}{2}$$

$$= 2\int \operatorname{sh} t \cdot 2\operatorname{sh} t dt = 4\int \operatorname{sh}^2 t dt = 2\int \operatorname{ch}(2t) - 1 dt =$$

$$= 2\left(\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} - t\right) + C = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2}\right) - 2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2} + C$$

GYÖKÖS MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

FELADAT

$$\int \sqrt{x^2+6x+5}dx = \int \sqrt{(x+3)^2-4}dx =$$

$$= 2\int \sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 1}dx =$$

$$\frac{x+3}{2} = \operatorname{ch} t, x = 2\operatorname{ch} t - 3, dx = 2\operatorname{sh} t dt, t = \operatorname{arch}\frac{x+3}{2}$$

$$= 2\int \operatorname{sh} t \cdot 2\operatorname{sh} t dt = 4\int \operatorname{sh}^2 t dt = 2\int \operatorname{ch}(2t) - 1 dt =$$

$$= 2\left(\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} - t\right) + C = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2}\right) - 2\operatorname{arch}\frac{x+3}{2} + C$$