21. előadás: Az integrálszámítás alkalmazásai: területszámítás

GRAFIKON ALATTI TERÜLET

Legyen $f : [a, b] \to [0, \infty)$ folytonos függvény és

$$A = \{(x, y) : \quad a \le x \le b, \;\; 0 \le y \le f(x)\}.$$

TÉTEL

Ekkor

$$T(A) = \int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás:
$T(A)$ megegyezik f téglányösszegeinek minden határon túl finomodó $\mathcal{P}_i$ felosztás-sorozatokra vett határértékével.

GRAFIKON ALATTI TERÜLET

Legyen $f : [a, b] \to [0, \infty)$ folytonos függvény és

$$A = \{(x, y) : \quad a \leq x \leq b, \;\; 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

TÉTEL

Ekkor

$$T(A) = \int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás:

$T(A)$ megegyezik f téglányösszegeinek minden határon túl finomodó $\mathcal{P}_i$ felosztás-sorozatokra vett határértékével.

Grafikon alatti terület

Legyen $f : [a, b] \to [0, \infty)$ folytonos függvény és

$$A = \{(x, y) : \quad a \leq x \leq b, \;\; 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Tétel

Ekkor

$$T(A) = \int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás:
$T(A)$ megegyezik f téglányösszegeinek minden határon túl finomodó $\mathcal{P}_i$ felosztás-sorozatokra vett határértékével.

GRAFIKON ALATTI TERÜLET

FELADAT

Mennyi az $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ függvény grafikonja és az x-tengely által bezárt korlátos síkrész területe?

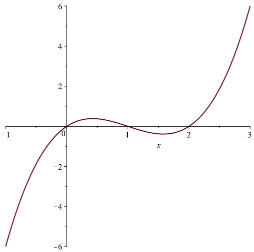

FIGURE: Az $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x$ függvény grafikonja

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0, x = 1, x = 2.$$

Grafikon alatti terület

Feladat

Mennyi az $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ függvény grafikonja és az x-tengely által bezárt korlátos síkrész területe?

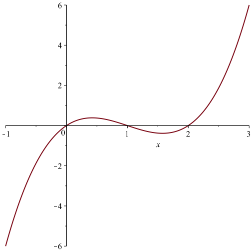

Figure: Az $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x$ függvény grafikonja

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0, x = 1, x = 2.$$

GRAFIKON ALATTI TERÜLET

FELADAT

Mennyi az $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ függvény grafikonja és az x-tengely által bezárt korlátos síkrész területe?

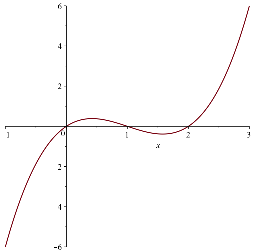

FIGURE: Az $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x$ függvény grafikonja

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0, x = 1, x = 2.$$

Grafikon alatti terület

$$T=\int_0^2 |f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3-3x^2+2x\mathrm{d}x+\int_1^2 -x^3+3x^2-2x\mathrm{d}x=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2\right]_1^2=$$

$$=\left(\frac{1}{4}-1+1\right)+(-4+8-4)-\left(-\frac{1}{4}+1-1\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

GRAFIKON ALATTI TERÜLET

$$T = \int_0^2 |f(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x \mathrm{d}x + \int_1^2 -x^3 + 3x^2 - 2x \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) + (-4 + 8 - 4) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

GRAFIKON ALATTI TERÜLET

$$T = \int_0^2 |f(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x\mathrm{d}x + \int_1^2 -x^3 + 3x^2 - 2x\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) + (-4 + 8 - 4) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Grafikon alatti terület

$$T = \int_0^2 |f(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x \mathrm{d}x + \int_1^2 -x^3 + 3x^2 - 2x \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) + (-4 + 8 - 4) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1 \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

KÉT FÜGGVÉNY GRAFIKONJA KÖZTI TARTOMÁNY TERÜLETE

FELADAT

Mennyi az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ függvények grafikonjai közti valamelyik összefüggő síkrész területe?

MEGJEGYZÉS

Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor a grafikonjuk által közbezárt rész területe

$$T = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)dx.$$

KÉT FÜGGVÉNY GRAFIKONJA KÖZTI TARTOMÁNY TERÜLETE

FELADAT

Mennyi az $y = \sin x$ *és az* $y = \cos x$ *függvények grafikonjai közti valamelyik összefüggő síkrész területe?*

MEGJEGYZÉS

Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvények, és* $f(x) \geq g(x)$ *minden* $x \in [a, b]$ *esetén, akkor a grafikonjuk által közbezárt rész területe*

$$T = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)dx.$$

KÉT FÜGGVÉNY GRAFIKONJA KÖZTI TARTOMÁNY TERÜLETE

FELADAT

Mennyi az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ függvények grafikonjai közti valamelyik összefüggő síkrész területe?

MEGJEGYZÉS

Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor a grafikonjuk által közbezárt rész területe

$$T = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)dx.$$

KÉT FÜGGVÉNY GRAFIKONJA KÖZTI TARTOMÁNY TERÜLETE

FELADAT

Mennyi az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ függvények grafikonjai közti valamelyik összefüggő síkrész területe?

MEGJEGYZÉS

Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor a grafikonjuk által közbezárt rész területe

$$T = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)dx.$$

Két függvény grafikonja közti tartomány területe

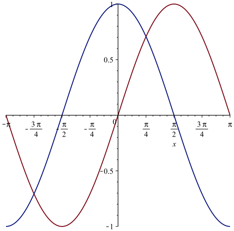

Figure: Az $x \mapsto \sin(x)$ és $x \mapsto \cos(x)$ függvények grafikonjai

$$\sin x = \cos x$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

KÉT FÜGGVÉNY GRAFIKONJA KÖZTI TARTOMÁNY TERÜLETE

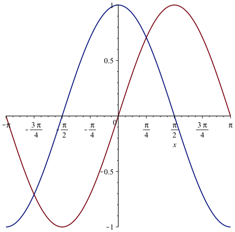

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$ és $x \mapsto \cos(x)$ függvények grafikonjai

$$\sin x = \cos x$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

KÉT FÜGGVÉNY GRAFIKONJA KÖZTI TARTOMÁNY TERÜLETE

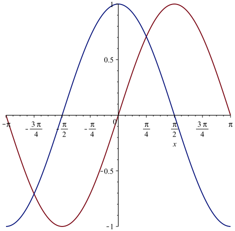

FIGURE: Az $x \mapsto \sin(x)$ és $x \mapsto \cos(x)$ függvények grafikonjai

$$\sin x = \cos x$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Két függvény grafikonja közti tartomány területe

$$T = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x - \cos x \mathrm{d}x =$$

$$= [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

Két függvény grafikonja közti tartomány területe

$$T = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x - \cos x \mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\cos x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

KÉT FÜGGVÉNY GRAFIKONJA KÖZTI TARTOMÁNY TERÜLETE

$$T = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x - \cos x \mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

KÉT FÜGGVÉNY GRAFIKONJA KÖZTI TARTOMÁNY TERÜLETE

$$T = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x - \cos x \mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\cos x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

Legyen most $t \in [\alpha, \beta]$ esetén

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, amelyre minden t esetén $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ szigorúan növő, folytonosan differenciálható függvénye t-nek. Legyen továbbá $A = \{(x(t), y) : \quad \alpha \leq t \leq \beta, \ \ 0 \leq y \leq y(t)\}$.

TÉTEL

Ekkor

$$T(A) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Bizonyítás:

Alkalmazzuk az $x = x(t)$ helyettesítést a következő képletben:

$$T(A) = \int^{b} f(x)dx.$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

Legyen most $t \in [\alpha, \beta]$ esetén

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, amelyre minden t esetén $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ szigorúan növő, folytonosan differenciálható függvénye t-nek. Legyen továbbá $A = \{(x(t), y) : \quad \alpha \leq t \leq \beta, \;\; 0 \leq y \leq y(t)\}$.

TÉTEL

Ekkor

$$T(A) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Bizonyítás:
Alkalmazzuk az $x = x(t)$ helyettesítést a következő képletben:

$$T(A) = \int^{b} f(x)dx.$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

Legyen most $t \in [\alpha, \beta]$ esetén

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, amelyre minden t esetén $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ szigorúan növő, folytonosan differenciálható függvénye t-nek. Legyen továbbá $A = \{(x(t), y) : \quad \alpha \leq t \leq \beta, \ \ 0 \leq y \leq y(t)\}$.

TÉTEL

Ekkor

$$T(A) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Bizonyítás:

Alkalmazzuk az $x = x(t)$ helyettesítést a következő képletben:

$$T(A) = \int^{b} f(x)dx.$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

Legyen most $t \in [\alpha, \beta]$ esetén

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, amelyre minden t esetén $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ szigorúan növő, folytonosan differenciálható függvénye t-nek. Legyen továbbá
$A = \{(x(t), y) : \quad \alpha \leq t \leq \beta, \;\; 0 \leq y \leq y(t)\}$.

TÉTEL

Ekkor

$$T(A) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Bizonyítás:

Alkalmazzuk az $x = x(t)$ helyettesítést a következő képletben:

$$T(A) = \int_a^b f(x)dx.$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

Legyen most $t \in [\alpha, \beta]$ esetén

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, amelyre minden t esetén $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ szigorúan növő, folytonosan differenciálható függvénye t-nek. Legyen továbbá $A = \{(x(t), y) : \quad \alpha \leq t \leq \beta, \;\; 0 \leq y \leq y(t)\}$.

TÉTEL

Ekkor

$$T(A) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Bizonyítás:

Alkalmazzuk az $x = x(t)$ helyettesítést a következő képletben:

$$T(A) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

Legyen most $t \in [\alpha, \beta]$ esetén

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, amelyre minden t esetén $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ szigorúan növő, folytonosan differenciálható függvénye t-nek. Legyen továbbá
$A = \{(x(t), y) : \quad \alpha \leq t \leq \beta, \;\; 0 \leq y \leq y(t)\}$.

TÉTEL

Ekkor

$$T(A) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Bizonyítás:
Alkalmazzuk az $x = x(t)$ helyettesítést a következő képletben:

$$T(A) = \int^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

FELADAT

Mennyi az

$$\left.\begin{aligned} x &= t + \cos t \\ y &= t \sin t \end{aligned}\right\} t \in [0, \pi]$$

egyenletű görbe alatti terület?

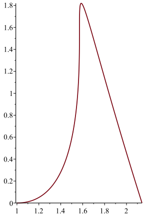

FIGURE: Az $\left.\begin{aligned} x &= t + \cos t \\ y &= t \sin t \end{aligned}\right\}, t \in [0, \pi]$ görbe grafikonja

Paraméteresen megadott görbe területe

Feladat

Mennyi az

$$\left.\begin{aligned} x &= t + \cos t \\ y &= t \sin t \end{aligned}\right\} t \in [0, \pi]$$

egyenletű görbe alatti terület?

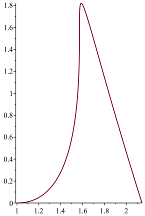

Figure: Az $\left.\begin{aligned} x &= t + \cos t \\ y &= t \sin t \end{aligned}\right\}, t \in [0, \pi]$ görbe grafikonja

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

$\dot{x}(t) = 1 - \sin t > 0$, ha $t \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tehát $x(t)$ szigorúan növő $[0,\pi]$-n. Ebből

$$T = \int_0^\pi y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi t\sin t(1-\sin t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t\sin t - t\sin^2 t\mathrm{d}t = \int_0^\pi t\sin t\mathrm{d}t - \int_0^\pi t\cdot\frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t\left(\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi t\mathrm{d}t =$$

$$f = t, g' = \sin t + \frac{1}{2}\cos(2t), f' = 1, g = -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)$$

$$= \left[t\left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\mathrm{d}t =$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

$\dot{x}(t) = 1 - \sin t > 0$, ha $t \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tehát $x(t)$ szigorúan növő $[0, \pi]$-n. Ebből

$$T = \int_0^\pi y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi t \sin t(1 - \sin t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t \sin t - t \sin^2 t\mathrm{d}t = \int_0^\pi t \sin t\mathrm{d}t - \int_0^\pi t \cdot \frac{1 - \cos(2t)}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t \left(\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi t\mathrm{d}t =$$

$$f = t, g' = \sin t + \frac{1}{2}\cos(2t), f' = 1, g = -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)$$

$$= \left[t\left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\mathrm{d}t =$$

Paraméteresen megadott görbe területe

$\dot{x}(t) = 1 - \sin t > 0$, ha $t \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tehát $x(t)$ szigorúan növő $[0, \pi]$-n. Ebből

$$T = \int_0^\pi y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi t \sin t(1 - \sin t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t \sin t - t \sin^2 t\mathrm{d}t = \int_0^\pi t \sin t\mathrm{d}t - \int_0^\pi t \cdot \frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t\left(\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi t\mathrm{d}t =$$

$$f = t, g' = \sin t + \frac{1}{2}\cos(2t), f' = 1, g = -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)$$

$$= \left[t\left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\mathrm{d}t =$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

$\dot{x}(t) = 1 - \sin t > 0$, ha $t \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tehát $x(t)$ szigorúan növő $[0, \pi]$-n. Ebből

$$T = \int_0^\pi y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi t \sin t(1 - \sin t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t \sin t - t \sin^2 t\mathrm{d}t = \int_0^\pi t \sin t\mathrm{d}t - \int_0^\pi t \cdot \frac{1 - \cos(2t)}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t \left(\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi t\mathrm{d}t =$$

$$f = t, g' = \sin t + \frac{1}{2}\cos(2t), f' = 1, g = -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)$$

$$= \left[t\left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\mathrm{d}t =$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

$\dot{x}(t) = 1 - \sin t > 0$, ha $t \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tehát $x(t)$ szigorúan növő $[0, \pi]$-n. Ebből

$$T = \int_0^\pi y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi t \sin t(1 - \sin t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t \sin t - t \sin^2 t \mathrm{d}t = \int_0^\pi t \sin t \mathrm{d}t - \int_0^\pi t \cdot \frac{1 - \cos(2t)}{2} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t \left(\sin(t) + \frac{1}{2} \cos(2t) \right) \mathrm{d}t - \frac{1}{2} \int_0^\pi t \mathrm{d}t =$$

$$f = t, g' = \sin t + \frac{1}{2} \cos(2t), f' = 1, g = -\cos t + \frac{1}{4} \sin(2t)$$

$$= \left[t \left(-\cos t + \frac{1}{4} \sin(2t) \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos t + \frac{1}{4} \sin(2t) \mathrm{d}t =$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

$\dot{x}(t) = 1 - \sin t > 0$, ha $t \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tehát $x(t)$ szigorúan növő $[0, \pi]$-n. Ebből

$$T = \int_0^\pi y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi t \sin t(1 - \sin t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t \sin t - t \sin^2 t\mathrm{d}t = \int_0^\pi t \sin t\mathrm{d}t - \int_0^\pi t \cdot \frac{1 - \cos(2t)}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t \left(\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi t\mathrm{d}t =$$

$$f = t, g' = \sin t + \frac{1}{2}\cos(2t), f' = 1, g = -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)$$

$$= \left[t\left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\mathrm{d}t =$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

$\dot{x}(t) = 1 - \sin t > 0$, ha $t \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tehát $x(t)$ szigorúan növő $[0, \pi]$-n. Ebből

$$T = \int_0^\pi y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi t \sin t(1 - \sin t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t \sin t - t \sin^2 t\mathrm{d}t = \int_0^\pi t \sin t\mathrm{d}t - \int_0^\pi t \cdot \frac{1 - \cos(2t)}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi t\left(\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi t\mathrm{d}t =$$

$$f = t, g' = \sin t + \frac{1}{2}\cos(2t), f' = 1, g = -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)$$

$$= \left[t\left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\mathrm{d}t =$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

$$= \left[t \left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t) \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t) \mathrm{d}t =$$

$$\left[t \left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t) \right) + \sin t + \frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi =$$

$$= \pi + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\pi^2 - \frac{1}{8} = \pi - \frac{1}{4}\pi^2.$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

$$= \left[t\left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t) \right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\mathrm{d}t =$$

$$\left[t\left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t) \right) + \sin t + \frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \pi + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\pi^2 - \frac{1}{8} = \pi - \frac{1}{4}\pi^2.$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

$$= \left[t\left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t) \right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\mathrm{d}t =$$

$$\left[t\left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t) \right) + \sin t + \frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \pi + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\pi^2 - \frac{1}{8} = \pi - \frac{1}{4}\pi^2.$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT GÖRBE TERÜLETE

$$= \left[t\left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\mathrm{d}t =$$

$$\left[t\left(-\cos t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right) + \sin t + \frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \pi + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\pi^2 - \frac{1}{8} = \pi - \frac{1}{4}\pi^2.$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT ZÁRT GÖRBE ÁLTAL BEZÁRT TERÜLET

ÁLLÍTÁS

Legyen

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}, t \in [\alpha, \beta]$$

egy zárt, önmagát nem metsző görbe , melyre $y(t)$ folytonos, $x(t)$ folytonosan deriválható, és amely az általa bezárt tartományt az óramutató járásával ellentétes irányban kerüli meg. Ekkor a bezárt terület

$$T = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT ZÁRT GÖRBE ÁLTAL BEZÁRT TERÜLET

ÁLLÍTÁS

Legyen

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}, t \in [\alpha, \beta]$$

egy zárt, önmagát nem metsző görbe , melyre $y(t)$ folytonos, $x(t)$ folytonosan deriválható, és amely az általa bezárt tartományt az óramutató járásával ellentétes irányban kerüli meg. *Ekkor a bezárt terület*

$$T = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT ZÁRT GÖRBE ÁLTAL BEZÁRT TERÜLET

ÁLLÍTÁS

Legyen

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}, t \in [\alpha, \beta]$$

egy zárt, önmagát nem metsző görbe , melyre $y(t)$ folytonos, $x(t)$ folytonosan deriválható, és amely az általa bezárt tartományt az óramutató járásával ellentétes irányban kerüli meg. Ekkor a bezárt terület

$$T = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Paraméteresen megadott zárt görbe által bezárt terület

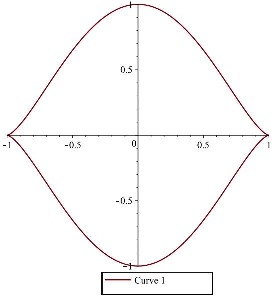

Figure: Az $\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin^3 t \end{array}\right\}$, $t \in [0, 2\pi]$ görbe grafikonja

PARAMÉTERESEN MEGADOTT ZÁRT GÖRBE ÁLTAL BEZÁRT TERÜLET

$\dot{x}(t) = -\sin t$

$$T = -\int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot (-\sin t)dt = \int_0^{2\pi} \sin^4(t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t)}{4} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\frac{1+\cos(4t)}{2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)dt =$$

$$= \left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{32}\sin(4t)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

Paraméteresen megadott zárt görbe által bezárt terület

$\dot{x}(t) = -\sin t$

$$T = -\int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot (-\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^4(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1-2\cos(2t)+\cos^2(2t)}{4} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\frac{1+\cos(4t)}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{32}\sin(4t)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

Paraméteresen megadott zárt görbe által bezárt terület

$\dot{x}(t) = -\sin t$

$$T = -\int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot (-\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^4(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1-2\cos(2t)+\cos^2(2t)}{4} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\frac{1+\cos(4t)}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{32}\sin(4t)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT ZÁRT GÖRBE ÁLTAL BEZÁRT TERÜLET

$\dot{x}(t) = -\sin t$

$$T = -\int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot (-\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^4(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1-2\cos(2t)+\cos^2(2t)}{4} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\frac{1+\cos(4t)}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{32}\sin(4t)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT ZÁRT GÖRBE ÁLTAL BEZÁRT TERÜLET

$\dot{x}(t) = -\sin t$

$$T = -\int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot (-\sin t) dt = \int_0^{2\pi} \sin^4(t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2} \right)^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t)}{4} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\frac{1+\cos(4t)}{2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t) dt =$$

$$= \left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{32}\sin(4t) \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT ZÁRT GÖRBE ÁLTAL BEZÁRT TERÜLET

$\dot{x}(t) = -\sin t$

$$T = -\int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot (-\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^4(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1-2\cos(2t)+\cos^2(2t)}{4} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\frac{1+\cos(4t)}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{32}\sin(4t)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

Paraméteresen megadott zárt görbe által bezárt terület

$\dot{x}(t) = -\sin t$

$$T = -\int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot (-\sin t) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^4(t) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1-2\cos(2t)+\cos^2(2t)}{4} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\frac{1+\cos(4t)}{2} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t) \mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{32}\sin(4t)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

PARAMÉTERESEN MEGADOTT ZÁRT GÖRBE ÁLTAL BEZÁRT TERÜLET

$\dot{x}(t) = -\sin t$

$$T = -\int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot (-\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^4(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t)}{4} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\frac{1+\cos(4t)}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{32}\sin(4t)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

PONT POLÁRKOORDINÁTÁI

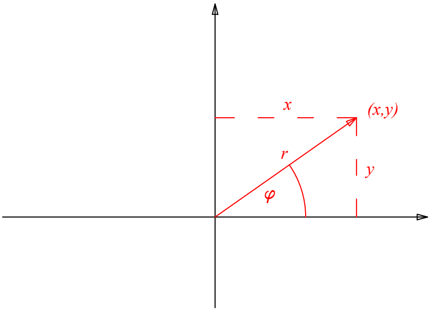

FIGURE: Pont polárkoordinátái

r: a pont origótól vett távolsága

ϕ: a pont helyvektorának az x-tengely pozitív felével bezárt, pozitív forgásirányban mért szöge

$\phi \mapsto r(\phi)$: polárkoordinátás alakban megadott görbe

PONT POLÁRKOORDINÁTÁI

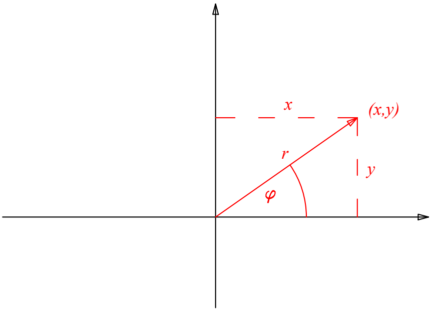

FIGURE: Pont polárkoordinátái

r: a pont origótól vett távolsága

ϕ: a pont helyvektorának az x-tengely pozitív felével bezárt, pozitív forgásirányban mért szöge

$\phi \mapsto r(\phi)$: polárkoordinátás alakban megadott görbe

PONT POLÁRKOORDINÁTÁI

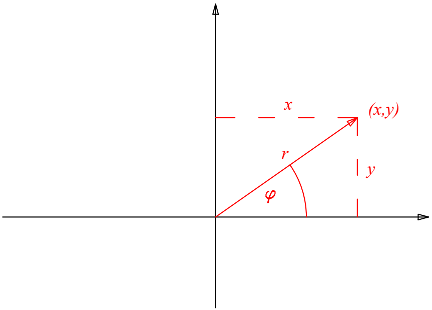

FIGURE: Pont polárkoordinátái

r: a pont origótól vett távolsága

ϕ: a pont helyvektorának az x-tengely pozitív felével bezárt, pozitív forgásirányban mért szöge

$\phi \mapsto r(\phi)$: polárkoordinátás alakban megadott görbe

POLÁRKOORDINÁTÁS ALAKBAN ADOTT GÖRBE

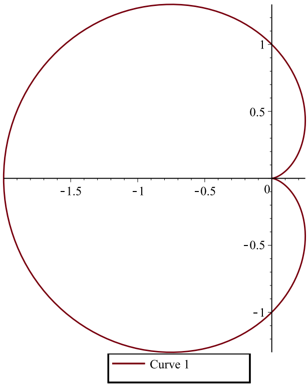

FIGURE: A $\phi \mapsto 1 - \cos(\phi), \phi \in [0, 2\pi]$ görbe (kardioid) grafikonja

SZÖGTARTOMÁNY TERÜLETE: SZEKTORTERÜLET

Legyen $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$, $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+$ egy korlátos függvény és

$$A = \{(r, \varphi) : \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta, \;\; 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$$

polárkoordinátákban megadott tartomány.

TÉTEL

Ekkor

$$T(A) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\varphi)^2 d\varphi.$$

Bizonyítás: A paraméteres alakban adott görbe alatti területre vonatkozó tételből.

SZÖGTARTOMÁNY TERÜLETE: SZEKTORTERÜLET

Legyen $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$, $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+$ egy korlátos függvény és

$$A = \{(r, \varphi) : \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta, \;\; 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$$

polárkoordinátákban megadott tartomány.

TÉTEL

Ekkor

$$T(A) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 d\varphi.$$

Bizonyítás: A paraméteres alakban adott görbe alatti területre vonatkozó tételből.

SZÖGTARTOMÁNY TERÜLETE: SZEKTORTERÜLET

Legyen $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$, $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+$ egy korlátos függvény és

$$A = \{(r, \varphi) : \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta, \;\; 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$$

polárkoordinátákban megadott tartomány.

TÉTEL

Ekkor

$$T(A) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 d\varphi.$$

Bizonyítás: A paraméteres alakban adott görbe alatti területre vonatkozó tételből.

SZÖGTARTOMÁNY TERÜLETE: SZEKTORTERÜLET

FELADAT

Mennyi a $\phi \mapsto 1 - \cos(\phi), \phi \in [0, 2\pi]$ *egyenletű kardioid által bezárt terület?*

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(\phi))^2 \, d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi \, d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - 2\cos\phi + \frac{1}{2}\cos(2\phi) d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\phi - 2\sin\phi + \frac{1}{4}\sin(2\phi)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

SZÖGTARTOMÁNY TERÜLETE: SZEKTORTERÜLET

FELADAT

Mennyi a $\phi \mapsto 1 - \cos(\phi), \phi \in [0, 2\pi]$ *egyenletű kardioid által bezárt terület?*

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(\phi))^2 \, d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi \, d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - 2\cos\phi + \frac{1}{2}\cos(2\phi) d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\phi - 2\sin\phi + \frac{1}{4}\sin(2\phi)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

SZÖGTARTOMÁNY TERÜLETE: SZEKTORTERÜLET

FELADAT

Mennyi a $\phi \mapsto 1 - \cos(\phi), \phi \in [0, 2\pi]$ *egyenletű kardioid által bezárt terület?*

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(\phi))^2 \, \mathrm{d}\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi \, \mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} \mathrm{d}\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - 2\cos\phi + \frac{1}{2}\cos(2\phi)\mathrm{d}\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\phi - 2\sin\phi + \frac{1}{4}\sin(2\phi)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

SZÖGTARTOMÁNY TERÜLETE: SZEKTORTERÜLET

FELADAT

Mennyi a $\phi \mapsto 1 - \cos(\phi), \phi \in [0, 2\pi]$ *egyenletű kardioid által bezárt terület?*

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(\phi))^2 \, d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \frac{1+\cos(2\phi)}{2} d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - 2\cos\phi + \frac{1}{2}\cos(2\phi) d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\phi - 2\sin\phi + \frac{1}{4}\sin(2\phi)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

SZÖGTARTOMÁNY TERÜLETE: SZEKTORTERÜLET

FELADAT

Mennyi a $\phi \mapsto 1 - \cos(\phi), \phi \in [0, 2\pi]$ *egyenletű kardioid által bezárt terület?*

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(\phi))^2 \, d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - 2\cos\phi + \frac{1}{2}\cos(2\phi) d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\phi - 2\sin\phi + \frac{1}{4}\sin(2\phi)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

Szögtartomány területe: szektorterület

Feladat

Mennyi a $\phi \mapsto 1 - \cos(\phi), \phi \in [0, 2\pi]$ egyenletű kardioid által bezárt terület?

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(\phi))^2 \, d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - 2\cos\phi + \frac{1}{2}\cos(2\phi) d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\phi - 2\sin\phi + \frac{1}{4}\sin(2\phi)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

SZÖGTARTOMÁNY TERÜLETE: SZEKTORTERÜLET

FELADAT

Mennyi a $\phi \mapsto 1 - \cos(\phi), \phi \in [0, 2\pi]$ *egyenletű kardioid által bezárt terület?*

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\phi))^2 \, d\phi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\phi + \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} d\phi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - 2\cos\phi + \frac{1}{2}\cos(2\phi) d\phi =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}\phi - 2\sin\phi + \frac{1}{4}\sin(2\phi) \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$