22. előadás: Az integrálszámítás alkalmazásai: térfogat, ívhossz és egyéb geometriai jellemzők

FORGÁSTEST TÉRFOGATA

Legyen $f : [a, b] \to [0, \infty)$ egy folytonos függvény.

TÉTEL

Azon forgástest térfogata, amelyet f grafikonjának az $x = a$ és $x = b$ síkok közötti részének x-tengely körüli megforgatásával nyerünk:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

BIZONYÍTÁS

Bármely $\mathcal{P} = (a = x_0, x_1, \ldots, x_N = b)$ felosztás esetén

$$\pi \sum_{k=1}^{N} m_k^2 (x_k - x_{k-1}) \leq V \leq \pi \sum_{k=1}^{N} M_k^2 (x_k - x_{k-1}).$$

Forgástest térfogata

Legyen $f : [a, b] \to [0, \infty)$ egy folytonos függvény.

Tétel

Azon forgástest térfogata, amelyet f grafikonjának az $x = a$ és $x = b$ síkok közötti részének x-tengely körüli megforgatásával nyerünk:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Bizonyítás

Bármely $\mathcal{P} = (a = x_0, x_1, \ldots, x_N = b)$ felosztás esetén

$$\pi \sum_{k=1}^{N} m_k^2 (x_k - x_{k-1}) \le V \le \pi \sum_{k=1}^{N} M_k^2 (x_k - x_{k-1}).$$

FORGÁSTEST TÉRFOGATA

Legyen $f : [a, b] \to [0, \infty)$ egy folytonos függvény.

TÉTEL

Azon forgástest térfogata, amelyet f grafikonjának az $x = a$ és $x = b$ síkok közötti részének x-tengely körüli megforgatásával nyerünk:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

BIZONYÍTÁS

Bármely $\mathcal{P} = (a = x_0, x_1, \ldots, x_N = b)$ felosztás esetén

$$\pi \sum_{k=1}^{N} m_k^2 (x_k - x_{k-1}) \leq V \leq \pi \sum_{k=1}^{N} M_k^2 (x_k - x_{k-1}).$$

FORGÁSTEST TÉRFOGATA

Legyen $f : [a, b] \to [0, \infty)$ egy folytonos függvény.

TÉTEL

Azon forgástest térfogata, amelyet f grafikonjának az $x = a$ és $x = b$ síkok közötti részének x-tengely körüli megforgatásával nyerünk:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

BIZONYÍTÁS

Bármely $\mathcal{P} = (a = x_0, x_1, \ldots, x_N = b)$ felosztás esetén

$$\pi \sum_{k=1}^{N} m_k^2 (x_k - x_{k-1}) \le V \le \pi \sum_{k=1}^{N} M_k^2 (x_k - x_{k-1}).$$

FORGÁSTEST TÉRFOGATA

Legyen $f : [a, b] \to [0, \infty)$ egy folytonos függvény.

TÉTEL

Azon forgástest térfogata, amelyet f grafikonjának az $x = a$ és $x = b$ síkok közötti részének x-tengely körüli megforgatásával nyerünk:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

BIZONYÍTÁS

Bármely $\mathcal{P} = (a = x_0, x_1, \ldots, x_N = b)$ felosztás esetén

$$\pi \sum_{k=1}^{N} m_k^2 (x_k - x_{k-1}) \leq V \leq \pi \sum_{k=1}^{N} M_k^2 (x_k - x_{k-1}).$$

FORGÁSTEST TÉRFOGATA

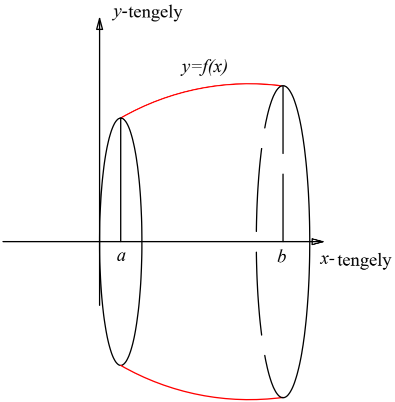

FIGURE: Az $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ grafikon x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest

FORGÁSTEST TÉRFOGATA

MEGJEGYZÉS

Paraméteres alakban adott görbe esetén

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\dot{x}(t)dt,$$

ha $y(t) \geq 0$ folytonos, $x(t)$ folytonosan deriválható és szigorúan növő $[\alpha, \beta]$-n.

Forgástest térfogata

Megjegyzés

Paraméteres alakban adott görbe esetén

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\dot{x}(t)dt,$$

ha $y(t) \geq 0$ folytonos, $x(t)$ folytonosan deriválható és szigorúan növő $[\alpha, \beta]$-n.

Forgástest térfogata

Megjegyzés

Paraméteres alakban adott görbe esetén

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\dot{x}(t)dt,$$

ha $y(t) \geq 0$ *folytonos,* $x(t)$ *folytonosan deriválható és szigorúan növő* $[\alpha, \beta]$*-n.*

FORGÁSTEST TÉRFOGATA

FELADAT

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogata?

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

FORGÁSTEST TÉRFOGATA

FELADAT

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogata?

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

FORGÁSTEST TÉRFOGATA

FELADAT

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogata?

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Forgástest térfogata

Feladat

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogata?

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

FORGÁSTEST TÉRFOGATA

FELADAT

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogata?

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

REKTIFIKÁLHATÓ GÖRBÉK

Legyen

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, ahol $t \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy $x(t)$ és $y(t)$ folytonos függvényei t-nek. Legyen $\mathcal{P} = (\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_N = \beta)$ egy tetszőleges felosztás, és $P_i = (x(t_i), y(t_i))$. Ekkor a $P_0 P_1 \ldots P_N$ pontok által ebben a sorrendben meghatározott töröttvonalat a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonnak hívjuk. Amennyiben a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonok hosszának létezik határértéke, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, akkor a görbét rektifikálhatónak mondjuk, és a húrpoligonok hosszának határértékét a görbe ívhosszának nevezzük.

REKTIFIKÁLHATÓ GÖRBÉK

Legyen

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, ahol $t \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy $x(t)$ és $y(t)$ folytonos függvényei t-nek. Legyen $\mathcal{P} = (\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_N = \beta)$ egy tetszőleges felosztás, és $P_i = (x(t_i), y(t_i))$. Ekkor a $P_0 P_1 \ldots P_N$ pontok által ebben a sorrendben meghatározott töröttvonalat a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonnak hívjuk. Amennyiben a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonok hosszának létezik határértéke, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, akkor a görbét rektifikálhatónak mondjuk, és a húrpoligonok hosszának határértékét a görbe ívhosszának nevezzük.

REKTIFIKÁLHATÓ GÖRBÉK

Legyen

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, ahol $t \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy $x(t)$ és $y(t)$ folytonos függvényei t-nek. Legyen $\mathcal{P} = (\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_N = \beta)$ egy tetszőleges felosztás, és $P_i = (x(t_i), y(t_i))$. Ekkor a $P_0 P_1 \ldots P_N$ pontok által ebben a sorrendben meghatározott töröttvonalat a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonnak hívjuk. Amennyiben a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonok hosszának létezik határértéke, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, akkor a görbét rektifikálhatónak mondjuk, és a húrpoligonok hosszának határértékét a görbe ívhosszának nevezzük.

REKTIFIKÁLHATÓ GÖRBÉK

Legyen

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, ahol $t \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy $x(t)$ és $y(t)$ folytonos függvényei t-nek. Legyen $\mathcal{P} = (\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_N = \beta)$ egy tetszőleges felosztás, és $P_i = (x(t_i), y(t_i))$. Ekkor a $P_0 P_1 \ldots P_N$ pontok által ebben a sorrendben meghatározott töröttvonalat a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonnak hívjuk. Amennyiben a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonok hosszának létezik határértéke, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, akkor a görbét rektifikálhatónak mondjuk, és a húrpoligonok hosszának határértékét a görbe ívhosszának nevezzük.

REKTIFIKÁLHATÓ GÖRBÉK

Legyen

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, ahol $t \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy $x(t)$ és $y(t)$ folytonos függvényei t-nek. Legyen $\mathcal{P} = (\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_N = \beta)$ egy tetszőleges felosztás, és $P_i = (x(t_i), y(t_i))$. Ekkor a $P_0 P_1 \ldots P_N$ pontok által ebben a sorrendben meghatározott töröttvonalat a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonnak hívjuk. Amennyiben a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonok hosszának létezik határértéke, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, akkor a görbét rektifikálhatónak mondjuk, és a húrpoligonok hosszának határértékét a görbe ívhosszának nevezzük.

REKTIFIKÁLHATÓ GÖRBÉK

Legyen

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, ahol $t \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy $x(t)$ és $y(t)$ folytonos függvényei t-nek. Legyen $\mathcal{P} = (\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_N = \beta)$ egy tetszőleges felosztás, és $P_i = (x(t_i), y(t_i))$. Ekkor a $P_0 P_1 \ldots P_N$ pontok által ebben a sorrendben meghatározott töröttvonalat a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonnak hívjuk. Amennyiben a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonok hosszának létezik határértéke, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, akkor a görbét rektifikálhatónak mondjuk, és a húrpoligonok hosszának határértékét a görbe ívhosszának nevezzük.

REKTIFIKÁLHATÓ GÖRBÉK

Legyen

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, ahol $t \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy $x(t)$ és $y(t)$ folytonos függvényei t-nek. Legyen $\mathcal{P} = (\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_N = \beta)$ egy tetszőleges felosztás, és $P_i = (x(t_i), y(t_i))$. Ekkor a $P_0 P_1 \ldots P_N$ pontok által ebben a sorrendben meghatározott töröttvonalat a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonnak hívjuk. Amennyiben a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonok hosszának létezik határértéke, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, akkor a görbét rektifikálhatónak mondjuk, és a húrpoligonok hosszának határértékét a görbe ívhosszának nevezzük.

REKTIFIKÁLHATÓ GÖRBÉK

Legyen

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, ahol $t \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy $x(t)$ és $y(t)$ folytonos függvényei t-nek. Legyen $\mathcal{P} = (\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_N = \beta)$ egy tetszőleges felosztás, és $P_i = (x(t_i), y(t_i))$. Ekkor a $P_0 P_1 \ldots P_N$ pontok által ebben a sorrendben meghatározott töröttvonalat a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonnak hívjuk. Amennyiben a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonok hosszának létezik határértéke, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, akkor a görbét rektifikálhatónak mondjuk, és a húrpoligonok hosszának határértékét a görbe ívhosszának nevezzük.

REKTIFIKÁLHATÓ GÖRBÉK

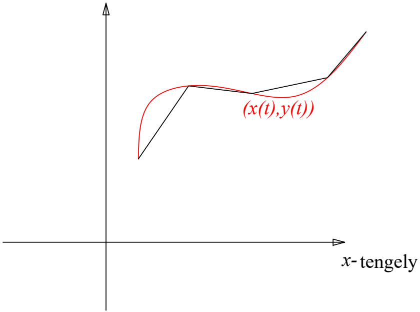

FIGURE: Egy görbébe írt húrpoligon

ÍVHOSSZ-SZÁMÍTÁS

TÉTEL

Ha $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálhatók, akkor az $(x(t), y(t))$ görbe rektifikálható, és ívhossza:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt.$$

Speciálisan, ha $x = t \in [a, b]$ és $y = f(x)$ egy függvény, akkor f grafikonjának ívhossza:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

ÍVHOSSZ-SZÁMÍTÁS

TÉTEL

Ha $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálhatók, akkor az $(x(t), y(t))$ görbe rektifikálható, és ívhossza:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$

Speciálisan, ha $x = t \in [a, b]$ és $y = f(x)$ egy függvény, akkor f grafikonjának ívhossza:

$$\int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

ÍVHOSSZ-SZÁMÍTÁS

TÉTEL

Ha $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálhatók, akkor az $(x(t), y(t))$ görbe rektifikálható, és ívhossza:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt.$$

Speciálisan, ha $x = t \in [a, b]$ és $y = f(x)$ egy függvény, akkor f grafikonjának ívhossza:

$$\int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

ÍVHOSSZ-SZÁMÍTÁS

TÉTEL

Ha $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálhatók, akkor az $(x(t), y(t))$ görbe rektifikálható, és ívhossza:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt.$$

Speciálisan, ha $x = t \in [a, b]$ és $y = f(x)$ egy függvény, akkor f grafikonjának ívhossza:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

AZ ÍVHOSSZ-KÉPLET BIZONYÍTÁSÁNAK ÖTLETE

A $P_0P_1 \ldots P_N$ húrpoligon hossza:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Lagrange középérték-tétele miatt léteznek olyan $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ értékek, amelyekre

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = \dot{x}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = \dot{y}(\eta_i)(t_i - t_{i-1}).$$

A húrpoligon hossza így:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2}(t_i - t_{i-1}).$$

Itt y egyenletes folytonossága miatt $\dot{y}(\eta_i)$ kicserélhető $\dot{y}(\xi_i)$-ra, akármilyen kicsiny hibataggal, ha $\mathcal{P}$ kellően finom. Az így nyert kifejezés a kívánt integrál egy közelítő összege.

AZ ÍVHOSSZ-KÉPLET BIZONYÍTÁSÁNAK ÖTLETE

A $P_0P_1\dots P_N$ húrpoligon hossza:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}.$$

Lagrange középérték-tétele miatt léteznek olyan $\xi_i,\eta_i\in[t_{i-1},t_i]$ értékek, amelyekre

$$x(t_i)-x(t_{i-1})=\dot{x}(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),\quad y(t_i)-y(t_{i-1})=\dot{y}(\eta_i)(t_i-t_{i-1}).$$

A húrpoligon hossza így:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2+(\dot{y}(\eta_i))^2}(t_i-t_{i-1}).$$

Itt y egyenletes folytonossága miatt $\dot{y}(\eta_i)$ kicserélhető $\dot{y}(\xi_i)$-ra, akármilyen kicsiny hibataggal, ha $\mathcal{P}$ kellően finom. Az így nyert kifejezés a kívánt integrál egy közelítő összege.

AZ ÍVHOSSZ-KÉPLET BIZONYÍTÁSÁNAK ÖTLETE

A $P_0P_1 \dots P_N$ húrpoligon hossza:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Lagrange középérték-tétele miatt léteznek olyan $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ értékek, amelyekre

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = \dot{x}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = \dot{y}(\eta_i)(t_i - t_{i-1}).$$

A húrpoligon hossza így:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2}(t_i - t_{i-1}).$$

Itt y egyenletes folytonossága miatt $\dot{y}(\eta_i)$ kicserélhető $\dot{y}(\xi_i)$-ra, akármilyen kicsiny hibataggal, ha $\mathcal{P}$ kellően finom. Az így nyert kifejezés a kívánt integrál egy közelítő összege.

AZ ÍVHOSSZ-KÉPLET BIZONYÍTÁSÁNAK ÖTLETE

A $P_0P_1 \dots P_N$ húrpoligon hossza:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Lagrange középérték-tétele miatt léteznek olyan $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ értékek, amelyekre

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = \dot{x}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = \dot{y}(\eta_i)(t_i - t_{i-1}).$$

A húrpoligon hossza így:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2}(t_i - t_{i-1}).$$

Itt y egyenletes folytonossága miatt $\dot{y}(\eta_i)$ kicserélhető $\dot{y}(\xi_i)$-ra, akármilyen kicsiny hibataggal, ha $\mathcal{P}$ kellően finom. Az így nyert kifejezés a kívánt integrál egy közelítő összege.

AZ ÍVHOSSZ-KÉPLET BIZONYÍTÁSÁNAK ÖTLETE

A $P_0P_1\dots P_N$ húrpoligon hossza:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}.$$

Lagrange középérték-tétele miatt léteznek olyan $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ értékek, amelyekre

$$x(t_i)-x(t_{i-1})=\dot{x}(\xi_i)(t_i-t_{i-1}), \quad y(t_i)-y(t_{i-1})=\dot{y}(\eta_i)(t_i-t_{i-1}).$$

A húrpoligon hossza így:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2+(\dot{y}(\eta_i))^2}(t_i-t_{i-1}).$$

Itt y egyenletes folytonossága miatt $\dot{y}(\eta_i)$ kicserélhető $\dot{y}(\xi_i)$-ra, akármilyen kicsiny hibataggal, ha $\mathcal{P}$ kellően finom. Az így nyert kifejezés a kívánt integrál egy közelítő összege.

AZ ÍVHOSSZ-KÉPLET BIZONYÍTÁSÁNAK ÖTLETE

A $P_0P_1\dots P_N$ húrpoligon hossza:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}.$$

Lagrange középérték-tétele miatt léteznek olyan $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ értékek, amelyekre

$$x(t_i)-x(t_{i-1}) = \dot{x}(\xi_i)(t_i-t_{i-1}), \quad y(t_i)-y(t_{i-1}) = \dot{y}(\eta_i)(t_i-t_{i-1}).$$

A húrpoligon hossza így:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2+(\dot{y}(\eta_i))^2}(t_i-t_{i-1}).$$

Itt y egyenletes folytonossága miatt $\dot{y}(\eta_i)$ kicserélhető $\dot{y}(\xi_i)$-ra, akármilyen kicsiny hibataggal, ha $\mathcal{P}$ kellően finom. Az így nyert kifejezés a kívánt integrál egy közelítő összege.

Ívhossz-számítás

Feladat

Számoljuk ki az $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [-1, 1]$ *görbe (láncgörbe) ívhosszát!*

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x dx = [\operatorname{sh} x]_{-1}^{1} =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - \operatorname{sh}(-1) = 2 \operatorname{sh} 1 \approx 2,3504.$$

ÍVHOSSZ-SZÁMÍTÁS

FELADAT

Számoljuk ki az $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [-1, 1]$ *görbe (láncgörbe) ívhosszát!*

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x dx = [\operatorname{sh} x]_{-1}^{1} =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - \operatorname{sh}(-1) = 2 \operatorname{sh} 1 \approx 2,3504.$$

ÍVHOSSZ-SZÁMÍTÁS

FELADAT

Számoljuk ki az $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [-1, 1]$ *görbe (láncgörbe) ívhosszát!*

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x dx = [\operatorname{sh} x]_{-1}^{1} =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - \operatorname{sh}(-1) = 2 \operatorname{sh} 1 \approx 2,3504.$$

ÍVHOSSZ-SZÁMÍTÁS

FELADAT

Számoljuk ki az $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [-1, 1]$ *görbe (láncgörbe) ívhosszát!*

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x dx = [\operatorname{sh} x]_{-1}^{1} =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - \operatorname{sh}(-1) = 2 \operatorname{sh} 1 \approx 2,3504.$$

ÍVHOSSZ-SZÁMÍTÁS

FELADAT

Számoljuk ki az $y = \operatorname{ch} x,\ x \in [-1, 1]$ *görbe (láncgörbe) ívhosszát!*

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x dx = [\operatorname{sh} x]_{-1}^{1} =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - \operatorname{sh}(-1) = 2 \operatorname{sh} 1 \approx 2,3504.$$

ÍVHOSSZ-SZÁMÍTÁS

FELADAT

Számoljuk ki az $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [-1, 1]$ *görbe (láncgörbe) ívhosszát!*

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x dx = [\operatorname{sh} x]_{-1}^{1} =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - \operatorname{sh}(-1) = 2 \operatorname{sh} 1 \approx 2,3504.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

Legyen $(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ egy paraméteresen adott görbe, ahol minden t-re $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ szigorúan nő.

TÉTEL

Ha $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálhatók, akkor az $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ görbe x-tengely körüli megforgatásával kapott felület felszíne:

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt.$$

Speciálisan, ha $x = t \in [a, b]$ és $y = f(x)$ egy folytonosan differenciálható függvény, akkor f grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület felszíne:

$$A = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

Legyen $(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ egy paraméteresen adott görbe, ahol minden t-re $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ szigorúan nő.

TÉTEL

Ha $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálhatók, akkor az $(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ görbe x-tengely körüli megforgatásával kapott felület felszíne:

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt.$$

Speciálisan, ha $x = t \in [a, b]$ és $y = f(x)$ egy folytonosan differenciálható függvény, akkor f grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület felszíne:

$$A = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

Legyen $(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ egy paraméteresen adott görbe, ahol minden t-re $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ szigorúan nő.

TÉTEL

Ha $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálhatók, akkor az $(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ görbe x-tengely körüli megforgatásával kapott felület felszíne:

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt.$$

Speciálisan, ha $x = t \in [a, b]$ és $y = f(x)$ egy folytonosan differenciálható függvény, akkor f grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület felszíne:

$$A = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

Legyen $(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ egy paraméteresen adott görbe, ahol minden t-re $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ szigorúan nő.

TÉTEL

Ha $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálhatók, akkor az $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ görbe x-tengely körüli megforgatásával kapott felület felszíne:

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt.$$

Speciálisan, ha $x = t \in [a, b]$ és $y = f(x)$ egy folytonosan differenciálható függvény, akkor f grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület felszíne:

$$A = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

Legyen $(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ egy paraméteresen adott görbe, ahol minden t-re $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ szigorúan nő.

TÉTEL

Ha $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálhatók, akkor az $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ görbe x-tengely körüli megforgatásával kapott felület felszíne:

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt.$$

Speciálisan, ha $x = t \in [a, b]$ és $y = f(x)$ egy folytonosan differenciálható függvény, akkor f grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

Legyen $(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ egy paraméteresen adott görbe, ahol minden t-re $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ szigorúan nő.

TÉTEL

Ha $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálhatók, akkor az $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ görbe x-tengely körüli megforgatásával kapott felület felszíne:

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt.$$

Speciálisan, ha $x = t \in [a, b]$ és $y = f(x)$ egy folytonosan differenciálható függvény, akkor f grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület felszíne:

$$A = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

Forgástest palástjának felszíne

Feladat

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszíne?

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} \right) = \frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6}.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

FELADAT

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszíne?

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{(x+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\right) = \frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6}.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

FELADAT

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszíne?

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\right) = \frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6}.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

FELADAT

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszíne?

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\right) = \frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6}.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

FELADAT

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszíne?

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\right) = \frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6}.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

FELADAT

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszíne?

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\right) = \frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6}.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

FELADAT

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszíne?

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\right) = \frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6}.$$

FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE

FELADAT

Mennyi az $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszíne?

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} \right) = \frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6}.$$

Tömegpontrendszer súlypontja

Legyen $n \geq 1$, $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ pontok és $m_1, \ldots, m_n > 0$ tömegértékek. Legyen

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

$$s_x = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k x_k,$$

$$s_y = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k y_k.$$

Tekintsük azt a tömegpontrendszert, amelyben az (x_k, y_k) pontban m_k tömegű tömegpont helyezkedik el.

Tétel

E rendszer tömegközéppontja (s_x, s_y).

Tömegpontrendszer súlypontja

Legyen $n \geq 1$, $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ pontok és $m_1, \ldots, m_n > 0$ tömegértékek. Legyen

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

$$s_x = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k x_k,$$

$$s_y = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k y_k.$$

Tekintsük azt a tömegpontrendszert, amelyben az (x_k, y_k) pontban m_k tömegű tömegpont helyezkedik el.

Tétel

E rendszer tömegközéppontja (s_x, s_y).

TÖMEGPONTRENDSZER SÚLYPONTJA

Legyen $n \geq 1$, $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ pontok és $m_1, \ldots, m_n > 0$ tömegértékek. Legyen

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

$$s_x = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k x_k,$$

$$s_y = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k y_k.$$

Tekintsük azt a tömegpontrendszert, amelyben az (x_k, y_k) pontban m_k tömegű tömegpont helyezkedik el.

TÉTEL

E rendszer tömegközéppontja (s_x, s_y).

Tömegpontrendszer súlypontja

Legyen $n \geq 1$, $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ pontok és $m_1, \dots, m_n > 0$ tömegértékek. Legyen

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

$$s_x = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k x_k,$$

$$s_y = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k y_k.$$

Tekintsük azt a tömegpontrendszert, amelyben az (x_k, y_k) pontban m_k tömegű tömegpont helyezkedik el.

Tétel

E rendszer tömegközéppontja (s_x, s_y).

TÖMEGPONTRENDSZER SÚLYPONTJA

Legyen $n \geq 1$, $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ pontok és $m_1, \dots, m_n > 0$ tömegértékek. Legyen

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

$$s_x = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k x_k,$$

$$s_y = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k y_k.$$

Tekintsük azt a tömegpontrendszert, amelyben az (x_k, y_k) pontban m_k tömegű tömegpont helyezkedik el.

TÉTEL

E rendszer tömegközéppontja (s_x, s_y).

TÖMEGPONTRENDSZER SÚLYPONTJA

Legyen $n \geq 1$, $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ pontok és $m_1, \ldots, m_n > 0$ tömegértékek. Legyen

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

$$s_x = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k x_k,$$

$$s_y = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k y_k.$$

Tekintsük azt a tömegpontrendszert, amelyben az (x_k, y_k) pontban m_k tömegű tömegpont helyezkedik el.

TÉTEL

E rendszer tömegközéppontja (s_x, s_y).

SÍKTAROMÁNY SÚLYPONTJA

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvény és

$$A = \{(x, y) : \quad a \leq x \leq b, \ \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Legyen

$$T(A) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$s_x = \frac{1}{T(A)} \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x,$$

$$s_y = \frac{1}{2T(A)} \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x.$$

TÉTEL

Ekkor az A síktartomány tömegközéppontja (s_x, s_y).

Síktaromány súlypontja

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvény és

$$A = \{(x, y) : \quad a \le x \le b, \;\; 0 \le y \le f(x)\}.$$

Legyen

$$T(A) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$s_x = \frac{1}{T(A)} \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x,$$

$$s_y = \frac{1}{2T(A)} \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x.$$

Tétel

Ekkor az A síktartomány tömegközéppontja (s_x, s_y).

SÍKTAROMÁNY SÚLYPONTJA

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvény és

$$A = \{(x, y) : \quad a \le x \le b, \ \ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Legyen

$$T(A) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$s_x = \frac{1}{T(A)} \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x,$$

$$s_y = \frac{1}{2T(A)} \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x.$$

TÉTEL

Ekkor az A síktartomány tömegközéppontja (s_x, s_y).

SÍKTAROMÁNY SÚLYPONTJA

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvény és

$$A = \{(x, y) : \quad a \leq x \leq b, \;\; 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Legyen

$$T(A) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$s_x = \frac{1}{T(A)} \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x,$$

$$s_y = \frac{1}{2T(A)} \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x.$$

TÉTEL

Ekkor az A síktartomány tömegközéppontja (s_x, s_y).

SÍKTAROMÁNY SÚLYPONTJA

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvény és

$$A = \{(x, y) : \quad a \leq x \leq b, \ \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Legyen

$$T(A) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$s_x = \frac{1}{T(A)} \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x,$$

$$s_y = \frac{1}{2T(A)} \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x.$$

TÉTEL

Ekkor az A síktartomány tömegközéppontja (s_x, s_y).

SÍKTARTOMÁNY SÚLYPONTJA

FELADAT

Számoljuk ki az origó középpontú, egységsugarú körlemez első negyedbe eső részének súlypontját!

$T = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$. A lemez egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0 \Longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1].$$

$$\frac{\pi}{4} s_x = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2x)\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\left[\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

SÍKTARTOMÁNY SÚLYPONTJA

FELADAT

Számoljuk ki az origó középpontú, egységsugarú körlemez első negyedbe eső részének súlypontját!

$T = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$. A lemez egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0 \Longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1].$$

$$\frac{\pi}{4} s_x = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x) \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} \left[\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

SÍKTARTOMÁNY SÚLYPONTJA

FELADAT

Számoljuk ki az origó középpontú, egységsugarú körlemez első negyedbe eső részének súlypontját!

$T = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$. A lemez egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0 \Longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1].$$

$$\frac{\pi}{4} s_x = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2x)\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\left[\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

SÍKTARTOMÁNY SÚLYPONTJA

FELADAT

Számoljuk ki az origó középpontú, egységsugarú körlemez első negyedbe eső részének súlypontját!

$T = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$. A lemez egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0 \Longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1].$$

$$\frac{\pi}{4} s_x = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2x)\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\left[\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

SÍKTARTOMÁNY SÚLYPONTJA

FELADAT

Számoljuk ki az origó középpontú, egységsugarú körlemez első negyedbe eső részének súlypontját!

$T = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$. A lemez egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0 \Longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1].$$

$$\frac{\pi}{4} s_x = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x) \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} \left[\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Síktartomány súlypontja

Feladat

Számoljuk ki az origó középpontú, egységsugarú körlemez első negyedbe eső részének súlypontját!

$T = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$. A lemez egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0 \Longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1].$$

$$\frac{\pi}{4} s_x = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x) \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} \left[\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

SÍKTARTOMÁNY SÚLYPONTJA

FELADAT

Számoljuk ki az origó középpontú, egységsugarú körlemez első negyedbe eső részének súlypontját!

$T = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$. A lemez egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0 \Longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1].$$

$$\frac{\pi}{4} s_x = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x) \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} \left[\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

SÍKTARTOMÁNY SÚLYPONTJA

FELADAT

Számoljuk ki az origó középpontú, egységsugarú körlemez első negyedbe eső részének súlypontját!

$T = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$. A lemez egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0 \Longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1].$$

$$\frac{\pi}{4} s_x = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x) \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} \left[\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

SÍKTARTOMÁNY SÚLYPONTJA

$$\frac{\pi}{4}s_y = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

A súlypont:

$$s = \left(\frac{4}{3\pi}; \frac{4}{3\pi}\right).$$