23. ELŐADÁS: IMPROPRIUS INTEGRÁLOK

JOBBRÓL VÉGTELEN FÉLEGYENESEN VETT IMPROPRIUS INTEGRÁL

Legyen $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Ha minden $\omega > a$ esetén f Riemann-integrálható az $[a, \omega]$ intervallumon, továbbá létezik a véges $\lim_{\omega\to\infty} \int_a^\omega f(x)dx$ határérték, akkor azt mondjuk hogy létezik (vagy konvergens) f improprius integrálja az $[a, +\infty)$ félegyenesen, és értéke

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_a^\omega f(x)dx.$$

Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az improprius integrál divergens.

JOBBRÓL VÉGTELEN FÉLEGYENESEN VETT IMPROPRIUS INTEGRÁL

Legyen $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Ha minden $\omega > a$ esetén f Riemann-integrálható az $[a, \omega]$ intervallumon, továbbá létezik a véges $\lim_{\omega \to \infty} \int_a^\omega f(x)dx$ határérték, akkor azt mondjuk hogy létezik (vagy konvergens) f improprius integrálja az $[a, +\infty)$ félegyenesen, és értéke

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\omega \to \infty} \int_a^\omega f(x)dx.$$

Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az improprius integrál divergens.

JOBBRÓL VÉGTELEN FÉLEGYENESEN VETT IMPROPRIUS INTEGRÁL

Legyen $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Ha minden $\omega > a$ esetén f Riemann-integrálható az $[a, \omega]$ intervallumon, továbbá létezik a véges $\lim_{\omega\to\infty} \int_a^\omega f(x)dx$ határérték, akkor azt mondjuk hogy létezik (vagy konvergens) f improprius integrálja az $[a, +\infty)$ félegyenesen, és értéke

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_a^\omega f(x)dx.$$

Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az improprius integrál divergens.

JOBBRÓL VÉGTELEN FÉLEGYENESEN VETT IMPROPRIUS INTEGRÁL

Legyen $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Ha minden $\omega > a$ esetén f Riemann-integrálható az $[a, \omega]$ intervallumon, továbbá létezik a véges $\lim_{\omega\to\infty} \int_a^\omega f(x)dx$ határérték, akkor azt mondjuk hogy létezik (vagy konvergens) f improprius integrálja az $[a, +\infty)$ félegyenesen, és értéke

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_a^\omega f(x)dx.$$

Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az improprius integrál divergens.

JOBBRÓL VÉGTELEN FÉLEGYENESEN VETT IMPROPRIUS INTEGRÁL

Legyen $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Ha minden $\omega > a$ esetén f Riemann-integrálható az $[a, \omega]$ intervallumon, továbbá létezik a véges $\lim_{\omega \to \infty} \int_a^\omega f(x)dx$ határérték, akkor azt mondjuk hogy létezik (vagy konvergens) f improprius integrálja az $[a, +\infty)$ félegyenesen, és értéke

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\omega \to \infty} \int_a^\omega f(x)dx.$$

Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az improprius integrál divergens.

JOBBRÓL VÉGTELEN FÉLEGYENESEN VETT IMPROPRIUS INTEGRÁL

Legyen $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Ha minden $\omega > a$ esetén f Riemann-integrálható az $[a, \omega]$ intervallumon, továbbá létezik a véges $\lim_{\omega \to \infty} \int_a^\omega f(x)dx$ határérték, akkor azt mondjuk hogy létezik (vagy konvergens) f improprius integrálja az $[a, +\infty)$ félegyenesen, és értéke

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\omega \to \infty} \int_a^\omega f(x)dx.$$

Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az improprius integrál divergens.

Balról végtelen félegyenesen vett improprius integrál

Hasonlóan értelmezhető egy $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ függvény improprius integrálja, mint a

$$\int_{\omega}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

integrálok határértéke, amint $\omega \to -\infty$, amennyiben ez a határérték létezik.

Jelölés

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\omega \to -\infty} \int_{\omega}^{b} f(x)dx.$$

BALRÓL VÉGTELEN FÉLEGYENESEN VETT IMPROPRIUS INTEGRÁL

Hasonlóan értelmezhető egy $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ függvény improprius integrálja, mint a

$$\int_{\omega}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

integrálok határértéke, amint $\omega \to -\infty$, amennyiben ez a határérték létezik.

JELÖLÉS

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\omega \to -\infty} \int_{\omega}^{b} f(x)dx.$$

PÉLDA

$$\int_0^\infty (1+2x)e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1+2x)e^{-x}\mathrm{d}x =$$

$$f = 1+2x, g' = e^{-x}, f' = 2, g = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b - \int_0^b 2\cdot(-e^{-x})\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b + 2\int_0^b e^{-x}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-(1+2x)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-(3+2b)e^{-b} + 3e^0\right) = 3,$$

$$\lim_{b\to\infty}(3+2b)e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{3+2b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{e^b} = 0.$$

PÉLDA

$$\int_0^\infty (1+2x)e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1+2x)e^{-x}dx =$$

$$f = 1+2x, g' = e^{-x}, f' = 2, g = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b - \int_0^b 2\cdot(-e^{-x})dx\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b + 2\int_0^b e^{-x}dx\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-(1+2x)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-(3+2b)e^{-b} + 3e^0\right) = 3,$$

$$\lim_{b\to\infty}(3+2b)e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{3+2b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{e^b} = 0.$$

PÉLDA

$$\int_0^\infty (1+2x)e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1+2x)e^{-x}\mathrm{d}x =$$

$$f = 1+2x, g' = e^{-x}, f' = 2, g = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b - \int_0^b 2\cdot(-e^{-x})\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b + 2\int_0^b e^{-x}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-(1+2x)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-(3+2b)e^{-b} + 3e^0\right) = 3,$$

$$\lim_{b\to\infty}(3+2b)e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{3+2b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{e^b} = 0.$$

PÉLDA

$$\int_0^{\infty}(1+2x)e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b}(1+2x)e^{-x}dx =$$

$$f = 1+2x, g' = e^{-x}, f' = 2, g = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b - \int_0^b 2\cdot(-e^{-x})dx\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b + 2\int_0^b e^{-x}dx\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-(1+2x)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-(3+2b)e^{-b} + 3e^0\right) = 3,$$

$$\lim_{b\to\infty}(3+2b)e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{3+2b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{e^b} = 0.$$

PÉLDA

$$\int_0^\infty (1+2x)e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1+2x)e^{-x}dx =$$

$$f = 1+2x, g' = e^{-x}, f' = 2, g = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b - \int_0^b 2\cdot(-e^{-x})dx\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b + 2\int_0^b e^{-x}dx\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-(1+2x)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-(3+2b)e^{-b} + 3e^0\right) = 3,$$

$$\lim_{b\to\infty}(3+2b)e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{3+2b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{e^b} = 0.$$

PÉLDA

$$\int_0^\infty (1+2x)e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1+2x)e^{-x}dx =$$

$$f = 1+2x, g' = e^{-x}, f' = 2, g = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b - \int_0^b 2\cdot(-e^{-x})dx\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b + 2\int_0^b e^{-x}dx\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-(1+2x)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-(3+2b)e^{-b} + 3e^0\right) = 3,$$

$$\lim_{b\to\infty}(3+2b)e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{3+2b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{e^b} = 0.$$

PÉLDA

$$\int_0^{\infty}(1+2x)e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b(1+2x)e^{-x}\mathrm{d}x =$$

$$f = 1+2x, g' = e^{-x}, f' = 2, g = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b - \int_0^b 2\cdot(-e^{-x})\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b + 2\int_0^b e^{-x}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-(1+2x)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-(3+2b)e^{-b} + 3e^0\right) = 3,$$

$$\lim_{b\to\infty}(3+2b)e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{3+2b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{e^b} = 0.$$

PÉLDA

$$\int_0^\infty (1+2x)e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1+2x)e^{-x}dx =$$

$$f = 1+2x, g' = e^{-x}, f' = 2, g = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b - \int_0^b 2\cdot(-e^{-x})dx\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b + 2\int_0^b e^{-x}dx\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-(1+2x)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-(3+2b)e^{-b} + 3e^0\right) = 3,$$

$$\lim_{b\to\infty}(3+2b)e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{3+2b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{e^b} = 0.$$

PÉLDA

$$\int_0^{\infty}(1+2x)e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1+2x)e^{-x}\mathrm{d}x =$$

$$f = 1+2x,\, g' = e^{-x},\, f' = 2,\, g = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b - \int_0^b 2\cdot(-e^{-x})\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b + 2\int_0^b e^{-x}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-(1+2x)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-(3+2b)e^{-b} + 3e^0\right) = 3,$$

$$\lim_{b\to\infty}(3+2b)e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{3+2b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{e^b} = 0.$$

PÉLDA

$$\int_0^\infty (1+2x)e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1+2x)e^{-x}\mathrm{d}x =$$

$$f = 1+2x, g' = e^{-x}, f' = 2, g = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b - \int_0^b 2\cdot(-e^{-x})\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-(1+2x)e^{-x}\right]_0^b + 2\int_0^b e^{-x}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-(1+2x)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-(3+2b)e^{-b} + 3e^0\right) = 3,$$

$$\lim_{b\to\infty}(3+2b)e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{3+2b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{e^b} = 0.$$

A teljes számegyenesen vett improprius integrál

Legyen most $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény.

Definíció

Azt mondjuk, hogy létezik f $\mathbb{R}$-en vett improprius integrálja, ha valamely (vagy ekvivalensen, bármely) $a \in \mathbb{R}$ esetén léteznek a

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

félegyeneseken vett improprius integrálok. Ekkor az $\mathbb{R}$-en vett improprius integrál értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

(ami független a $\in \mathbb{R}$ választásától).

A teljes számegyenesen vett improprius integrál

Legyen most $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény.

Definíció

Azt mondjuk, hogy létezik f $\mathbb{R}$-en vett improprius integrálja, ha valamely (vagy ekvivalensen, bármely) $a \in \mathbb{R}$ esetén léteznek a

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

félegyeneseken vett improprius integrálok. Ekkor az $\mathbb{R}$-en vett improprius integrál értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

(ami független a $a \in \mathbb{R}$ választásától).

A TELJES SZÁMEGYENESEN VETT IMPROPRIUS INTEGRÁL

Legyen most $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy létezik f $\mathbb{R}$-en vett improprius integrálja, ha valamely (vagy ekvivalensen, bármely) $a \in \mathbb{R}$ esetén léteznek a

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

félegyeneseken vett improprius integrálok. Ekkor az $\mathbb{R}$-en vett improprius integrál értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

(ami független a $\in \mathbb{R}$ választásától).

A TELJES SZÁMEGYENESEN VETT IMPROPRIUS INTEGRÁL

Legyen most $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy létezik f $\mathbb{R}$-en vett improprius integrálja, ha valamely (vagy ekvivalensen, bármely) $a \in \mathbb{R}$ esetén léteznek a

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

félegyeneseken vett improprius integrálok. Ekkor az $\mathbb{R}$-en vett improprius integrál értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

(ami független $a \in \mathbb{R}$ választásától).

A teljes számegyenesen vett improprius integrál

Legyen most $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény.

Definíció

Azt mondjuk, hogy létezik f $\mathbb{R}$-en vett improprius integrálja, ha valamely (vagy ekvivalensen, bármely) $a \in \mathbb{R}$ esetén léteznek a

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

félegyeneseken vett improprius integrálok. Ekkor az $\mathbb{R}$-en vett improprius integrál értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

(ami független a $a \in \mathbb{R}$ választásától).

BAL VÉGPONTBAN NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

Legyen most $-\infty < a < b < \infty$ és $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.

DEFINÍCIÓ

Amennyiben f nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont minden $\delta > 0$ esetén integrálható az $[a + \delta, b]$ intervallumon, valamint létezik a

$$\lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az $(a, b]$ intervallumon vett improprius integrálja, és ennek értéke

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx.$$

BAL VÉGPONTBAN NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

Legyen most $-\infty < a < b < \infty$ és $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.

DEFINÍCIÓ

Amennyiben f nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont minden $\delta > 0$ esetén integrálható az $[a+\delta, b]$ intervallumon, valamint létezik a

$$\lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az $(a, b]$ intervallumon vett improprius integrálja, és ennek értéke

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx.$$

BAL VÉGPONTBAN NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

Legyen most $-\infty < a < b < \infty$ és $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.

DEFINÍCIÓ

Amennyiben f nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont minden $\delta > 0$ esetén integrálható az $[a + \delta, b]$ intervallumon, valamint létezik a

$$\lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az $(a, b]$ intervallumon vett improprius integrálja, és ennek értéke

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx.$$

BAL VÉGPONTBAN NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

Legyen most $-\infty < a < b < \infty$ és $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.

DEFINÍCIÓ

Amennyiben f nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont minden $\delta > 0$ esetén integrálható az $[a + \delta, b]$ intervallumon, valamint létezik a

$$\lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az $(a, b]$ intervallumon vett improprius integrálja, és ennek értéke

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx.$$

BAL VÉGPONTBAN NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

Legyen most $-\infty < a < b < \infty$ és $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.

DEFINÍCIÓ

Amennyiben f nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont minden $\delta > 0$ esetén integrálható az $[a + \delta, b]$ intervallumon, valamint létezik a

$$\lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az $(a, b]$ intervallumon vett improprius integrálja, és ennek értéke

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx.$$

BAL VÉGPONTBAN NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

Legyen most $-\infty < a < b < \infty$ és $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.

DEFINÍCIÓ

Amennyiben f nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont minden $\delta > 0$ esetén integrálható az $[a + \delta, b]$ intervallumon, valamint létezik a

$$\lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az $(a, b]$ intervallumon vett improprius integrálja, és ennek értéke

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx.$$

JOBB VÉGPONTBAN NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

Hasonlóan definiálható a $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ függvény improprius integrálja:

DEFINÍCIÓ

Amennyiben f nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont minden $\eta > 0$ esetén integrálható az $[a, b-\eta]$ intervallumon, valamint létezik a $\lim_{\eta \to 0+0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx$ határérték, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az $[a, b)$ intervallumon vett improprius integrálja, és ennek értéke

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to 0+0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx.$$

JOBB VÉGPONTBAN NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

Hasonlóan definiálható a $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ függvény improprius integrálja:

DEFINÍCIÓ

Amennyiben f nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont minden $\eta > 0$ esetén integrálható az $[a, b-\eta]$ intervallumon, valamint létezik a $\lim_{\eta \to 0+0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx$ határérték, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az $[a, b)$ intervallumon vett improprius integrálja, és ennek értéke

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to 0+0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx.$$

JOBB VÉGPONTBAN NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

Hasonlóan definiálható a $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ függvény improprius integrálja:

DEFINÍCIÓ

Amennyiben f nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont minden $\eta > 0$ esetén integrálható az $[a, b-\eta]$ intervallumon, valamint létezik a $\lim_{\eta\to 0+0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx$ határérték, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az $[a, b)$ intervallumon vett improprius integrálja, és ennek értéke

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0+0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx.$$

NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx = \lim_{b\to 3-0} \int_0^b (3-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \lim_{b\to 3-0} \left[\frac{\frac{(3-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}{-1} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 3-0} \left[-2(3-x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^b = \lim_{b\to 3-0} \left(-2\sqrt{3-b} + 2\sqrt{3} \right) = 2\sqrt{3}$$

NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx = \lim_{b\to 3-0} \int_0^b (3-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \lim_{b\to 3-0} \left[\frac{\frac{(3-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}{-1} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 3-0} \left[-2(3-x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^b = \lim_{b\to 3-0} \left(-2\sqrt{3-b} + 2\sqrt{3} \right) = 2\sqrt{3}$$

Nem korlátos függvények improprius integrálja

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx = \lim_{b\to 3-0} \int_0^b (3-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \lim_{b\to 3-0} \left[\frac{\frac{(3-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}{-1} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 3-0} \left[-2(3-x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^b = \lim_{b\to 3-0} \left(-2\sqrt{3-b} + 2\sqrt{3} \right) = 2\sqrt{3}$$

NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 3-0} \int_0^b (3-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{b\to 3-0} \left[\frac{\frac{(3-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}{-1} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 3-0} \left[-2(3-x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^b = \lim_{b\to 3-0} \left(-2\sqrt{3-b}+2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

Nem korlátos függvények improprius integrálja

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx = \lim_{b\to 3-0}\int_0^b (3-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \lim_{b\to 3-0}\left[\frac{\frac{(3-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}{-1}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 3-0}\left[-2(3-x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^b = \lim_{b\to 3-0}\left(-2\sqrt{3-b}+2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

Nem korlátos függvények improprius integrálja

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx = \lim_{b\to 3-0} \int_0^b (3-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \lim_{b\to 3-0} \left[\frac{\frac{(3-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}{-1} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 3-0} \left[-2(3-x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^b = \lim_{b\to 3-0} \left(-2\sqrt{3-b} + 2\sqrt{3} \right) = 2\sqrt{3}$$

MINDKÉT VÉGPONTBAN NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

DEFINÍCIÓ

Amennyiben $f :]a, b) \to \mathbb{R}$ *nem Riemann-integrálható az* $[a, b]$ *intervallumon, viszont valamely (vagy ekvivalens módon, minden)* $c \in (a, b)$ *esetén léteznek a*

$$\int_a^c f(x)dx, \quad \int_c^b f(x)dx$$

improprius integrálok, akkor azt mondjuk hogy létezik f (a, b) *intervallumon vett improprius integrálja, és értéke*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

(amely független $c \in \mathbb{R}$ *választásától).*

Mindkét végpontban nem korlátos függvények improprius integrálja

Definíció

Amennyiben $f :]a, b) \to \mathbb{R}$ nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont valamely (vagy ekvivalens módon, minden) $c \in (a, b)$ esetén léteznek a

$$\int_a^c f(x)dx, \quad \int_c^b f(x)dx$$

improprius integrálok, akkor azt mondjuk hogy létezik f (a, b) intervallumon vett improprius integrálja, és értéke

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

(amely független $c \in \mathbb{R}$ választásától).

Mindkét végpontban nem korlátos függvények improprius integrálja

Definíció

Amennyiben $f :]a, b) \to \mathbb{R}$ nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont valamely (vagy ekvivalens módon, minden) $c \in (a, b)$ esetén léteznek a

$$\int_a^c f(x)dx, \quad \int_c^b f(x)dx$$

improprius integrálok, akkor azt mondjuk hogy létezik f (a, b) intervallumon vett improprius integrálja, és értéke

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

(amely független $c \in \mathbb{R}$ választásától).

MINDKÉT VÉGPONTBAN NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

DEFINÍCIÓ

Amennyiben $f :]a, b) \to \mathbb{R}$ *nem Riemann-integrálható az* $[a, b]$ *intervallumon, viszont valamely (vagy ekvivalens módon, minden)* $c \in (a, b)$ *esetén léteznek a*

$$\int_a^c f(x)dx, \quad \int_c^b f(x)dx$$

improprius integrálok, akkor azt mondjuk hogy létezik f *(a, b) intervallumon vett improprius integrálja, és értéke*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

(amely független $c \in \mathbb{R}$ *választásától).*

MINDKÉT VÉGPONTBAN NEM KORLÁTOS FÜGGVÉNYEK IMPROPRIUS INTEGRÁLJA

DEFINÍCIÓ

Amennyiben $f :]a, b) \to \mathbb{R}$ *nem Riemann-integrálható az* $[a, b]$ *intervallumon, viszont valamely (vagy ekvivalens módon, minden)* $c \in (a, b)$ *esetén léteznek a*

$$\int_a^c f(x)dx, \quad \int_c^b f(x)dx$$

improprius integrálok, akkor azt mondjuk hogy létezik f (a, b) *intervallumon vett improprius integrálja, és értéke*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

(amely független $c \in \mathbb{R}$ *választásától).*

ÁLTALÁNOS IMPROPRIUS INTEGRÁL

Legyenek most $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy létezik f improprius integrálja (a, b)-on, amennyiben találhatók olyan

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$$

osztópontok, amelyekre az

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$$

improprius integrál minden $1 \leq i \leq n$ esetén létezik az eddig definiált értelmek egyikében.

ÁLTALÁNOS IMPROPRIUS INTEGRÁL

Legyenek most $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy létezik f improprius integrálja (a, b)*-on, amennyiben találhatók olyan*

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$$

osztópontok, amelyekre az

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$$

improprius integrál minden $1 \leq i \leq n$ *esetén létezik az eddig definiált értelmek egyikében.*

Általános improprius integrál

Legyenek most $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy létezik f improprius integrálja (a, b)-on, amennyiben találhatók olyan

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$$

osztópontok, amelyekre az

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$$

improprius integrál minden $1 \leq i \leq n$ esetén létezik az eddig definiált értelmek egyikében.

ÁLTALÁNOS IMPROPRIUS INTEGRÁL

Legyenek most $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy létezik f improprius integrálja (a, b)*-on, amennyiben találhatók olyan*

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$$

osztópontok, amelyekre az

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$$

improprius integrál minden $1 \leq i \leq n$ *esetén létezik az eddig definiált értelmek egyikében.*

ÁLTALÁNOS IMPROPRIUS INTEGRÁL

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^2} dx +$$

$$+ \int_{1}^{2} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{(x-1)^2} dx +$$

$$+ \lim_{b \to 1-0} \int_{0}^{b} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \lim_{c \to 1+0} \int_{c}^{2} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \lim_{d \to \infty} \int_{2}^{d} \frac{1}{(x-1)^2} dx =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1} \right]_{a}^{0} + \lim_{b \to 1-0} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_{0}^{b} + \lim_{c \to 1+0} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_{c}^{2} +$$

$$+ \lim_{d \to \infty} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_{2}^{d} = \lim_{a \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{a-1} \right) + \lim_{b \to 1-0} \left(-\frac{1}{b-1} - 1 \right) +$$

$$+ \lim_{c \to 1+0} \left(-1 + \frac{1}{c-1} \right) + \lim_{d \to \infty} \left(-\frac{1}{d-1} + 1 \right) = \infty$$

Általános improprius integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{1}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x +$$

$$+ \lim_{b\to 1-0} \int_{0}^{b} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \lim_{c\to 1+0} \int_{c}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \lim_{d\to\infty} \int_{2}^{d} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{a}^{0} + \lim_{b\to 1-0} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_{0}^{b} + \lim_{c\to 1+0} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_{c}^{2} +$$

$$+ \lim_{d\to\infty} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_{2}^{d} = \lim_{a\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{a-1}\right) + \lim_{b\to 1-0} \left(-\frac{1}{b-1} - 1\right) +$$

$$+ \lim_{c\to 1+0} \left(-1 + \frac{1}{c-1}\right) + \lim_{d\to\infty} \left(-\frac{1}{d-1} + 1\right) = \infty$$

ÁLTALÁNOS IMPROPRIUS INTEGRÁL

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{1}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x +$$

$$+ \lim_{b\to 1-0} \int_{0}^{b} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \lim_{c\to 1+0} \int_{c}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \lim_{d\to\infty} \int_{2}^{d} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_a^0 + \lim_{b\to 1-0} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^b + \lim_{c\to 1+0} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_c^2 +$$

$$+ \lim_{d\to\infty} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^d = \lim_{a\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{a-1}\right) + \lim_{b\to 1-0} \left(-\frac{1}{b-1} - 1\right) +$$

$$+ \lim_{c\to 1+0} \left(-1 + \frac{1}{c-1}\right) + \lim_{d\to\infty} \left(-\frac{1}{d-1} + 1\right) = \infty$$

ÁLTALÁNOS IMPROPRIUS INTEGRÁL

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^2} dx +$$

$$+ \int_{1}^{2} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{(x-1)^2} dx +$$

$$+ \lim_{b\to 1-0} \int_{0}^{b} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \lim_{c\to 1+0} \int_{c}^{2} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \lim_{d\to\infty} \int_{2}^{d} \frac{1}{(x-1)^2} dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_a^0 + \lim_{b\to 1-0} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^b + \lim_{c\to 1+0} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_c^2 +$$

$$+ \lim_{d\to\infty} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^d = \lim_{a\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{a-1}\right) + \lim_{b\to 1-0} \left(-\frac{1}{b-1} - 1\right) +$$

$$+ \lim_{c\to 1+0} \left(-1 + \frac{1}{c-1}\right) + \lim_{d\to\infty} \left(-\frac{1}{d-1} + 1\right) = \infty$$

Általános improprius integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{1}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x +$$

$$+ \lim_{b\to1-0} \int_{0}^{b} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \lim_{c\to1+0} \int_{c}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \lim_{d\to\infty} \int_{2}^{d} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_a^0 + \lim_{b\to1-0} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^b + \lim_{c\to1+0} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_c^2 +$$

$$+ \lim_{d\to\infty} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^d = \lim_{a\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{a-1}\right) + \lim_{b\to1-0} \left(-\frac{1}{b-1} - 1\right) +$$

$$+ \lim_{c\to1+0} \left(-1 + \frac{1}{c-1}\right) + \lim_{d\to\infty} \left(-\frac{1}{d-1} + 1\right) = \infty$$

ÁLTALÁNOS IMPROPRIUS INTEGRÁL

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^2} dx +$$

$$+ \int_{1}^{2} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{(x-1)^2} dx +$$

$$+ \lim_{b \to 1-0} \int_{0}^{b} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \lim_{c \to 1+0} \int_{c}^{2} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \lim_{d \to \infty} \int_{2}^{d} \frac{1}{(x-1)^2} dx =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1} \right]_a^0 + \lim_{b \to 1-0} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^b + \lim_{c \to 1+0} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_c^2 +$$

$$+ \lim_{d \to \infty} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_2^d = \lim_{a \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{a-1} \right) + \lim_{b \to 1-0} \left(-\frac{1}{b-1} - 1 \right) +$$

$$+ \lim_{c \to 1+0} \left(-1 + \frac{1}{c-1} \right) + \lim_{d \to \infty} \left(-\frac{1}{d-1} + 1 \right) = \infty$$

IMPROPRIUS INTEGRÁL INTERVALLUMOK EGYESÍTÉSÉN

TÉTEL

Amennyiben létezik f improprius integrálja (a, b)-on, akkor bármely $c \in (a, b)$ esetén létezik f improprius integrálja (a, c)-on és (c, b)-on is, és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

BIZONYÍTÁS

Amennyiben $c = c_i$ valamely $1 \leq i \leq n$ értékre, akkor definíció szerint igaz. Különben az állítás következik a Riemann-integrál hasonló tulajdonságából.

IMPROPRIUS INTEGRÁL INTERVALLUMOK EGYESÍTÉSÉN

TÉTEL

Amennyiben létezik f improprius integrálja (a, b)-on, akkor bármely $c \in (a, b)$ esetén létezik f improprius integrálja (a, c)-on és (c, b)-on is, és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

BIZONYÍTÁS

Amennyiben $c = c_i$ valamely $1 \leq i \leq n$ értékre, akkor definíció szerint igaz. Különben az állítás következik a Riemann-integrál hasonló tulajdonságából.

IMPROPRIUS INTEGRÁL INTERVALLUMOK EGYESÍTÉSÉN

TÉTEL

Amennyiben létezik f improprius integrálja (a, b)-on, akkor bármely $c \in (a, b)$ esetén létezik f improprius integrálja (a, c)-on és (c, b)-on is, és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

BIZONYÍTÁS

Amennyiben $c = c_i$ valamely $1 \leq i \leq n$ értékre, akkor definíció szerint igaz. Különben az állítás következik a Riemann-integrál hasonló tulajdonságából.

IMPROPRIUS INTEGRÁL INTERVALLUMOK EGYESÍTÉSÉN

TÉTEL

Amennyiben létezik f improprius integrálja (a, b)-on, akkor bármely $c \in (a, b)$ esetén létezik f improprius integrálja (a, c)-on és (c, b)-on is, és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

BIZONYÍTÁS

Amennyiben $c = c_i$ valamely $1 \leq i \leq n$ értékre, akkor definíció szerint igaz. Különben az állítás következik a Riemann-integrál hasonló tulajdonságából.

INTEGRÁLKRITÉRIUM

TÉTEL

Legyen $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ *egy folytonos, monoton csökkenő nemnegatív függvény. Ekkor a*

$$\sum_{1}^{\infty} f(n)$$

numerikus sor pontosan akkor konvergens, amikor az

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

improprius integrál konvergens.

Integrálkritérium

Tétel

Legyen $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ *egy folytonos, monoton csökkenő nemnegatív függvény. Ekkor a*

$$\sum_{1}^{\infty} f(n)$$

numerikus sor pontosan akkor konvergens, amikor az

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

improprius integrál konvergens.

INTEGRÁLKRITÉRIUM

TÉTEL

Legyen $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ *egy folytonos, monoton csökkenő nemnegatív függvény. Ekkor a*

$$\sum_{1}^{\infty} f(n)$$

numerikus sor pontosan akkor konvergens, amikor az

$$\int_{1}^{\infty} f(x) dx$$

improprius integrál konvergens.

INTEGRÁLKRITÉRIUM

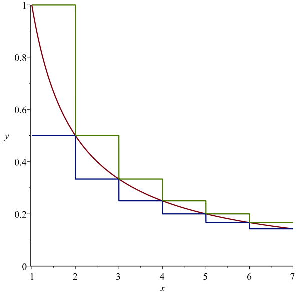

FIGURE: Az $y = f(x)$ görbe és közelítő összegei

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1).$$

INTEGRÁLKRITÉRIUM

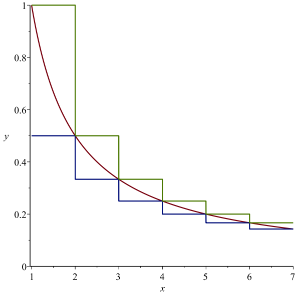

FIGURE: Az $y = f(x)$ görbe és közelítő összegei

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n) \leq \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leq f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1).$$

INTEGRÁLKRITÉRIUM

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\mathrm{d}x < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ konvergens}$$

INTEGRÁLKRITÉRIUM

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\mathrm{d}x < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ konvergens}$$

Integrálkritérium

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\mathrm{d}x < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x \text{ konvergens}$$

p-SOROK KONVERGENCIÁJA

TÉTEL

Legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

pontosan akkor konvergens, ha $p > 1$.

Bizonyítás: Az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha $p > 1$ (ld. 13. heti feladatsor, 6/d feladat)

p-SOROK KONVERGENCIÁJA

TÉTEL

Legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

pontosan akkor konvergens, ha $p > 1$.

Bizonyítás: Az $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha $p > 1$ (ld. 13. heti feladatsor, 6/d feladat)