24. ELŐADÁS: VEKTOROK A TÉRBEN

A VEKTOR FOGALMA

A mai előadásban sík és térvektorokkal foglalkozunk, de a legtöbb állítás igaz marad tetszőleges dimenziós euklideszi térben.

Vektorok: rendezett $(P_1 P_2)$ pontpárok, ahol azonosítjuk a $(P_1 P_2)$ és $(Q_1 Q_2)$ párokat, amennyiben P_1, P_2, Q_2, Q_1 ebben a sorrendben egy valamilyen irányban körüljárt parallelogramma egymás után következő csúcspontjai.

JELÖLÉS

$\overrightarrow{P_1 P_2}$.

Minden $\vec{v}$ vektorhoz és P_1 ponthoz létezik egyetlen olyan P_2 pont, hogy $\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{v}$. P_1 neve: $\vec{v}$ kezdőpontja, P_2 neve: $\vec{v}$ végpontja.

A VEKTOR FOGALMA

A mai előadásban sík és térvektorokkal foglalkozunk, de a legtöbb állítás igaz marad tetszőleges dimenziós euklideszi térben.

Vektorok: rendezett $(P_1 P_2)$ pontpárok, ahol azonosítjuk a $(P_1 P_2)$ és $(Q_1 Q_2)$ párokat, amennyiben P_1, P_2, Q_2, Q_1 ebben a sorrendben egy valamilyen irányban körüljárt parallelogramma egymás után következő csúcspontjai.

JELÖLÉS

$\overrightarrow{P_1 P_2}$.

Minden $\vec{v}$ vektorhoz és P_1 ponthoz létezik egyetlen olyan P_2 pont, hogy $\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{v}$. P_1 neve: $\vec{v}$ kezdőpontja, P_2 neve: $\vec{v}$ végpontja.

A VEKTOR FOGALMA

A mai előadásban sík és térvektorokkal foglalkozunk, de a legtöbb állítás igaz marad tetszőleges dimenziós euklideszi térben.

Vektorok: rendezett $(P_1 P_2)$ pontpárok, ahol azonosítjuk a $(P_1 P_2)$ és $(Q_1 Q_2)$ párokat, amennyiben P_1, P_2, Q_2, Q_1 ebben a sorrendben egy valamilyen irányban körüljárt parallelogramma egymás után következő csúcspontjai.

JELÖLÉS

$\overrightarrow{P_1 P_2}$.

Minden $\vec{v}$ vektorhoz és P_1 ponthoz létezik egyetlen olyan P_2 pont, hogy $\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{v}$. P_1 neve: $\vec{v}$ kezdőpontja, P_2 neve: $\vec{v}$ végpontja.

A VEKTOR FOGALMA

A mai előadásban sík és térvektorokkal foglalkozunk, de a legtöbb állítás igaz marad tetszőleges dimenziós euklideszi térben.

Vektorok: rendezett $(P_1 P_2)$ pontpárok, ahol azonosítjuk a $(P_1 P_2)$ és $(Q_1 Q_2)$ párokat, amennyiben P_1, P_2, Q_2, Q_1 ebben a sorrendben egy valamilyen irányban körüljárt parallelogramma egymás után következő csúcspontjai.

JELÖLÉS

$\overrightarrow{P_1 P_2}$.

Minden $\vec{v}$ vektorhoz és P_1 ponthoz létezik egyetlen olyan P_2 pont, hogy $\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{v}$. P_1 neve: $\vec{v}$ kezdőpontja, P_2 neve: $\vec{v}$ végpontja.

A VEKTOR FOGALMA

A mai előadásban sík és térvektorokkal foglalkozunk, de a legtöbb állítás igaz marad tetszőleges dimenziós euklideszi térben.

Vektorok: rendezett $(P_1 P_2)$ pontpárok, ahol azonosítjuk a $(P_1 P_2)$ és $(Q_1 Q_2)$ párokat, amennyiben P_1, P_2, Q_2, Q_1 ebben a sorrendben egy valamilyen irányban körüljárt parallelogramma egymás után következő csúcspontjai.

JELÖLÉS

$\overrightarrow{P_1 P_2}$.

Minden $\vec{v}$ vektorhoz és P_1 ponthoz létezik egyetlen olyan P_2 pont, hogy $\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{v}$. P_1 neve: $\vec{v}$ kezdőpontja, P_2 neve: $\vec{v}$ végpontja.

VEKTOROK IRÁNYA ÉS HOSSZA

Ha a P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, és ebben a sorrendben követik rajta egymást, akkor azt mondjuk hogy a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_2P_3}$ vektorok egyirányúak, a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_3P_2}$ pedig ellentétes irányúak. Két vektort párhuzamosnak mondunk, ha egyirányúak vagy ellentétes irányúak.

A nulla-vektor: $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$. Minden $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektorhoz létezik egymással párhuzamos e egyenesek pontosan egy családja, amelyekkel bármely $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ reprezentáció esetén a P_1, P_2 pontpárra illeszkedő egyenes párhuzamos. Ezen párhuzamos egyenesek halmazát $\vec{v}$ irányának nevezzük. A $\vec{0}$ vektornak nem értelmezett az iránya.

Egy $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ hossza a P_1P_2 szakasz hossza.

TÉTEL

Egy $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektort iránya és hossza egyértelműen meghatározza.

VEKTOROK IRÁNYA ÉS HOSSZA

Ha a P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, és ebben a sorrendben követik rajta egymást, akkor azt mondjuk hogy a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_2P_3}$ vektorok egyirányúak, a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_3P_2}$ pedig ellentétes irányúak. Két vektort párhuzamosnak mondunk, ha egyirányúak vagy ellentétes irányúak.

A nulla-vektor: $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$. Minden $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektorhoz létezik egymással párhuzamos e egyenesek pontosan egy családja, amelyekkel bármely $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ reprezentáció esetén a P_1, P_2 pontpárra illeszkedő egyenes párhuzamos. Ezen párhuzamos egyenesek halmazát $\vec{v}$ irányának nevezzük. A $\vec{0}$ vektornak nem értelmezett az iránya.

Egy $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ hossza a P_1P_2 szakasz hossza.

TÉTEL

Egy $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektort iránya és hossza egyértelműen meghatározza.

VEKTOROK IRÁNYA ÉS HOSSZA

Ha a P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, és ebben a sorrendben követik rajta egymást, akkor azt mondjuk hogy a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_2P_3}$ vektorok egyirányúak, a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_3P_2}$ pedig ellentétes irányúak. Két vektort párhuzamosnak mondunk, ha egyirányúak vagy ellentétes irányúak.

A nulla-vektor: $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$. Minden $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektorhoz létezik egymással párhuzamos e egyenesek pontosan egy családja, amelyekkel bármely $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ reprezentáció esetén a P_1, P_2 pontpárra illeszkedő egyenes párhuzamos. Ezen párhuzamos egyenesek halmazát $\vec{v}$ irányának nevezzük. A $\vec{0}$ vektornak nem értelmezett az iránya.

Egy $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ hossza a P_1P_2 szakasz hossza.

TÉTEL

Egy $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektort iránya és hossza egyértelműen meghatározza.

VEKTOROK IRÁNYA ÉS HOSSZA

Ha a P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, és ebben a sorrendben követik rajta egymást, akkor azt mondjuk hogy a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_2P_3}$ vektorok egyirányúak, a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_3P_2}$ pedig ellentétes irányúak. Két vektort párhuzamosnak mondunk, ha egyirányúak vagy ellentétes irányúak.

A nulla-vektor: $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$. Minden $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektorhoz létezik egymással párhuzamos e egyenesek pontosan egy családja, amelyekkel bármely $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ reprezentáció esetén a P_1, P_2 pontpárra illeszkedő egyenes párhuzamos. Ezen párhuzamos egyenesek halmazát $\vec{v}$ irányának nevezzük. A $\vec{0}$ vektornak nem értelmezett az iránya.

Egy $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ hossza a P_1P_2 szakasz hossza.

TÉTEL

Egy $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektort iránya és hossza egyértelműen meghatározza.

VEKTOROK IRÁNYA ÉS HOSSZA

Ha a P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, és ebben a sorrendben követik rajta egymást, akkor azt mondjuk hogy a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_2P_3}$ vektorok egyirányúak, a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_3P_2}$ pedig ellentétes irányúak. Két vektort párhuzamosnak mondunk, ha egyirányúak vagy ellentétes irányúak.

A nulla-vektor: $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$. Minden $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektorhoz létezik egymással párhuzamos e egyenesek pontosan egy családja, amelyekkel bármely $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ reprezentáció esetén a P_1, P_2 pontpárra illeszkedő egyenes párhuzamos. Ezen párhuzamos egyenesek halmazát $\vec{v}$ irányának nevezzük. A $\vec{0}$ vektornak nem értelmezett az iránya.

Egy $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ hossza a P_1P_2 szakasz hossza.

TÉTEL

Egy $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektort iránya és hossza egyértelműen meghatározza.

VEKTOROK IRÁNYA ÉS HOSSZA

Ha a P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, és ebben a sorrendben követik rajta egymást, akkor azt mondjuk hogy a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_2P_3}$ vektorok egyirányúak, a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_3P_2}$ pedig ellentétes irányúak. Két vektort párhuzamosnak mondunk, ha egyirányúak vagy ellentétes irányúak.

A nulla-vektor: $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$. Minden $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektorhoz létezik egymással párhuzamos e egyenesek pontosan egy családja, amelyekkel bármely $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ reprezentáció esetén a P_1, P_2 pontpárra illeszkedő egyenes párhuzamos. Ezen párhuzamos egyenesek halmazát $\vec{v}$ irányának nevezzük. A $\vec{0}$ vektornak nem értelmezett az iránya.

Egy $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ hossza a P_1P_2 szakasz hossza.

TÉTEL

Egy $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektort iránya és hossza egyértelműen meghatározza.

VEKTOROK IRÁNYA ÉS HOSSZA

Ha a P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, és ebben a sorrendben követik rajta egymást, akkor azt mondjuk hogy a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_2P_3}$ vektorok egyirányúak, a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_3P_2}$ pedig ellentétes irányúak. Két vektort párhuzamosnak mondunk, ha egyirányúak vagy ellentétes irányúak.

A nulla-vektor: $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$. Minden $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektorhoz létezik egymással párhuzamos e egyenesek pontosan egy családja, amelyekkel bármely $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ reprezentáció esetén a P_1, P_2 pontpárra illeszkedő egyenes párhuzamos. Ezen párhuzamos egyenesek halmazát $\vec{v}$ irányának nevezzük. A $\vec{0}$ vektornak nem értelmezett az iránya.

Egy $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ hossza a P_1P_2 szakasz hossza.

TÉTEL

Egy $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektort iránya és hossza egyértelműen meghatározza.

VEKTOROK ÖSSZEADÁSA

Legyenek $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vektorok. Ha $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ és $\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_2P_3}$, akkor $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ összege:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3}.$$

ÁLLÍTÁS

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor esetén

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

valamint

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Végül,

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

VEKTOROK ÖSSZEADÁSA

Legyenek $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vektorok. Ha $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ és $\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_2P_3}$, akkor $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ összege:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3}.$$

ÁLLÍTÁS

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor esetén

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

valamint

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Végül,

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

VEKTOROK ÖSSZEADÁSA

Legyenek $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vektorok. Ha $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ és $\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_2P_3}$, akkor $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ összege:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3}.$$

ÁLLÍTÁS

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor esetén

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

valamint

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Végül,

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

VEKTOROK ÖSSZEADÁSA

Legyenek $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vektorok. Ha $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ és $\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_2P_3}$, akkor $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ összege:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3}.$$

ÁLLÍTÁS

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor esetén

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

valamint

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Végül,

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

VEKTOROK ÖSSZEADÁSA

Legyenek $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vektorok. Ha $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ és $\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_2P_3}$, akkor $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ összege:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3}.$$

ÁLLÍTÁS

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor esetén

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

valamint

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Végül,

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

VEKTOROK ÖSSZEADÁSA

Legyenek $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vektorok. Ha $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ és $\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_2P_3}$, akkor $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ összege:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3}.$$

ÁLLÍTÁS

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor esetén

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

valamint

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Végül,

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

VEKTOROK SZORZÁSA SKALÁRRAL

Legyen $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ tetszőleges nem 0 vektor és $\alpha \in \mathbb{R}$ skalár.
Ha $\alpha = 0$ akkor legyen $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.
Tegyük fel, hogy $\alpha > 0$. Ekkor az $\alpha \cdot \vec{v}$ vektort úgy definiáljuk, hogy ha $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ egy reprezentáció, akkor legyen $\alpha \cdot \vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ az egyetlen olyan P_3 pontra, amelyre P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, ebben a sorrendben követik rajta egymást, valamint $|\alpha \cdot \vec{v}| = \alpha|\vec{v}|$.
Végül, ha $\alpha < 0$ és $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ akkor legyen $\alpha\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ arra a P_3 pontra, amelyre P_3, P_1, P_2 pontok egy egyenesre illeszkednek, ebben a sorrendben követik rajta egymást, valamint $|\alpha \cdot \vec{v}| = -\alpha|\vec{v}|$.
Speciális eset: $-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$.

VEKTOROK SZORZÁSA SKALÁRRAL

Legyen $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ tetszőleges nem 0 vektor és $\alpha \in \mathbb{R}$ skalár.
Ha $\alpha = 0$ akkor legyen $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.
Tegyük fel, hogy $\alpha > 0$. Ekkor az $\alpha \cdot \vec{v}$ vektort úgy definiáljuk, hogy ha $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ egy reprezentáció, akkor legyen $\alpha \cdot \vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ az egyetlen olyan P_3 pontra, amelyre P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, ebben a sorrendben követik rajta egymást, valamint $|\alpha \cdot \vec{v}| = \alpha|\vec{v}|$.
Végül, ha $\alpha < 0$ és $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ akkor legyen $\alpha\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ arra a P_3 pontra, amelyre P_3, P_1, P_2 pontok egy egyenesre illeszkednek, ebben a sorrendben követik rajta egymást, valamint $|\alpha \cdot \vec{v}| = -\alpha|\vec{v}|$.
Speciális eset: $-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$.

VEKTOROK SZORZÁSA SKALÁRRAL

Legyen $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ tetszőleges nem 0 vektor és $\alpha \in \mathbb{R}$ skalár.
Ha $\alpha = 0$ akkor legyen $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.
Tegyük fel, hogy $\alpha > 0$. Ekkor az $\alpha \cdot \vec{v}$ vektort úgy definiáljuk, hogy ha $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ egy reprezentáció, akkor legyen $\alpha \cdot \vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ az egyetlen olyan P_3 pontra, amelyre P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, ebben a sorrendben követik rajta egymást, valamint $|\alpha \cdot \vec{v}| = \alpha|\vec{v}|$.
Végül, ha $\alpha < 0$ és $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ akkor legyen $\alpha\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ arra a P_3 pontra, amelyre P_3, P_1, P_2 pontok egy egyenesre illeszkednek, ebben a sorrendben követik rajta egymást, valamint $|\alpha \cdot \vec{v}| = -\alpha|\vec{v}|$.
Speciális eset: $-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$.

VEKTOROK SZORZÁSA SKALÁRRAL

Legyen $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ tetszőleges nem 0 vektor és $\alpha \in \mathbb{R}$ skalár.
Ha $\alpha = 0$ akkor legyen $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.
Tegyük fel, hogy $\alpha > 0$. Ekkor az $\alpha \cdot \vec{v}$ vektort úgy definiáljuk, hogy ha $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ egy reprezentáció, akkor legyen $\alpha \cdot \vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ az egyetlen olyan P_3 pontra, amelyre P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, ebben a sorrendben követik rajta egymást, valamint $|\alpha \cdot \vec{v}| = \alpha|\vec{v}|$.
Végül, ha $\alpha < 0$ és $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ akkor legyen $\alpha\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ arra a P_3 pontra, amelyre P_3, P_1, P_2 pontok egy egyenesre illeszkednek, ebben a sorrendben követik rajta egymást, valamint $|\alpha \cdot \vec{v}| = -\alpha|\vec{v}|$.
Speciális eset: $-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$.

VEKTOROK SZORZÁSA SKALÁRRAL

Legyen $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ tetszőleges nem 0 vektor és $\alpha \in \mathbb{R}$ skalár.
Ha $\alpha = 0$ akkor legyen $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.
Tegyük fel, hogy $\alpha > 0$. Ekkor az $\alpha \cdot \vec{v}$ vektort úgy definiáljuk, hogy ha $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ egy reprezentáció, akkor legyen $\alpha \cdot \vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ az egyetlen olyan P_3 pontra, amelyre P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, ebben a sorrendben követik rajta egymást, valamint $|\alpha \cdot \vec{v}| = \alpha|\vec{v}|$.
Végül, ha $\alpha < 0$ és $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ akkor legyen $\alpha\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ arra a P_3 pontra, amelyre P_3, P_1, P_2 pontok egy egyenesre illeszkednek, ebben a sorrendben követik rajta egymást, valamint $|\alpha \cdot \vec{v}| = -\alpha|\vec{v}|$.
Speciális eset: $-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$.

MŰVELETI AZONOSSÁGOK

TÉTEL

Minden $\vec{a}, \vec{b}$ vektor és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$
$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$
$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$$
$$(\alpha\beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$$
$$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}$$
$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

MŰVELETI AZONOSSÁGOK

TÉTEL

Minden $\vec{a}, \vec{b}$ vektor és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$$

$$(\alpha\beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$$

$$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

MŰVELETI AZONOSSÁGOK

TÉTEL

Minden $\vec{a}, \vec{b}$ vektor és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$$

$$(\alpha\beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$$

$$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

MŰVELETI AZONOSSÁGOK

TÉTEL

Minden $\vec{a}, \vec{b}$ vektor és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$$

$$(\alpha\beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$$

$$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

MŰVELETI AZONOSSÁGOK

TÉTEL

Minden $\vec{a}, \vec{b}$ vektor és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$$

$$(\alpha\beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$$

$$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

MŰVELETI AZONOSSÁGOK

TÉTEL

Minden $\vec{a}, \vec{b}$ vektor és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$
$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$
$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$$
$$(\alpha\beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$$
$$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}$$
$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

MŰVELETI AZONOSSÁGOK

TÉTEL

Minden $\vec{a}, \vec{b}$ vektor és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$
$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$
$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$$
$$(\alpha\beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$$
$$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}$$
$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

VEKTORTÉR

DEFINÍCIÓ

Egy valós vektortér egy V halmaz, ellátva egy $\vec{0} \in V$ elemmel, valamint a következő műveletekkel:

- $+ : V \times V \to V$
- *minden* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén* $\alpha\cdot : V \to V$,

amelyekre teljesülnek a fent felsorolt tulajdonságok.

VEKTORTÉR

DEFINÍCIÓ

Egy valós vektortér egy V halmaz, ellátva egy $\vec{0} \in V$ elemmel, valamint a következő műveletekkel:

- $+ : V \times V \to V$
- *minden* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén* $\alpha\cdot : V \to V$,

amelyekre teljesülnek a fent felsorolt tulajdonságok.

VEKTORTÉR

DEFINÍCIÓ

Egy valós vektortér egy V halmaz, ellátva egy $\vec{0} \in V$ elemmel, valamint a következő műveletekkel:

- $+ : V \times V \to V$
- *minden* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén* $\alpha\cdot : V \to V$,

amelyekre teljesülnek a fent felsorolt tulajdonságok.

VEKTORTÉR

DEFINÍCIÓ

Egy valós vektortér egy V halmaz, ellátva egy $\vec{0} \in V$ elemmel, valamint a következő műveletekkel:

- $+ : V \times V \to V$
- *minden* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén* $\alpha\cdot : V \to V$,

amelyekre teljesülnek a fent felsorolt tulajdonságok.

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

DEFINÍCIÓ

A $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokra vett lineáris kombinációja a

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$$

vektor. A lineáris kombináció triviális, ha $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, ellenkező esetben pedig nem-triviális.
Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok lineárisan függők, ha létezik olyan nem-triviális lineáris kombinációjuk, amely egyenlő $\vec{0}$-val. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

MEGJEGYZÉS

Bármely vektorok triviális lineáris kombinációja a $\vec{0}$.

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

DEFINÍCIÓ

A $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokra vett lineáris kombinációja a

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$$

vektor. A lineáris kombináció triviális, ha $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, ellenkező esetben pedig nem-triviális.

Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok lineárisan függők, ha létezik olyan nem-triviális lineáris kombinációjuk, amely egyenlő $\vec{0}$-val. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

MEGJEGYZÉS

Bármely vektorok triviális lineáris kombinációja a $\vec{0}$.

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

DEFINÍCIÓ

A $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokra vett lineáris kombinációja a

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$$

vektor. A lineáris kombináció triviális, ha $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, ellenkező esetben pedig nem-triviális.
Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok lineárisan függők, ha létezik olyan nem-triviális lineáris kombinációjuk, amely egyenlő $\vec{0}$-val. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

MEGJEGYZÉS

Bármely vektorok triviális lineáris kombinációja a $\vec{0}$.

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

DEFINÍCIÓ

A $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokra vett lineáris kombinációja a

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$$

vektor. A lineáris kombináció triviális, ha $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, ellenkező esetben pedig nem-triviális.
Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok lineárisan függők, ha létezik olyan nem-triviális lineáris kombinációjuk, amely egyenlő $\vec{0}$-val. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

MEGJEGYZÉS

Bármely vektorok triviális lineáris kombinációja a $\vec{0}$.

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

DEFINÍCIÓ

A $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokra vett lineáris kombinációja a

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$$

vektor. A lineáris kombináció triviális, ha $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, ellenkező esetben pedig nem-triviális.
Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok lineárisan függők, ha létezik olyan nem-triviális lineáris kombinációjuk, amely egyenlő $\vec{0}$-val. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

MEGJEGYZÉS

Bármely vektorok triviális lineáris kombinációja a $\vec{0}$.

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

FELADAT

Döntsük el, hogy az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ *vektorok lineárisan függetlenek vagy sem.*

Megoldás:

Oldjuk meg az $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ egyenletet.

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha + 3\beta - \gamma \\ 2\alpha - 4\gamma \\ -2\alpha - \beta + 5\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

FELADAT

Döntsük el, hogy az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ *vektorok lineárisan függetlenek vagy sem.*

Megoldás:
Oldjuk meg az $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ egyenletet.

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha + 3\beta - \gamma \\ 2\alpha - 4\gamma \\ -2\alpha - \beta + 5\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

FELADAT

Döntsük el, hogy az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ *vektorok lineárisan függetlenek vagy sem.*

Megoldás:
Oldjuk meg az $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ egyenletet.

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha + 3\beta - \gamma \\ 2\alpha - 4\gamma \\ -2\alpha - \beta + 5\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

FELADAT

Döntsük el, hogy az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ *vektorok lineárisan függetlenek vagy sem.*

Megoldás:
Oldjuk meg az $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ egyenletet.

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha + 3\beta - \gamma \\ 2\alpha - 4\gamma \\ -2\alpha - \beta + 5\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

$$\left.\begin{array}{rcl} -\alpha + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ 2\alpha - 4\gamma & = & 0 \\ -2\alpha - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = 2\gamma$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -2\gamma + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ -4\gamma - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 3\beta - 3\gamma & = & 0 \\ -\beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \beta = \gamma \Longrightarrow$$

Végtelen sok megoldás van, mert

$$2\gamma\vec{a} + \gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

minden $\gamma \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárisan összefüggőek.

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

$$\left.\begin{array}{rcl} -\alpha + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ 2\alpha - 4\gamma & = & 0 \\ -2\alpha - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = 2\gamma$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -2\gamma + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ -4\gamma - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 3\beta - 3\gamma & = & 0 \\ -\beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \beta = \gamma \Longrightarrow$$

Végtelen sok megoldás van, mert

$$2\gamma\vec{a} + \gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

minden $\gamma \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárisan összefüggőek.

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

$$\left.\begin{array}{rcl} -\alpha + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ 2\alpha - 4\gamma & = & 0 \\ -2\alpha - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = 2\gamma$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -2\gamma + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ -4\gamma - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 3\beta - 3\gamma & = & 0 \\ -\beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \beta = \gamma \Longrightarrow$$

Végtelen sok megoldás van, mert

$$2\gamma\vec{a} + \gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

minden $\gamma \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárisan összefüggőek.

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

$$\left.\begin{array}{rcl} -\alpha + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ 2\alpha - 4\gamma & = & 0 \\ -2\alpha - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = 2\gamma$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -2\gamma + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ -4\gamma - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 3\beta - 3\gamma & = & 0 \\ -\beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \beta = \gamma \Longrightarrow$$

Végtelen sok megoldás van, mert

$$2\gamma\vec{a} + \gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

minden $\gamma \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárisan összefüggőek.

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

$$\left.\begin{array}{rcl} -\alpha + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ 2\alpha - 4\gamma & = & 0 \\ -2\alpha - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = 2\gamma$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -2\gamma + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ -4\gamma - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 3\beta - 3\gamma & = & 0 \\ -\beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \beta = \gamma \Longrightarrow$$

Végtelen sok megoldás van, mert

$$2\gamma\vec{a} + \gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

minden $\gamma \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárisan összefüggőek.

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

$$\left.\begin{array}{rcl} -\alpha + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ 2\alpha - 4\gamma & = & 0 \\ -2\alpha - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = 2\gamma$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -2\gamma + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ -4\gamma - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 3\beta - 3\gamma & = & 0 \\ -\beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \beta = \gamma \Longrightarrow$$

Végtelen sok megoldás van, mert

$$2\gamma\vec{a} + \gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

minden $\gamma \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárisan összefüggőek.

VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE

$$\left.\begin{array}{rcl} -\alpha + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ 2\alpha - 4\gamma & = & 0 \\ -2\alpha - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = 2\gamma$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -2\gamma + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ -4\gamma - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 3\beta - 3\gamma & = & 0 \\ -\beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \beta = \gamma \Longrightarrow$$

Végtelen sok megoldás van, mert

$$2\gamma\vec{a} + \gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

minden $\gamma \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárisan összefüggőek.

VEKTORTÉR GENERÁTORRENDSZERE, BÁZISA

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják, ha bármely $\vec{v} \in V$ esetén létezik $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$-nek olyan lineáris kombinációja, amely megegyezik $\vec{v}$-vel.

Azt mondjuk, hogy $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok V egy bázisát alkotják, ha lineárisan függetlenek és generátor-rendszert alkotnak.

Amennyiben V-nek létezik véges elemszámú bázisa, akkor egy bázisának (egyértelműen meghatározott) elemszámát V dimenziójának nevezzük.

TÉTEL

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ akkor és csak akkor alkot bázist, ha minden $\vec{v} \in V$ előáll egyértelműen $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ lineáris kombinációjaként.

VEKTORTÉR GENERÁTORRENDSZERE, BÁZISA

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják, ha bármely $\vec{v} \in V$ esetén létezik $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$-nek olyan lineáris kombinációja, amely megegyezik $\vec{v}$-vel.

Azt mondjuk, hogy $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok V egy bázisát alkotják, ha lineárisan függetlenek és generátor-rendszert alkotnak.

Amennyiben V-nek létezik véges elemszámú bázisa, akkor egy bázisának (egyértelműen meghatározott) elemszámát V dimenziójának nevezzük.

TÉTEL

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ akkor és csak akkor alkot bázist, ha minden $\vec{v} \in V$ előáll egyértelműen $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ lineáris kombinációjaként.

VEKTORTÉR GENERÁTORRENDSZERE, BÁZISA

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják, ha bármely $\vec{v} \in V$ esetén létezik $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$-nek olyan lineáris kombinációja, amely megegyezik $\vec{v}$-vel.

Azt mondjuk, hogy $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok V egy bázisát alkotják, ha lineárisan függetlenek és generátor-rendszert alkotnak. Amennyiben V-nek létezik véges elemszámú bázisa, akkor egy bázisának (egyértelműen meghatározott) elemszámát V dimenziójának nevezzük.

TÉTEL

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ akkor és csak akkor alkot bázist, ha minden $\vec{v} \in V$ előáll egyértelműen $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ lineáris kombinációjaként.

VEKTORTÉR GENERÁTORRENDSZERE, BÁZISA

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják, ha bármely $\vec{v} \in V$ esetén létezik $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$-nek olyan lineáris kombinációja, amely megegyezik $\vec{v}$-vel.

Azt mondjuk, hogy $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok V egy bázisát alkotják, ha lineárisan függetlenek és generátor-rendszert alkotnak.

Amennyiben V-nek létezik véges elemszámú bázisa, akkor egy bázisának (egyértelműen meghatározott) elemszámát V dimenziójának nevezzük.

TÉTEL

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ akkor és csak akkor alkot bázist, ha minden $\vec{v} \in V$ előáll egyértelműen $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ lineáris kombinációjaként.

VEKTORTÉR GENERÁTORRENDSZERE, BÁZISA

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják, ha bármely $\vec{v} \in V$ esetén létezik $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$-nek olyan lineáris kombinációja, amely megegyezik $\vec{v}$-vel.
Azt mondjuk, hogy $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok V egy bázisát alkotják, ha lineárisan függetlenek és generátor-rendszert alkotnak.
Amennyiben V-nek létezik véges elemszámú bázisa, akkor egy bázisának (egyértelműen meghatározott) elemszámát V dimenziójának nevezzük.

TÉTEL

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ akkor és csak akkor alkot bázist, ha minden $\vec{v} \in V$ előáll egyértelműen $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ lineáris kombinációjaként.

VEKTORTÉR GENERÁTORRENDSZERE, BÁZISA

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják, ha bármely $\vec{v} \in V$ esetén létezik $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$-nek olyan lineáris kombinációja, amely megegyezik $\vec{v}$-vel.
Azt mondjuk, hogy $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok V egy bázisát alkotják, ha lineárisan függetlenek és generátor-rendszert alkotnak.
Amennyiben V-nek létezik véges elemszámú bázisa, akkor egy bázisának (egyértelműen meghatározott) elemszámát V dimenziójának nevezzük.

TÉTEL

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ akkor és csak akkor alkot bázist, ha minden $\vec{v} \in V$ előáll egyértelműen $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ lineáris kombinációjaként.

VEKTORTÉR GENERÁTORRENDSZERE, BÁZISA

DEFINÍCIÓ

Vektorok egy halmaza kollineáris, ha van olyan egyenes amelyik mindegyik elemét tartalmazza, és komplanáris, ha van olyan sík, amelyik mindegyik elemét tartalmazza.

TÉTEL

A sík ($\mathbb{R}^2$) dimenziója 2, és a bázisai a nem kollineáris vektorokat tartalmazó vektorpárok, a tér ($\mathbb{R}^3$) dimenziója 3, és a bázisai a nem komplanáris vektorokat tartalmazó vektorhármasok.

VEKTORTÉR GENERÁTORRENDSZERE, BÁZISA

DEFINÍCIÓ

Vektorok egy halmaza kollineáris, ha van olyan egyenes amelyik mindegyik elemét tartalmazza, és komplanáris, ha van olyan sík, amelyik mindegyik elemét tartalmazza.

TÉTEL

A sík ($\mathbb{R}^2$) dimenziója 2, és a bázisai a nem kollineáris vektorokat tartalmazó vektorpárok, a tér ($\mathbb{R}^3$) dimenziója 3, és a bázisai a nem komplanáris vektorokat tartalmazó vektorhármasok.

VEKTORTÉR GENERÁTORRENDSZERE, BÁZISA

DEFINÍCIÓ

Vektorok egy halmaza kollineáris, ha van olyan egyenes amelyik mindegyik elemét tartalmazza, és komplanáris, ha van olyan sík, amelyik mindegyik elemét tartalmazza.

TÉTEL

A sík ($\mathbb{R}^2$) dimenziója 2, és a bázisai a nem kollineáris vektorokat tartalmazó vektorpárok, a tér ($\mathbb{R}^3$) dimenziója 3, és a bázisai a nem komplanáris vektorokat tartalmazó vektorhármasok.

VEKTORTÉR GENERÁTORRENDSZERE, BÁZISA

DEFINÍCIÓ

Vektorok egy halmaza kollineáris, ha van olyan egyenes amelyik mindegyik elemét tartalmazza, és komplanáris, ha van olyan sík, amelyik mindegyik elemét tartalmazza.

TÉTEL

A sík ($\mathbb{R}^2$) dimenziója 2, és a bázisai a nem kollineáris vektorokat tartalmazó vektorpárok, a tér ($\mathbb{R}^3$) dimenziója 3, és a bázisai a nem komplanáris vektorokat tartalmazó vektorhármasok.

VEKTORTÉR GENERÁTORRENDSZERE, BÁZISA

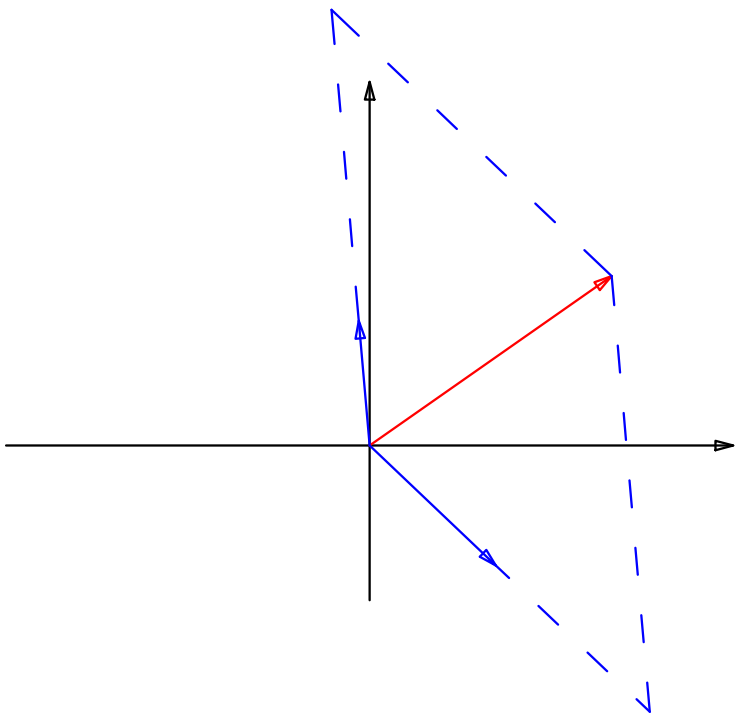

FIGURE: Egy vektor felbontása a síkon adott vektorokkal párhuzamos összetevőkre

BÁZISRA VONATKOZÓ KOORDINÁTÁK

Legyen V egy vektortér és $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ egy bázisa.

DEFINÍCIÓ

Egy tetszőleges $\vec{v} \in V$ $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$-re vonatkozó koordinátái az egyetlen olyan $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, amelyre

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \cdots + v_n\vec{e}_n.$$

TÉTEL

Legyenek a $\vec{v}, \vec{w} \in V$ koordinátái az $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ bázisra nézve rendre $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $\vec{v} + \vec{w}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve: $(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$. Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha \cdot \vec{v}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve: $(\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)$.

BÁZISRA VONATKOZÓ KOORDINÁTÁK

Legyen V egy vektortér és $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ egy bázisa.

DEFINÍCIÓ

Egy tetszőleges $\vec{v} \in V$ $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$-re vonatkozó koordinátái az egyetlen olyan $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, amelyre

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \cdots + v_n\vec{e}_n.$$

TÉTEL

Legyenek a $\vec{v}, \vec{w} \in V$ koordinátái az $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ bázisra nézve rendre $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $\vec{v} + \vec{w}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve: $(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$. Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha \cdot \vec{v}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve: $(\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)$.

BÁZISRA VONATKOZÓ KOORDINÁTÁK

Legyen V egy vektortér és $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ egy bázisa.

DEFINÍCIÓ

Egy tetszőleges $\vec{v} \in V$ $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$-re vonatkozó koordinátái az egyetlen olyan $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, amelyre

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \cdots + v_n\vec{e}_n.$$

TÉTEL

Legyenek a $\vec{v}, \vec{w} \in V$ koordinátái az $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ bázisra nézve rendre $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $\vec{v} + \vec{w}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve: $(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$. Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha \cdot \vec{v}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve: $(\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)$.

BÁZISRA VONATKOZÓ KOORDINÁTÁK

Legyen V egy vektortér és $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ egy bázisa.

DEFINÍCIÓ

Egy tetszőleges $\vec{v} \in V$ $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$-re vonatkozó koordinátái az egyetlen olyan $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, amelyre

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \cdots + v_n\vec{e}_n.$$

TÉTEL

Legyenek a $\vec{v}, \vec{w} \in V$ koordinátái az $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ bázisra nézve rendre $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $\vec{v} + \vec{w}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve: $(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$. Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha \cdot \vec{v}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve: $(\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)$.

BÁZISRA VONATKOZÓ KOORDINÁTÁK

Legyen V egy vektortér és $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ egy bázisa.

DEFINÍCIÓ

Egy tetszőleges $\vec{v} \in V$ $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$-re vonatkozó koordinátái az egyetlen olyan $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, amelyre

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \cdots + v_n\vec{e}_n.$$

TÉTEL

Legyenek a $\vec{v}, \vec{w} \in V$ koordinátái az $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ bázisra nézve rendre $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $\vec{v} + \vec{w}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve: $(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$. Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha \cdot \vec{v}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve: $(\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)$.

BÁZISRA VONATKOZÓ KOORDINÁTÁK

Legyen V egy vektortér és $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ egy bázisa.

DEFINÍCIÓ

Egy tetszőleges $\vec{v} \in V$ $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$-re vonatkozó koordinátái az egyetlen olyan $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, amelyre

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \cdots + v_n\vec{e}_n.$$

TÉTEL

Legyenek a $\vec{v}, \vec{w} \in V$ koordinátái az $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ bázisra nézve rendre $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $\vec{v} + \vec{w}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve: $(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$. Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha \cdot \vec{v}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve: $(\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)$.

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Bontsuk fel $\vec{v}$*-t az* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *vektorokkal párhuzamos összetevőkre.*

Az a kérdés, hogy hogyan lehet felírni $\vec{v}$-t $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ alakban.

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha + \beta + 3\gamma \\ 2\alpha + \beta + \gamma \\ -\beta + 2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Bontsuk fel $\vec{v}$*-t az* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *vektorokkal párhuzamos összetevőkre.*

Az a kérdés, hogy hogyan lehet felírni $\vec{v}$-t $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ alakban.

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha + \beta + 3\gamma \\ 2\alpha + \beta + \gamma \\ -\beta + 2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Bontsuk fel $\vec{v}$*-t az* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *vektorokkal párhuzamos összetevőkre.*

Az a kérdés, hogy hogyan lehet felírni $\vec{v}$-t $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ alakban.

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha + \beta + 3\gamma \\ 2\alpha + \beta + \gamma \\ -\beta + 2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Bontsuk fel $\vec{v}$*-t az* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *vektorokkal párhuzamos összetevőkre.*

Az a kérdés, hogy hogyan lehet felírni $\vec{v}$-t $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ alakban.

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha + \beta + 3\gamma \\ 2\alpha + \beta + \gamma \\ -\beta + 2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Bontsuk fel $\vec{v}$*-t az* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *vektorokkal párhuzamos összetevőkre.*

Az a kérdés, hogy hogyan lehet felírni $\vec{v}$-t $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ alakban.

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha + \beta + 3\gamma \\ 2\alpha + \beta + \gamma \\ -\beta + 2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+\beta+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+\beta+\gamma & = & 2 \\ -\beta+2\gamma & = & 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 2\gamma - 5 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+(2\gamma-5)+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+(2\gamma-5)+\gamma & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} -\alpha+5\gamma & = & 3 \\ 2\alpha+3\gamma & = & 7 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \alpha = 5\gamma - 3 \Longrightarrow 2(5\gamma-3)+3\gamma = 7 \Longrightarrow 13\gamma = 13 \Longrightarrow$$

$$\gamma = 1 \Longrightarrow \beta = -3, \alpha = 2, \text{ azaz}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+\beta+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+\beta+\gamma & = & 2 \\ -\beta+2\gamma & = & 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 2\gamma - 5 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+(2\gamma-5)+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+(2\gamma-5)+\gamma & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} -\alpha+5\gamma & = & 3 \\ 2\alpha+3\gamma & = & 7 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \alpha = 5\gamma - 3 \Longrightarrow 2(5\gamma-3)+3\gamma = 7 \Longrightarrow 13\gamma = 13 \Longrightarrow$$

$$\gamma = 1 \Longrightarrow \beta = -3, \alpha = 2, \text{ azaz}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+\beta+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+\beta+\gamma & = & 2 \\ -\beta+2\gamma & = & 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 2\gamma - 5 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+(2\gamma-5)+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+(2\gamma-5)+\gamma & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} -\alpha+5\gamma & = & 3 \\ 2\alpha+3\gamma & = & 7 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \alpha = 5\gamma - 3 \Longrightarrow 2(5\gamma-3)+3\gamma = 7 \Longrightarrow 13\gamma = 13 \Longrightarrow$$

$$\gamma = 1 \Longrightarrow \beta = -3, \alpha = 2, \text{ azaz}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+\beta+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+\beta+\gamma & = & 2 \\ -\beta+2\gamma & = & 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 2\gamma - 5 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+(2\gamma-5)+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+(2\gamma-5)+\gamma & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} -\alpha+5\gamma & = & 3 \\ 2\alpha+3\gamma & = & 7 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \alpha = 5\gamma - 3 \Longrightarrow 2(5\gamma-3)+3\gamma = 7 \Longrightarrow 13\gamma = 13 \Longrightarrow$$

$$\gamma = 1 \Longrightarrow \beta = -3, \alpha = 2, \text{ azaz}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+\beta+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+\beta+\gamma & = & 2 \\ -\beta+2\gamma & = & 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 2\gamma - 5 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+(2\gamma-5)+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+(2\gamma-5)+\gamma & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} -\alpha+5\gamma & = & 3 \\ 2\alpha+3\gamma & = & 7 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \alpha = 5\gamma - 3 \Longrightarrow 2(5\gamma-3)+3\gamma = 7 \Longrightarrow 13\gamma = 13 \Longrightarrow$$

$$\gamma = 1 \Longrightarrow \beta = -3, \alpha = 2, \text{ azaz}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+\beta+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+\beta+\gamma & = & 2 \\ -\beta+2\gamma & = & 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 2\gamma - 5 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+(2\gamma-5)+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+(2\gamma-5)+\gamma & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} -\alpha+5\gamma & = & 3 \\ 2\alpha+3\gamma & = & 7 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \alpha = 5\gamma - 3 \Longrightarrow 2(5\gamma-3)+3\gamma = 7 \Longrightarrow 13\gamma = 13 \Longrightarrow$$

$$\gamma = 1 \Longrightarrow \beta = -3, \alpha = 2, \text{ azaz}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+\beta+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+\beta+\gamma & = & 2 \\ -\beta+2\gamma & = & 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 2\gamma - 5 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+(2\gamma-5)+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+(2\gamma-5)+\gamma & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} -\alpha+5\gamma & = & 3 \\ 2\alpha+3\gamma & = & 7 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \alpha = 5\gamma - 3 \Longrightarrow 2(5\gamma-3)+3\gamma = 7 \Longrightarrow 13\gamma = 13 \Longrightarrow$$

$$\gamma = 1 \Longrightarrow \beta = -3, \alpha = 2, \text{ azaz}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+\beta+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+\beta+\gamma & = & 2 \\ -\beta+2\gamma & = & 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 2\gamma - 5 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+(2\gamma-5)+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+(2\gamma-5)+\gamma & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} -\alpha+5\gamma & = & 3 \\ 2\alpha+3\gamma & = & 7 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \alpha = 5\gamma - 3 \Longrightarrow 2(5\gamma-3)+3\gamma = 7 \Longrightarrow 13\gamma = 13 \Longrightarrow$$

$$\gamma = 1 \Longrightarrow \beta = -3, \alpha = 2, \text{ azaz}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+\beta+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+\beta+\gamma & = & 2 \\ -\beta+2\gamma & = & 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 2\gamma - 5 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+(2\gamma-5)+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+(2\gamma-5)+\gamma & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} -\alpha+5\gamma & = & 3 \\ 2\alpha+3\gamma & = & 7 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \alpha = 5\gamma - 3 \Longrightarrow 2(5\gamma-3)+3\gamma = 7 \Longrightarrow 13\gamma = 13 \Longrightarrow$$

$$\gamma = 1 \Longrightarrow \beta = -3, \alpha = 2, \text{ azaz}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+\beta+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+\beta+\gamma & = & 2 \\ -\beta+2\gamma & = & 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 2\gamma - 5 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+(2\gamma-5)+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+(2\gamma-5)+\gamma & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} -\alpha+5\gamma & = & 3 \\ 2\alpha+3\gamma & = & 7 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \alpha = 5\gamma - 3 \Longrightarrow 2(5\gamma-3)+3\gamma = 7 \Longrightarrow 13\gamma = 13 \Longrightarrow$$

$$\gamma = 1 \Longrightarrow \beta = -3, \alpha = 2, \text{ azaz}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VEKTOR FELBONTÁSA PÁRHUZAMOS ÖSSZETEVŐKRE

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+\beta+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+\beta+\gamma & = & 2 \\ -\beta+2\gamma & = & 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 2\gamma - 5 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\alpha+(2\gamma-5)+3\gamma & = & -2 \\ 2\alpha+(2\gamma-5)+\gamma & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} -\alpha+5\gamma & = & 3 \\ 2\alpha+3\gamma & = & 7 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \alpha = 5\gamma - 3 \Longrightarrow 2(5\gamma-3)+3\gamma = 7 \Longrightarrow 13\gamma = 13 \Longrightarrow$$

$$\gamma = 1 \Longrightarrow \beta = -3, \alpha = 2, \text{ azaz}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

BÁZISRA VONATKOZÓ KOORDINÁTÁK

Szokásos bázis

$\mathbb{R}^2$-ben: $\vec{i}, \vec{j}$ egységnyi hosszú, merőleges vektorok, ahol $\vec{i}$-t $\vec{j}$-be pozitív forgásirányú 90°-os forgatás viszi át.

$\mathbb{R}^3$-ben: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ egységnyi hosszú, páronként merőleges vektorok, melyek ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.

Jobbsodrású rendszer pongyolán: az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorokat a jobb kezünkkel fel tudjuk mutatni úgy, hogy a vektorokat rendre a hüvelykujjunkkal, a mutatóujjunkkal és a középső ujjunkkal reprezentáljuk, de egyiket sem törjük ki.

BÁZISRA VONATKOZÓ KOORDINÁTÁK

Szokásos bázis

$\mathbb{R}^2$-ben: $\vec{i}, \vec{j}$ egységnyi hosszú, merőleges vektorok, ahol $\vec{i}$-t $\vec{j}$-be pozitív forgásirányú 90°-os forgatás viszi át.

$\mathbb{R}^3$-ben: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ egységnyi hosszú, páronként merőleges vektorok, melyek ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.

Jobbsodrású rendszer pongyolán: az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorokat a jobb kezünkkel fel tudjuk mutatni úgy, hogy a vektorokat rendre a hüvelykujjunkkal, a mutatóujjunkkal és a középső ujjunkkal reprezentáljuk, de egyiket sem törjük ki.

BÁZISRA VONATKOZÓ KOORDINÁTÁK

Szokásos bázis

$\mathbb{R}^2$-ben: $\vec{i}, \vec{j}$ egységnyi hosszú, merőleges vektorok, ahol $\vec{i}$-t $\vec{j}$-be pozitív forgásirányú 90°-os forgatás viszi át.

$\mathbb{R}^3$-ben: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ egységnyi hosszú, páronként merőleges vektorok, melyek ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.

Jobbsodrású rendszer pongyolán: az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorokat a jobb kezünkkel fel tudjuk mutatni úgy, hogy a vektorokat rendre a hüvelykujjunkkal, a mutatóujjunkkal és a középső ujjunkkal reprezentáljuk, de egyiket sem törjük ki.

A DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

Az euklideszi sík 2-dimenziós, tehát egy $\vec{i}, \vec{j}$ bázisára vonatkozó koordináták segítségével azonosíthatjuk $\mathbb{R}^2$-tel, azaz a valós számpárok halmazával. Legyenek (x, y) egy P pont koordinátái $\vec{i}, \vec{j}$-re nézve. Ekkor x neve: P abszcisszája, y neve: P ordinátája. Az $O(0, 0)$ pont: a koordináta-rendszer origója. Legyen $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ két pont. Ekkor P_1 és P_2 egymástól mért távolsága (Pithagorasz):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

A DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

Az euklideszi sík 2-dimenziós, tehát egy $\vec{i}, \vec{j}$ bázisára vonatkozó koordináták segítségével azonosíthatjuk $\mathbb{R}^2$-tel, azaz a valós számpárok halmazával. Legyenek (x, y) egy P pont koordinátái $\vec{i}, \vec{j}$-re nézve. Ekkor x neve: P abszcisszája, y neve: P ordinátája. Az $O(0, 0)$ pont: a koordináta-rendszer origója. Legyen $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ két pont. Ekkor P_1 és P_2 egymástól mért távolsága (Pithagorasz):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

A DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

Az euklideszi sík 2-dimenziós, tehát egy $\vec{i}, \vec{j}$ bázisára vonatkozó koordináták segítségével azonosíthatjuk $\mathbb{R}^2$-tel, azaz a valós számpárok halmazával. Legyenek (x, y) egy P pont koordinátái $\vec{i}, \vec{j}$-re nézve. Ekkor x neve: P abszcisszája, y neve: P ordinátája. Az $O(0, 0)$ pont: a koordináta-rendszer origója. Legyen $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ két pont. Ekkor P_1 és P_2 egymástól mért távolsága (Pithagorasz):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

A DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

Az euklideszi sík 2-dimenziós, tehát egy $\vec{i}, \vec{j}$ bázisára vonatkozó koordináták segítségével azonosíthatjuk $\mathbb{R}^2$-tel, azaz a valós számpárok halmazával. Legyenek (x, y) egy P pont koordinátái $\vec{i}, \vec{j}$-re nézve. Ekkor x neve: P abszcisszája, y neve: P ordinátája. Az $O(0, 0)$ pont: a koordináta-rendszer origója.

Legyen $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ két pont. Ekkor P_1 és P_2 egymástól mért távolsága (Pithagorasz):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

A DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

Az euklideszi sík 2-dimenziós, tehát egy $\vec{i}, \vec{j}$ bázisára vonatkozó koordináták segítségével azonosíthatjuk $\mathbb{R}^2$-tel, azaz a valós számpárok halmazával. Legyenek (x, y) egy P pont koordinátái $\vec{i}, \vec{j}$-re nézve. Ekkor x neve: P abszcisszája, y neve: P ordinátája. Az $O(0, 0)$ pont: a koordináta-rendszer origója. Legyen $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ két pont. Ekkor P_1 és P_2 egymástól mért távolsága (Pithagorasz):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

A DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

Az euklideszi sík 2-dimenziós, tehát egy $\vec{i}, \vec{j}$ bázisára vonatkozó koordináták segítségével azonosíthatjuk $\mathbb{R}^2$-tel, azaz a valós számpárok halmazával. Legyenek (x, y) egy P pont koordinátái $\vec{i}, \vec{j}$-re nézve. Ekkor x neve: P abszcisszája, y neve: P ordinátája. Az $O(0, 0)$ pont: a koordináta-rendszer origója. Legyen $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ két pont. Ekkor P_1 és P_2 egymástól mért távolsága (Pithagorasz):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

A DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

Az euklideszi tér 3-dimenziós, tehát egy $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bázisára vonatkozó koordináták segítségével azonosíthatjuk $\mathbb{R}^3$-bel, azaz a valós számhármasok halmazával. Legyenek (x, y, z) egy P pont koordinátái $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$-ra nézve. Az $O(0, 0, 0)$ pont: a koordináta-rendszer origója.

Legyen $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ két pont. Ekkor P_1 és P_2 egymástól mért távolsága (Pithagorasz):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

A DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

Az euklideszi tér 3-dimenziós, tehát egy $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bázisára vonatkozó koordináták segítségével azonosíthatjuk $\mathbb{R}^3$-bel, azaz a valós számhármasok halmazával. Legyenek (x, y, z) egy P pont koordinátái $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$-ra nézve. Az $O(0, 0, 0)$ pont: a koordináta-rendszer origója.

Legyen $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ két pont. Ekkor P_1 és P_2 egymástól mért távolsága (Pithagorasz):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

A DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

Az euklideszi tér 3-dimenziós, tehát egy $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bázisára vonatkozó koordináták segítségével azonosíthatjuk $\mathbb{R}^3$-bel, azaz a valós számhármasok halmazával. Legyenek (x, y, z) egy P pont koordinátái $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$-ra nézve. Az $O(0, 0, 0)$ pont: a koordináta-rendszer origója.

Legyen $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ két pont. Ekkor P_1 és P_2 egymástól mért távolsága (Pithagorasz):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

A DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

Az euklideszi tér 3-dimenziós, tehát egy $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bázisára vonatkozó koordináták segítségével azonosíthatjuk $\mathbb{R}^3$-bel, azaz a valós számhármasok halmazával. Legyenek (x, y, z) egy P pont koordinátái $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$-ra nézve. Az $O(0, 0, 0)$ pont: a koordináta-rendszer origója.

Legyen $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ két pont. Ekkor P_1 és P_2 egymástól mért távolsága (Pithagorasz):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

A DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

Az euklideszi tér 3-dimenziós, tehát egy $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bázisára vonatkozó koordináták segítségével azonosíthatjuk $\mathbb{R}^3$-bel, azaz a valós számhármasok halmazával. Legyenek (x, y, z) egy P pont koordinátái $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$-ra nézve. Az $O(0, 0, 0)$ pont: a koordináta-rendszer origója.
Legyen $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ két pont. Ekkor P_1 és P_2 egymástól mért távolsága (Pithagorasz):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

SKALÁRIS SZORZAT A TÉRBEN

DEFINÍCIÓ

Legyenek $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorok, melyek által bezárt szög γ. Ekkor $\vec{u}$ és $\vec{v}$ skaláris szorzata

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\gamma.$$

MEGJEGYZÉS (GEOMETRIAI JELENÉSE)

Jelölje $v_{||}$ a $\vec{v}$ vektornak az $\vec{u}$-n átmenő egyenesre vett merőleges vetületének előjeles hosszát. Ekkor

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot v_{||}.$$

SKALÁRIS SZORZAT A TÉRBEN

DEFINÍCIÓ

Legyenek $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorok, melyek által bezárt szög γ. Ekkor $\vec{u}$ és $\vec{v}$ skaláris szorzata

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\gamma.$$

MEGJEGYZÉS (GEOMETRIAI JELENÉSE)

Jelölje $v_{||}$ a $\vec{v}$ vektornak az $\vec{u}$-n átmenő egyenesre vett merőleges vetületének előjeles hosszát. Ekkor

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot v_{||}.$$

SKALÁRIS SZORZAT A TÉRBEN

DEFINÍCIÓ

Legyenek $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorok, melyek által bezárt szög γ. Ekkor $\vec{u}$ és $\vec{v}$ skaláris szorzata

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\gamma.$$

MEGJEGYZÉS (GEOMETRIAI JELENÉSE)

Jelölje $v_{||}$ a $\vec{v}$ vektornak az $\vec{u}$-n átmenő egyenesre vett merőleges vetületének előjeles hosszát. Ekkor

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot v_{||}.$$

SKALÁRIS SZORZAT A TÉRBEN

DEFINÍCIÓ

Legyenek $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorok, melyek által bezárt szög γ. Ekkor $\vec{u}$ és $\vec{v}$ skaláris szorzata

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\gamma.$$

MEGJEGYZÉS (GEOMETRIAI JELENÉSE)

Jelölje $v_{||}$ a $\vec{v}$ vektornak az $\vec{u}$-n átmenő egyenesre vett merőleges vetületének előjeles hosszát. Ekkor

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot v_{||}.$$

SKALÁRIS SZORZAT A TÉRBEN

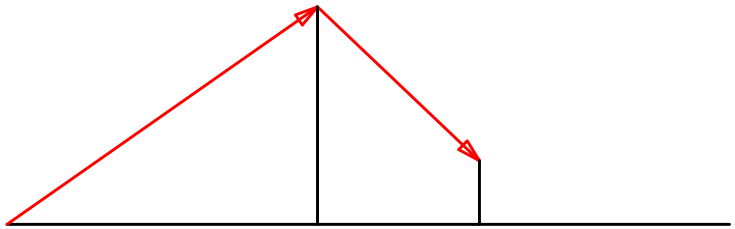

FIGURE: Vektorok egyenesre vett merőleges vetületei

KÖVETKEZMÉNY

Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ *vektorokra*

$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}.$$

SKALÁRIS SZORZAT A TÉRBEN

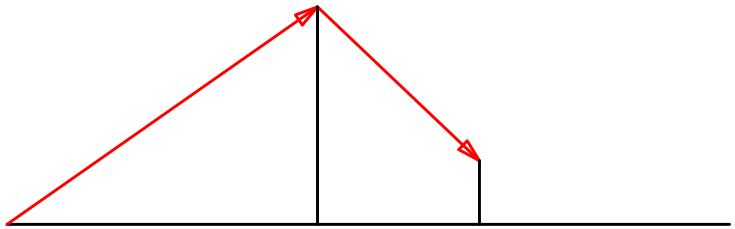

FIGURE: Vektorok egyenesre vett merőleges vetületei

KÖVETKEZMÉNY

Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ *vektorokra*

$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}.$$

SKALÁRIS SZORZAT TULAJDONSÁGAI

A skaláris szorzat tulajdonságai

1. Szimmetrikus, azaz minden $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ esetén $\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$.
2. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra
$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}, \quad (\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}\vec{w} + \vec{v}\vec{w}.$$
3. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra
$$(\lambda\vec{u})\vec{v} = \lambda\vec{u}\vec{v} = \vec{u}(\lambda\vec{v})$$
4. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra
$$\vec{u}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \text{ és } \vec{u}\vec{u} = |\vec{u}|^2$$

A két középső tulajdonságot úgy is mondják, hogy a skaláris szorzás lineáris mindkét változójában.

SKALÁRIS SZORZAT TULAJDONSÁGAI

A skaláris szorzat tulajdonságai

1. Szimmetrikus, azaz minden $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ esetén $\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$.
2. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra
$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}, \quad (\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}\vec{w} + \vec{v}\vec{w}.$$
3. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra
$$(\lambda\vec{u})\vec{v} = \lambda\vec{u}\vec{v} = \vec{u}(\lambda\vec{v})$$
4. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra
$$\vec{u}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \text{ és } \vec{u}\vec{u} = |\vec{u}|^2$$

A két középső tulajdonságot úgy is mondják, hogy a skaláris szorzás lineáris mindkét változójában.

SKALÁRIS SZORZAT TULAJDONSÁGAI

A skaláris szorzat tulajdonságai

1. Szimmetrikus, azaz minden $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ esetén $\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$.
2. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra

$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}, \quad (\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}\vec{w} + \vec{v}\vec{w}.$$

3. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra

$$(\lambda\vec{u})\vec{v} = \lambda\vec{u}\vec{v} = \vec{u}(\lambda\vec{v})$$

4. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra

$$\vec{u}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \text{ és } \vec{u}\vec{u} = |\vec{u}|^2$$

A két középső tulajdonságot úgy is mondják, hogy a skaláris szorzás lineáris mindkét változójában.

SKALÁRIS SZORZAT TULAJDONSÁGAI

A skaláris szorzat tulajdonságai

1. Szimmetrikus, azaz minden $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ esetén $\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$.
2. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra
$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}, \quad (\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}\vec{w} + \vec{v}\vec{w}.$$
3. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra
$$(\lambda\vec{u})\vec{v} = \lambda\vec{u}\vec{v} = \vec{u}(\lambda\vec{v})$$
4. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra
$$\vec{u}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \text{ és } \vec{u}\vec{u} = |\vec{u}|^2$$

A két középső tulajdonságot úgy is mondják, hogy a skaláris szorzás lineáris mindkét változójában.

SKALÁRIS SZORZAT TULAJDONSÁGAI

A skaláris szorzat tulajdonságai

1. Szimmetrikus, azaz minden $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ esetén $\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$.
2. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra
$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}, \quad (\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}\vec{w} + \vec{v}\vec{w}.$$
3. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra
$$(\lambda\vec{u})\vec{v} = \lambda\vec{u}\vec{v} = \vec{u}(\lambda\vec{v})$$
4. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra
$$\vec{u}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \text{ és } \vec{u}\vec{u} = |\vec{u}|^2$$

A két középső tulajdonságot úgy is mondják, hogy a skaláris szorzás lineáris mindkét változójában.

SKALÁRIS SZORZAT TULAJDONSÁGAI

A skaláris szorzat tulajdonságai

1. Szimmetrikus, azaz minden $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ esetén $\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$.
2. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra
$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}, \quad (\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}\vec{w} + \vec{v}\vec{w}.$$
3. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra
$$(\lambda\vec{u})\vec{v} = \lambda\vec{u}\vec{v} = \vec{u}(\lambda\vec{v})$$
4. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra
$$\vec{u}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \text{ és } \vec{u}\vec{u} = |\vec{u}|^2$$

A két középső tulajdonságot úgy is mondják, hogy a skaláris szorzás lineáris mindkét változójában.

SKALÁRIS SZORZAT TULAJDONSÁGAI

A skaláris szorzat tulajdonságai

1. Szimmetrikus, azaz minden $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ esetén $\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$.
2. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra
$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}, \quad (\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}\vec{w} + \vec{v}\vec{w}.$$
3. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra
$$(\lambda\vec{u})\vec{v} = \lambda\vec{u}\vec{v} = \vec{u}(\lambda\vec{v})$$
4. Tetszőleges $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra
$$\vec{u}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \text{ és } \vec{u}\vec{u} = |\vec{u}|^2$$

A két középső tulajdonságot úgy is mondják, hogy a skaláris szorzás lineáris mindkét változójában.

SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA KOORDINÁTÁKKAL

TÉTEL

Ha $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ *és* $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, *akkor*

$$\vec{u}\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_3$$

Bizonyítás.

$$\vec{u}\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1 x_2 \vec{i}\vec{i} + x_1 y_2 \vec{i}\vec{j} +$$

$$+ x_1 z_2 \vec{i}\vec{k} + y_1 x_2 \vec{j}\vec{i} + y_1 y_2 \vec{j}\vec{j} + y_1 z_2 \vec{j}\vec{k} + z_1 x_2 \vec{k}\vec{i} + z_1 y_2 \vec{k}\vec{j} + z_1 z_2 \vec{k}\vec{k} =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA KOORDINÁTÁKKAL

TÉTEL

Ha $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ *és* $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, *akkor*

$$\vec{u}\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_3$$

Bizonyítás.

$$\vec{u}\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1 x_2 \vec{i}\vec{i} + x_1 y_2 \vec{i}\vec{j} +$$

$$+ x_1 z_2 \vec{i}\vec{k} + y_1 x_2 \vec{j}\vec{i} + y_1 y_2 \vec{j}\vec{j} + y_1 z_2 \vec{j}\vec{k} + z_1 x_2 \vec{k}\vec{i} + z_1 y_2 \vec{k}\vec{j} + z_1 z_2 \vec{k}\vec{k} =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA KOORDINÁTÁKKAL

TÉTEL

Ha $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ *és* $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, *akkor*

$$\vec{u}\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_3$$

Bizonyítás.

$$\vec{u}\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1 x_2 \vec{i}\vec{i} + x_1 y_2 \vec{i}\vec{j} +$$

$$+ x_1 z_2 \vec{i}\vec{k} + y_1 x_2 \vec{j}\vec{i} + y_1 y_2 \vec{j}\vec{j} + y_1 z_2 \vec{j}\vec{k} + z_1 x_2 \vec{k}\vec{i} + z_1 y_2 \vec{k}\vec{j} + z_1 z_2 \vec{k}\vec{k} =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA KOORDINÁTÁKKAL

TÉTEL

Ha $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ *és* $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, *akkor*

$$\vec{u}\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_3$$

Bizonyítás.

$$\vec{u}\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1 x_2 \vec{i}\vec{i} + x_1 y_2 \vec{i}\vec{j} +$$

$$+ x_1 z_2 \vec{i}\vec{k} + y_1 x_2 \vec{j}\vec{i} + y_1 y_2 \vec{j}\vec{j} + y_1 z_2 \vec{j}\vec{k} + z_1 x_2 \vec{k}\vec{i} + z_1 y_2 \vec{k}\vec{j} + z_1 z_2 \vec{k}\vec{k} =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA KOORDINÁTÁKKAL

TÉTEL

Ha $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ *és* $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, *akkor*

$$\vec{u}\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_3$$

Bizonyítás.

$$\vec{u}\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1 x_2 \vec{i}\vec{i} + x_1 y_2 \vec{i}\vec{j} +$$

$$+ x_1 z_2 \vec{i}\vec{k} + y_1 x_2 \vec{j}\vec{i} + y_1 y_2 \vec{j}\vec{j} + y_1 z_2 \vec{j}\vec{k} + z_1 x_2 \vec{k}\vec{i} + z_1 y_2 \vec{k}\vec{j} + z_1 z_2 \vec{k}\vec{k} =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA KOORDINÁTÁKKAL

TÉTEL

Ha $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ *és* $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, *akkor*

$$\vec{u}\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_3$$

Bizonyítás.

$$\vec{u}\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1 x_2 \vec{i}\vec{i} + x_1 y_2 \vec{i}\vec{j} +$$

$$+ x_1 z_2 \vec{i}\vec{k} + y_1 x_2 \vec{j}\vec{i} + y_1 y_2 \vec{j}\vec{j} + y_1 z_2 \vec{j}\vec{k} + z_1 x_2 \vec{k}\vec{i} + z_1 y_2 \vec{k}\vec{j} + z_1 z_2 \vec{k}\vec{k} =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA KOORDINÁTÁKKAL

TÉTEL

Ha $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ *és* $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, *akkor*

$$\vec{u}\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_3$$

Bizonyítás.

$$\vec{u}\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1 x_2 \vec{i}\vec{i} + x_1 y_2 \vec{i}\vec{j} +$$

$$+ x_1 z_2 \vec{i}\vec{k} + y_1 x_2 \vec{j}\vec{i} + y_1 y_2 \vec{j}\vec{j} + y_1 z_2 \vec{j}\vec{k} + z_1 x_2 \vec{k}\vec{i} + z_1 y_2 \vec{k}\vec{j} + z_1 z_2 \vec{k}\vec{k} =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

KÉT VEKTOR SZÖGÉNEK KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Mennyi az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *és a* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok által bezárt szög?*

Megoldás

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\gamma \Longrightarrow \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{4}{9} (0 \leq \gamma \leq 180^\circ)$$

$$\Longrightarrow \gamma \approx 116,3878^\circ.$$

KÉT VEKTOR SZÖGÉNEK KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Mennyi az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *és a* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok által bezárt szög?*

Megoldás

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\gamma \Longrightarrow \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{4}{9} (0 \leq \gamma \leq 180^\circ)$$

$$\Longrightarrow \gamma \approx 116,3878^\circ.$$

KÉT VEKTOR SZÖGÉNEK KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Mennyi az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *és a* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok által bezárt szög?*

Megoldás

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\gamma \Longrightarrow \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{4}{9} (0 \leq \gamma \leq 180^\circ)$$

$$\Longrightarrow \gamma \approx 116,3878^\circ.$$

KÉT VEKTOR SZÖGÉNEK KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Mennyi az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *és a* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok által bezárt szög?*

Megoldás

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\gamma \Longrightarrow \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{4}{9} (0 \leq \gamma \leq 180^\circ)$$

$$\Longrightarrow \gamma \approx 116,3878^\circ.$$

KÉT VEKTOR SZÖGÉNEK KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Mennyi az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *és a* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok által bezárt szög?*

Megoldás

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\gamma \Longrightarrow \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{4}{9} (0 \leq \gamma \leq 180^\circ)$$

$$\Longrightarrow \gamma \approx 116,3878^\circ.$$

KÉT VEKTOR SZÖGÉNEK KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Mennyi az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *és a* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok által bezárt szög?*

Megoldás

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\gamma \Longrightarrow \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{4}{9} (0 \leq \gamma \leq 180^\circ)$$

$$\Longrightarrow \gamma \approx 116,3878^\circ.$$

KÉT VEKTOR SZÖGÉNEK KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Mennyi az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *és a* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok által bezárt szög?*

Megoldás

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\gamma \Longrightarrow \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{4}{9} (0 \leq \gamma \leq 180^\circ)$$

$$\Longrightarrow \gamma \approx 116,3878^\circ.$$

KÉT VEKTOR SZÖGÉNEK KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Mennyi az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *és a* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok által bezárt szög?*

Megoldás

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\gamma \Longrightarrow \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{4}{9} (0 \leq \gamma \leq 180^\circ)$$

$$\Longrightarrow \gamma \approx 116,3878^\circ.$$

KÉT VEKTOR SZÖGÉNEK KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

Mennyi az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *és a* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok által bezárt szög?*

Megoldás

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\gamma \Longrightarrow \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{4}{9} (0 \leq \gamma \leq 180^\circ)$$

$$\Longrightarrow \gamma \approx 116,3878^\circ.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ alakban, ahol $\vec{v}_{||}$ párhuzamos $\vec{u}$-val és $\vec{v}_{\perp}$ merőleges rá.

Volt:
$|\vec{v}| \cos\gamma$ geometriai jelentése $\vec{v}$-nek az $\vec{u}$ irányú merőleges vetületének az előjeles hossza. De $|\vec{v}| \cos\gamma = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|}$, és az $\vec{u}$ irányú egységvektor $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Ebből

$$\vec{v}_{||} = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} \Longrightarrow \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ alakban, ahol $\vec{v}_{||}$ párhuzamos $\vec{u}$-val és $\vec{v}_{\perp}$ merőleges rá.

Volt:
$|\vec{v}| \cos\gamma$ geometriai jelentése $\vec{v}$-nek az $\vec{u}$ irányú merőleges vetületének az előjeles hossza. De $|\vec{v}| \cos\gamma = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|}$, és az $\vec{u}$ irányú egységvektor $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Ebből

$$\vec{v}_{||} = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} \Longrightarrow \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ alakban, ahol $\vec{v}_{||}$ párhuzamos $\vec{u}$-val és $\vec{v}_{\perp}$ merőleges rá.

Volt:
$|\vec{v}| \cos\gamma$ geometriai jelentése $\vec{v}$-nek az $\vec{u}$ irányú merőleges vetületének az előjeles hossza. De $|\vec{v}| \cos\gamma = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|}$, és az $\vec{u}$ irányú egységvektor $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Ebből

$$\vec{v}_{||} = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} \Longrightarrow \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ alakban, ahol $\vec{v}_{||}$ párhuzamos $\vec{u}$-val és $\vec{v}_{\perp}$ merőleges rá.

Volt:
$|\vec{v}| \cos\gamma$ geometriai jelentése $\vec{v}$-nek az $\vec{u}$ irányú merőleges vetületének az előjeles hossza. De $|\vec{v}| \cos\gamma = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|}$, és az $\vec{u}$ irányú egységvektor $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Ebből

$$\vec{v}_{||} = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} \Longrightarrow \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ alakban, ahol $\vec{v}_{||}$ párhuzamos $\vec{u}$-val és $\vec{v}_{\perp}$ merőleges rá.

Volt:
$|\vec{v}| \cos\gamma$ geometriai jelentése $\vec{v}$-nek az $\vec{u}$ irányú merőleges vetületének az előjeles hossza. De $|\vec{v}| \cos\gamma = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|}$, és az $\vec{u}$ irányú egységvektor $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Ebből

$$\vec{v}_{||} = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} \Longrightarrow \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ alakban, ahol $\vec{v}_{||}$ párhuzamos $\vec{u}$-val és $\vec{v}_{\perp}$ merőleges rá.

Volt:
$|\vec{v}| \cos\gamma$ geometriai jelentése $\vec{v}$-nek az $\vec{u}$ irányú merőleges vetületének az előjeles hossza. De $|\vec{v}| \cos\gamma = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|}$, és az $\vec{u}$ irányú egységvektor $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Ebből

$$\vec{v}_{||} = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} \Longrightarrow \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ alakban, ahol $\vec{v}_{||}$ párhuzamos $\vec{u}$-val és $\vec{v}_{\perp}$ merőleges rá.

Volt:
$|\vec{v}| \cos\gamma$ geometriai jelentése $\vec{v}$-nek az $\vec{u}$ irányú merőleges vetületének az előjeles hossza. De $|\vec{v}| \cos\gamma = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|}$, és az $\vec{u}$ irányú egységvektor $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Ebből

$$\vec{v}_{||} = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} \Longrightarrow \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ alakban, ahol $\vec{v}_{||}$ párhuzamos $\vec{u}$-val és $\vec{v}_{\perp}$ merőleges rá.

Volt:
$|\vec{v}| \cos\gamma$ geometriai jelentése $\vec{v}$-nek az $\vec{u}$ irányú merőleges vetületének az előjeles hossza. De $|\vec{v}| \cos\gamma = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|}$, és az $\vec{u}$ irányú egységvektor $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Ebből

$$\vec{v}_{||} = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} \Longrightarrow \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Írjuk fel a* $\vec{v}$ *vektort* $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ *alakban, ahol* $\vec{v}_{||}$ *párhuzamos* $\vec{u}$*-val és* $\vec{v}_{\perp}$ *merőleges rá.*

$$\vec{v}_{||} = \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2}{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{||} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29/14 \\ -17/14 \\ 20/7 \end{bmatrix}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Írjuk fel a* $\vec{v}$ *vektort* $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ *alakban, ahol* $\vec{v}_{||}$ *párhuzamos* $\vec{u}$*-val és* $\vec{v}_{\perp}$ *merőleges rá.*

$$\vec{v}_{||} = \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2}{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{||} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29/14 \\ -17/14 \\ 20/7 \end{bmatrix}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Írjuk fel a* $\vec{v}$ *vektort* $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ *alakban, ahol* $\vec{v}_{||}$ *párhuzamos* $\vec{u}$*-val és* $\vec{v}_{\perp}$ *merőleges rá.*

$$\vec{v}_{||} = \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2}{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{||} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29/14 \\ -17/14 \\ 20/7 \end{bmatrix}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Írjuk fel a* $\vec{v}$ *vektort* $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ *alakban, ahol* $\vec{v}_{||}$ *párhuzamos* $\vec{u}$*-val és* $\vec{v}_{\perp}$ *merőleges rá.*

$$\vec{v}_{||} = \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2}{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{||} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29/14 \\ -17/14 \\ 20/7 \end{bmatrix}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Írjuk fel a* $\vec{v}$ *vektort* $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ *alakban, ahol* $\vec{v}_{||}$ *párhuzamos* $\vec{u}$*-val és* $\vec{v}_{\perp}$ *merőleges rá.*

$$\vec{v}_{||} = \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2}{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{||} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29/14 \\ -17/14 \\ 20/7 \end{bmatrix}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Írjuk fel a* $\vec{v}$ *vektort* $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ *alakban, ahol* $\vec{v}_{||}$ *párhuzamos* $\vec{u}$*-val és* $\vec{v}_{\perp}$ *merőleges rá.*

$$\vec{v}_{||} = \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2}{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{||} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29/14 \\ -17/14 \\ 20/7 \end{bmatrix}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Írjuk fel a* $\vec{v}$ *vektort* $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ *alakban, ahol* $\vec{v}_{||}$ *párhuzamos* $\vec{u}$*-val és* $\vec{v}_{\perp}$ *merőleges rá.*

$$\vec{v}_{||} = \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2}{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{||} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29/14 \\ -17/14 \\ 20/7 \end{bmatrix}.$$

VEKTOR FELBONTÁSA ADOTT VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS RÁ MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE

FELADAT

Legyen $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Írjuk fel a* $\vec{v}$ *vektort* $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$ *alakban, ahol* $\vec{v}_{||}$ *párhuzamos* $\vec{u}$*-val és* $\vec{v}_{\perp}$ *merőleges rá.*

$$\vec{v}_{||} = \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2}{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{||} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/14 \\ 3/14 \\ 1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29/14 \\ -17/14 \\ 20/7 \end{bmatrix}.$$