25. előadás: Vektorok vektoriális és vegyes szorzata

VEKTOROK VEKTORIÁLIS SZORZATA

DEFINÍCIÓ

Legyenek $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ *és* $\gamma \in [0, \pi]$ *az általuk közbezárt szög. Az* $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ *vektorok* ***vektoriális szorzata*** *az egyetlen olyan* $\vec{a} \times \vec{b}$ *vektor, amelyre*

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\gamma)$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ *merőleges* $\vec{a}$*-ra és* $\vec{b}$*-re*
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ *ebben a sorrendben* ***jobbsodrású*** *rendszert alkot:* $\vec{a} \times \vec{b}$ *irányából szemlélve a* $\vec{a}, \vec{b}$ *által kifeszített síkot, a* $\vec{a}$ *vektort valamely* $(0, \pi)$ *szöggel való elforgatás egy* $\vec{b}$*-vel egyirányú vektorba viszi.*

VEKTOROK VEKTORIÁLIS SZORZATA

DEFINÍCIÓ

*Legyenek $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\gamma \in [0, \pi]$ az általuk közbezárt szög. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok **vektoriális szorzata** az egyetlen olyan $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor, amelyre*

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\gamma)$
- *$\vec{a} \times \vec{b}$ merőleges $\vec{a}$-ra és $\vec{b}$-re*
- *$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot: $\vec{a} \times \vec{b}$ irányából szemlélve a $\vec{a}, \vec{b}$ által kifeszített síkot, a $\vec{a}$ vektort valamely $(0, \pi)$ szöggel való elforgatás egy $\vec{b}$-vel egyirányú vektorba viszi.*

VEKTOROK VEKTORIÁLIS SZORZATA

DEFINÍCIÓ

*Legyenek $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\gamma \in [0, \pi]$ az általuk közbezárt szög. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok **vektoriális szorzata** az egyetlen olyan $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor, amelyre*

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\gamma)$
- *$\vec{a} \times \vec{b}$ merőleges $\vec{a}$-ra és $\vec{b}$-re*
- *$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot: $\vec{a} \times \vec{b}$ irányából szemlélve a $\vec{a}, \vec{b}$ által kifeszített síkot, a $\vec{a}$ vektort valamely $(0, \pi)$ szöggel való elforgatás egy $\vec{b}$-vel egyirányú vektorba viszi.*

Vektorok vektoriális szorzata

Definíció

Legyenek $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\gamma \in [0, \pi]$ az általuk közbezárt szög. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok vektoriális szorzata az egyetlen olyan $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor, amelyre

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\gamma)$
- *$\vec{a} \times \vec{b}$ merőleges $\vec{a}$-ra és $\vec{b}$-re*
- *$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot: $\vec{a} \times \vec{b}$ irányából szemlélve a $\vec{a}, \vec{b}$ által kifeszített síkot, a $\vec{a}$ vektort valamely $(0, \pi)$ szöggel való elforgatás egy $\vec{b}$-vel egyirányú vektorba viszi.*

A VEKTORIÁLIS SZORZAT ELTŰNÉSÉNEK FELTÉTELE

ÁLLÍTÁS

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok vektoriális szorzata akkor és csak akkor $\vec{0}$, ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamosak.

BIZONYÍTÁS

Megegyezés szerint, $\vec{0}$ bármely másik vektorral párhuzamos, tehát feltehetjük hogy $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$. Ekkor, egyrészt $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ *miatt amennyiben $\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamosak akkor $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$; másrészt pedig minden $\gamma \in (0, \pi)$ esetén* $\sin(\gamma) \neq 0$ *miatt $|\vec{a} \times \vec{b}| \neq 0$.*

A VEKTORIÁLIS SZORZAT ELTŰNÉSÉNEK FELTÉTELE

ÁLLÍTÁS

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok vektoriális szorzata akkor és csak akkor $\vec{0}$, ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamosak.

BIZONYÍTÁS

Megegyezés szerint, $\vec{0}$ bármely másik vektorral párhuzamos, tehát feltehetjük hogy $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$. Ekkor, egyrészt $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ miatt amennyiben $\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamosak akkor $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$; másrészt pedig minden $\gamma \in (0, \pi)$ esetén $\sin(\gamma) \neq 0$ miatt $|\vec{a} \times \vec{b}| \neq 0$.

A VEKTORIÁLIS SZORZAT ELTŰNÉSÉNEK FELTÉTELE

ÁLLÍTÁS

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok vektoriális szorzata akkor és csak akkor $\vec{0}$, ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamosak.

BIZONYÍTÁS

Megegyezés szerint, $\vec{0}$ bármely másik vektorral párhuzamos, tehát feltehetjük hogy $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$. Ekkor, egyrészt $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ *miatt amennyiben $\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamosak akkor $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$; másrészt pedig minden $\gamma \in (0, \pi)$ esetén* $\sin(\gamma) \neq 0$ *miatt $|\vec{a} \times \vec{b}| \neq 0$.*

A VEKTORIÁLIS SZORZAT ELTŰNÉSÉNEK FELTÉTELE

ÁLLÍTÁS

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok vektoriális szorzata akkor és csak akkor $\vec{0}$, ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamosak.

BIZONYÍTÁS

Megegyezés szerint, $\vec{0}$ bármely másik vektorral párhuzamos, tehát feltehetjük hogy $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$. Ekkor, egyrészt $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ *miatt amennyiben $\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamosak akkor* $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$*; másrészt pedig minden* $\gamma \in (0, \pi)$ *esetén* $\sin(\gamma) \neq 0$ *miatt* $|\vec{a} \times \vec{b}| \neq 0$.

A vektoriális szorzat antikommutativitása

Állítás

Minden $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}.$$

Bizonyítás

Ha $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ jobbsodrású rendszert alkotnak, akkor ugyanez igaz a $\vec{b}, \vec{a}, -\vec{a} \times \vec{b}$ rendszerre is. *A $\vec{b} \times \vec{a}$-t definiáló másik két tulajdonság nyilván teljesül a*

$$-\vec{a} \times \vec{b}$$

vektorra.

A VEKTORIÁLIS SZORZAT ANTIKOMMUTATIVITÁSA

ÁLLÍTÁS

Minden $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ *esetén*

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}.$$

BIZONYÍTÁS

Ha $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ *jobbsodrású rendszert alkotnak, akkor ugyanez igaz a* $\vec{b}, \vec{a}, -\vec{a} \times \vec{b}$ *rendszerre is. A* $\vec{b} \times \vec{a}$*-t definiáló másik két tulajdonság nyilván teljesül a*

$$-\vec{a} \times \vec{b}$$

vektorra.

A vektoriális szorzat antikommutativitása

Állítás

Minden $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ *esetén*

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}.$$

Bizonyítás

Ha $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ *jobbsodrású rendszert alkotnak, akkor ugyanez igaz a* $\vec{b}, \vec{a}, -\vec{a} \times \vec{b}$ *rendszerre is. A* $\vec{b} \times \vec{a}$*-t definiáló másik két tulajdonság nyilván teljesül a*

$$-\vec{a} \times \vec{b}$$

vektorra.

A vektoriális szorzat linearitása

Állítás

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ *és* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$(\alpha \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha \cdot \vec{b})$$

és

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Nem bizonyítjuk.

A vektoriális szorzat linearitása

Állítás

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ *és* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$(\alpha \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha \cdot \vec{b})$$

és

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Nem bizonyítjuk.

A vektoriális szorzat linearitása

Állítás

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ *és* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$(\alpha \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha \cdot \vec{b})$$

és

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Nem bizonyítjuk.

A vektoriális szorzat geometriai értelme

Állítás

Minden $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ esetén az általuk kifeszített parallelogramma T területe megegyezik $|\vec{a} \times \vec{b}|$-vel.

Bizonyítás

Egy parallelogramma területe megegyezik alapja és hozzá tartozó magassága szorzatával. Válasszuk például $\vec{a}$-t alapnak. Ekkor a hozzá tartozó magasság éppen $|\vec{b}| \cdot \sin(\gamma)$.

A VEKTORIÁLIS SZORZAT GEOMETRIAI ÉRTELME

ÁLLÍTÁS

Minden $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ esetén az általuk kifeszített parallelogramma T területe megegyezik $|\vec{a} \times \vec{b}|$-vel.

BIZONYÍTÁS

Egy parallelogramma területe megegyezik alapja és hozzá tartozó magassága szorzatával. Válasszuk például $\vec{a}$-t alapnak. Ekkor a hozzá tartozó magasság éppen $|\vec{b}| \cdot \sin(\gamma)$.

A VEKTORIÁLIS SZORZAT GEOMETRIAI ÉRTELME

ÁLLÍTÁS

Minden $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ esetén az általuk kifeszített parallelogramma T területe megegyezik $|\vec{a} \times \vec{b}|$-vel.

BIZONYÍTÁS

Egy parallelogramma területe megegyezik alapja és hozzá tartozó magassága szorzatával. Válasszuk például $\vec{a}$-t alapnak. Ekkor a hozzá tartozó magasság éppen $|\vec{b}| \cdot \sin(\gamma)$.

A standard bázis vektorainak egymással vett vektoriális szorzata

Legyen

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0} \\ \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} &= \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} &= \vec{j}. \end{aligned}$$

A standard bázis vektorainak egymással vett vektoriális szorzata

Legyen

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}.$$

A STANDARD BÁZIS VEKTORAINAK EGYMÁSSAL VETT VEKTORIÁLIS SZORZATA

Legyen

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0} \\ \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} &= \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} &= \vec{j}. \end{aligned}$$

A standard bázis vektorainak egymással vett vektoriális szorzata

Legyen

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0} \\ \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} &= \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} &= \vec{j}. \end{aligned}$$

A standard bázis vektorainak egymással vett vektoriális szorzata

Legyen

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0} \\ \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} &= \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} &= \vec{j}. \end{aligned}$$

A vektoriális szorzat képlete koordinátákban

Legyen

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Állítás

Ekkor:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}.$$

A vektoriális szorzat képlete koordinátákban

Legyen

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Állítás

Ekkor:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}.$$

A vektoriális szorzat képlete koordinátákban

Bizonyítás:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = a_1b_1\vec{i}\times\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\times\vec{j}+$$

$$+a_1b_3\vec{i}\times\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\times\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\times\vec{j}+a_2b_3\vec{j}\times\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\times\vec{j}+$$
$$+a_3b_3\vec{k}\times\vec{k} = (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}.$$

Megjegyzés

Akik tanultak determinánsokról:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

A VEKTORIÁLIS SZORZAT KÉPLETE KOORDINÁTÁKBAN

Bizonyítás:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = a_1b_1\vec{i}\times\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\times\vec{j}+$$

$$+a_1b_3\vec{i}\times\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\times\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\times\vec{j}+a_2b_3\vec{j}\times\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\times\vec{j}+$$

$$+a_3b_3\vec{k}\times\vec{k} = (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}.$$

MEGJEGYZÉS

Akik tanultak determinánsokról:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

A VEKTORIÁLIS SZORZAT KÉPLETE KOORDINÁTÁKBAN

Bizonyítás:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = a_1b_1\vec{i}\times\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\times\vec{j}+$$

$$+a_1b_3\vec{i}\times\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\times\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\times\vec{j}+a_2b_3\vec{j}\times\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\times\vec{j}+$$
$$+a_3b_3\vec{k}\times\vec{k} = (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}.$$

MEGJEGYZÉS

Akik tanultak determinánsokról:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

A vektoriális szorzat képlete koordinátákban

Bizonyítás:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = a_1b_1\vec{i}\times\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\times\vec{j}+$$

$$+a_1b_3\vec{i}\times\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\times\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\times\vec{j}+a_2b_3\vec{j}\times\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\times\vec{j}+$$
$$+a_3b_3\vec{k}\times\vec{k} = (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}.$$

Megjegyzés

Akik tanultak determinánsokról:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

A VEKTORIÁLIS SZORZAT KÉPLETE KOORDINÁTÁKBAN

Bizonyítás:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = a_1b_1\vec{i}\times\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\times\vec{j}+$$

$$+a_1b_3\vec{i}\times\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\times\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\times\vec{j}+a_2b_3\vec{j}\times\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\times\vec{j}+$$
$$+a_3b_3\vec{k}\times\vec{k} = (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}.$$

MEGJEGYZÉS

Akik tanultak determinánsokról:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

HÁROMSZÖG TERÜLETE

ÁLLÍTÁS

Az $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ pontok által kifeszített háromszög területe

$$T(ABC\Delta) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}.$$

Bizonyítás: A háromszög területe az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorok által kifeszített parallelogramma területének fele.

HÁROMSZÖG TERÜLETE

ÁLLÍTÁS

Az $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ pontok által kifeszített háromszög területe

$$T(ABC\Delta) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}.$$

Bizonyítás: A háromszög területe az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorok által kifeszített parallelogramma területének fele.

Háromszög területe

Feladat

Mennyi azon háromszög területe, melynek csúcsai $A(1,-2,3)$, $B(1,1,-1)$ és $C(0,3,2)$?

Megoldás:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-(-2) \\ (-1)-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)-(-4)\cdot 5 \\ (-4)\cdot(-1)-0\cdot(-1) \\ 0\cdot 5-3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{17^2+4^2+3^2}}{2} = \frac{\sqrt{314}}{2} \approx 8.8600$$

HÁROMSZÖG TERÜLETE

FELADAT

Mennyi azon háromszög területe, melynek csúcsai $A(1,-2,3)$, $B(1,1,-1)$ és $C(0,3,2)$?

Megoldás:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-(-2) \\ (-1)-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)-(-4)\cdot 5 \\ (-4)\cdot(-1)-0\cdot(-1) \\ 0\cdot 5-3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{17^2+4^2+3^2}}{2} = \frac{\sqrt{314}}{2} \approx 8.8600$$

HÁROMSZÖG TERÜLETE

FELADAT

Mennyi azon háromszög területe, melynek csúcsai $A(1,-2,3)$, $B(1,1,-1)$ *és* $C(0,3,2)$*?*

Megoldás:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-(-2) \\ (-1)-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)-(-4)\cdot 5 \\ (-4)\cdot(-1)-0\cdot(-1) \\ 0\cdot 5 - 3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{17^2+4^2+3^2}}{2} = \frac{\sqrt{314}}{2} \approx 8.8600$$

HÁROMSZÖG TERÜLETE

FELADAT

Mennyi azon háromszög területe, melynek csúcsai $A(1,-2,3)$, $B(1,1,-1)$ *és* $C(0,3,2)$*?*

Megoldás:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-(-2) \\ (-1)-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)-(-4)\cdot 5 \\ (-4)\cdot(-1)-0\cdot(-1) \\ 0\cdot 5-3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{17^2+4^2+3^2}}{2} = \frac{\sqrt{314}}{2} \approx 8.8600$$

HÁROMSZÖG TERÜLETE

FELADAT

Mennyi azon háromszög területe, melynek csúcsai $A(1,-2,3)$*,* $B(1,1,-1)$ *és* $C(0,3,2)$*?*

Megoldás:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-(-2) \\ (-1)-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)-(-4)\cdot 5 \\ (-4)\cdot(-1)-0\cdot(-1) \\ 0\cdot 5-3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{17^2+4^2+3^2}}{2} = \frac{\sqrt{314}}{2} \approx 8.8600$$

HÁROMSZÖG TERÜLETE

FELADAT

Mennyi azon háromszög területe, melynek csúcsai $A(1,-2,3)$, $B(1,1,-1)$ *és* $C(0,3,2)$*?*

Megoldás:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-(-2) \\ (-1)-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)-(-4)\cdot 5 \\ (-4)\cdot(-1)-0\cdot(-1) \\ 0\cdot 5-3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{17^2+4^2+3^2}}{2} = \frac{\sqrt{314}}{2} \approx 8.8600$$

HÁROMSZÖG TERÜLETE

FELADAT

Mennyi azon háromszög területe, melynek csúcsai $A(1,-2,3)$*,* $B(1,1,-1)$ *és* $C(0,3,2)$*?*

Megoldás:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-(-2) \\ (-1)-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)-(-4)\cdot 5 \\ (-4)\cdot(-1)-0\cdot(-1) \\ 0\cdot 5-3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{17^2+4^2+3^2}}{2} = \frac{\sqrt{314}}{2} \approx 8.8600$$

HÁROMSZÖG TERÜLETE

FELADAT

Mennyi azon háromszög területe, melynek csúcsai $A(1,-2,3)$, $B(1,1,-1)$ és $C(0,3,2)$?

Megoldás:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-(-2) \\ (-1)-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)-(-4)\cdot 5 \\ (-4)\cdot(-1)-0\cdot(-1) \\ 0\cdot 5-3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{17^2+4^2+3^2}}{2} = \frac{\sqrt{314}}{2} \approx 8.8600$$

Vektorok vegyes szorzata

Legyenek $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

Definíció

Ekkor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vegyes szorzata a

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \in \mathbb{R}$$

skalár.

Vektorok vegyes szorzata

Legyenek $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

Definíció

Ekkor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vegyes szorzata a

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \in \mathbb{R}$$

skalár.

Feltétel vektorok vegyes szorzatának eltűnésére

Állítás

Az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok vegyes szorzata akkor és csak akkor 0, *ha $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ egysíkúak.*

Bizonyítás

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \Longleftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}.$$

De $\vec{a} \times \vec{b}$ merőleges az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ által kifeszített síkra, így $\vec{c}$ pontosan akkor merőleges rá, ha benne van ugyanebben a síkban.

Feltétel vektorok vegyes szorzatának eltűnésére

Állítás

Az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok vegyes szorzata akkor és csak akkor 0, *ha $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ egysíkúak.*

Bizonyítás

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \iff \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}.$$

De $\vec{a} \times \vec{b}$ merőleges az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ által kifeszített síkra, így $\vec{c}$ pontosan akkor merőleges rá, ha benne van ugyanebben a síkban.

FELTÉTEL VEKTOROK VEGYES SZORZATÁNAK ELTŰNÉSÉRE

ÁLLÍTÁS

Az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok vegyes szorzata akkor és csak akkor 0*, ha $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ egysíkúak.*

BIZONYÍTÁS

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \iff \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}.$$

De $\vec{a} \times \vec{b}$ merőleges az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ által kifeszített síkra, így $\vec{c}$ pontosan akkor merőleges rá, ha benne van ugyanebben a síkban.

FELTÉTEL VEKTOROK VEGYES SZORZATÁNAK ELTŰNÉSÉRE

ÁLLÍTÁS

Az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok vegyes szorzata akkor és csak akkor 0, ha $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ egysíkúak.

BIZONYÍTÁS

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \iff \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}.$$

De $\vec{a} \times \vec{b}$ merőleges az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ által kifeszített síkra, így $\vec{c}$ pontosan akkor merőleges rá, ha benne van ugyanebben a síkban.

A vegyes szorzat antiszimmetriája és linearitása

Állítás

A vegyes szorzat mindhárom változóban lineáris: bármely $\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \vec{c}, \vec{c}' \in \mathbb{R}^3$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$[\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \alpha\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{c}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$
$$[\vec{a} + \vec{a}', \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}', \vec{b}, \vec{c}]$$
$$[\vec{a}, \vec{b} + \vec{b}', \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}', \vec{c}]$$
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{c}'] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}'].$$

A vegyes szorzat ellentettjére változik, ha $\vec{a}$-t és $\vec{b}$-t felcseréljük:

$$[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

A VEGYES SZORZAT ANTISZIMMETRIÁJA ÉS LINEARITÁSA

ÁLLÍTÁS

A vegyes szorzat mindhárom változóban lineáris: bármely $\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \vec{c}, \vec{c}' \in \mathbb{R}^3$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$[\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \alpha\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{c}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

$$[\vec{a} + \vec{a}', \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}', \vec{b}, \vec{c}]$$

$$[\vec{a}, \vec{b} + \vec{b}', \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}', \vec{c}]$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{c}'] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}'].$$

A vegyes szorzat ellentettjére változik, ha $\vec{a}$-t és $\vec{b}$-t felcseréljük:

$$[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

A vegyes szorzat antiszimmetriája és linearitása

Állítás

A vegyes szorzat mindhárom változóban lineáris: bármely $\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \vec{c}, \vec{c}' \in \mathbb{R}^3$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$[\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \alpha\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{c}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

$$[\vec{a} + \vec{a}', \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}', \vec{b}, \vec{c}]$$

$$[\vec{a}, \vec{b} + \vec{b}', \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}', \vec{c}]$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{c}'] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}'].$$

A vegyes szorzat ellentettjére változik, ha $\vec{a}$-t és $\vec{b}$-t felcseréljük:

$$[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

A VEGYES SZORZAT GEOMETRIAI ÉRTELME

Legyenek $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ általános helyzetű (azaz nem egysíkú) vektorok, amelyek kifeszítenek egy nemelfajuló P paralelepipedont.

ÁLLÍTÁS

Ekkor P térfogata

$$V(P) = \pm[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}],$$

ahol az előjel $+$ amennyiben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak, és *$-$ amennyiben balsodrásút.*

A VEGYES SZORZAT GEOMETRIAI ÉRTELME

Legyenek $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ általános helyzetű (azaz nem egysíkú) vektorok, amelyek kifeszítenek egy nemelfajuló P paralelepipedont.

ÁLLÍTÁS

Ekkor P térfogata

$$V(P) = \pm[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}],$$

ahol az előjel $+$ amennyiben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak, és $-$ amennyiben balsodrásút.

A VEGYES SZORZAT GEOMETRIAI ÉRTELME

Legyenek $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ általános helyzetű (azaz nem egysíkú) vektorok, amelyek kifeszítenek egy nemelfajuló P paralelepipedont.

ÁLLÍTÁS

Ekkor P térfogata

$$V(P) = \pm[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}],$$

ahol az előjel $+$ amennyiben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak, és $-$ amennyiben balsodrásút.

A VEGYES SZORZAT GEOMETRIAI ÉRTELMÉNEK BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás: A $V(P)$ térfogatot megkaphatjuk az $\vec{a}, \vec{b}$ által kifeszített parallelogramma területének és a hozzá tartozó m magasság szorzataként. Mivel előbbi terület éppen $|\vec{a} \times \vec{b}|$, utóbbi magasság pedig $m = |\vec{c}||\cos(\gamma)|$, ahol γ az $\vec{a} \times \vec{b}$ és $\vec{c}$ által közbezárt szög, így a skaláris szorzat definíciójából kapjuk a

$$V(P) = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|\cos(\gamma) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

képletet, amennyiben $\cos(\gamma) > 0$, és a

$$V(P) = -|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|\cos(\gamma) = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

képletet, amennyiben $\cos(\gamma) < 0$. Könnyen látható, hogy az első eset éppen azzal ekvivalens, hogy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jobbsodrású rendszer.

A VEGYES SZORZAT GEOMETRIAI ÉRTELMÉNEK BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás: A $V(P)$ térfogatot megkaphatjuk az $\vec{a}, \vec{b}$ által kifeszített parallelogramma területének és a hozzá tartozó m magasság szorzataként. Mivel előbbi terület éppen $|\vec{a} \times \vec{b}|$, utóbbi magasság pedig $m = |\vec{c}||\cos(\gamma)|$, ahol γ az $\vec{a} \times \vec{b}$ és $\vec{c}$ által közbezárt szög, így a skaláris szorzat definíciójából kapjuk a

$$V(P) = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos(\gamma) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

képletet, amennyiben $\cos(\gamma) > 0$, és a

$$V(P) = -|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos(\gamma) = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

képletet, amennyiben $\cos(\gamma) < 0$. Könnyen látható, hogy az első eset éppen azzal ekvivalens, hogy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jobbsodrású rendszer.

A VEGYES SZORZAT GEOMETRIAI ÉRTELMÉNEK BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás: A $V(P)$ térfogatot megkaphatjuk az $\vec{a}, \vec{b}$ által kifeszített parallelogramma területének és a hozzá tartozó m magasság szorzataként. Mivel előbbi terület éppen $|\vec{a} \times \vec{b}|$, utóbbi magasság pedig $m = |\vec{c}||\cos(\gamma)|$, ahol γ az $\vec{a} \times \vec{b}$ és $\vec{c}$ által közbezárt szög, így a skaláris szorzat definíciójából kapjuk a

$$V(P) = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|\cos(\gamma) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

képletet, amennyiben $\cos(\gamma) > 0$, és a

$$V(P) = -|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|\cos(\gamma) = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

képletet, amennyiben $\cos(\gamma) < 0$. Könnyen látható, hogy az első eset éppen azzal ekvivalens, hogy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jobbsodrású rendszer.

A VEGYES SZORZAT GEOMETRIAI ÉRTELMÉNEK BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás: A $V(P)$ térfogatot megkaphatjuk az $\vec{a}, \vec{b}$ által kifeszített parallelogramma területének és a hozzá tartozó m magasság szorzataként. Mivel előbbi terület éppen $|\vec{a} \times \vec{b}|$, utóbbi magasság pedig $m = |\vec{c}||\cos(\gamma)|$, ahol γ az $\vec{a} \times \vec{b}$ és $\vec{c}$ által közbezárt szög, így a skaláris szorzat definíciójából kapjuk a

$$V(P) = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos(\gamma) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

képletet, amennyiben $\cos(\gamma) > 0$, és a

$$V(P) = -|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos(\gamma) = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

képletet, amennyiben $\cos(\gamma) < 0$. Könnyen látható, hogy az első eset éppen azzal ekvivalens, hogy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jobbsodrású rendszer.

A VEGYES SZORZAT GEOMETRIAI ÉRTELMÉNEK BIZONYÍTÁSA

Bizonyítás: A $V(P)$ térfogatot megkaphatjuk az $\vec{a}, \vec{b}$ által kifeszített parallelogramma területének és a hozzá tartozó m magasság szorzataként. Mivel előbbi terület éppen $|\vec{a} \times \vec{b}|$, utóbbi magasság pedig $m = |\vec{c}||\cos(\gamma)|$, ahol γ az $\vec{a} \times \vec{b}$ és $\vec{c}$ által közbezárt szög, így a skaláris szorzat definíciójából kapjuk a

$$V(P) = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos(\gamma) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

képletet, amennyiben $\cos(\gamma) > 0$, és a

$$V(P) = -|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos(\gamma) = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

képletet, amennyiben $\cos(\gamma) < 0$. Könnyen látható, hogy az első eset éppen azzal ekvivalens, hogy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jobbsodrású rendszer.

FELCSERÉLÉSI TÉTEL

ÁLLÍTÁS

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ *esetén*

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}].$$

BIZONYÍTÁS

Mindhárom mennyiség abszolút értéke ugyanazon P paralelepipedon $V(P)$ *térfogata, és az* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *rendszer akkor és csak akkor jobbsodrású, ha a* $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ *rendszer az.*

A fent kimondott tulajdonságot úgy is fogalmazhatjuk, hogy a vegyes szorzat invariáns a benne szereplő vektorok ciklikus permutációira:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mapsto (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}).$$

FELCSERÉLÉSI TÉTEL

ÁLLÍTÁS

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ *esetén*

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}].$$

BIZONYÍTÁS

Mindhárom mennyiség abszolút értéke ugyanazon P paralelepipedon $V(P)$ *térfogata, és az* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *rendszer akkor és csak akkor jobbsodrású, ha a* $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ *rendszer az.*

A fent kimondott tulajdonságot úgy is fogalmazhatjuk, hogy a vegyes szorzat invariáns a benne szereplő vektorok ciklikus permutációira:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mapsto (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}).$$

FELCSERÉLÉSI TÉTEL

ÁLLÍTÁS

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ *esetén*

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}].$$

BIZONYÍTÁS

Mindhárom mennyiség abszolút értéke ugyanazon P *paralelepipedon* $V(P)$ *térfogata, és az* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *rendszer akkor és csak akkor jobbsodrású, ha a* $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ *rendszer az.*

A fent kimondott tulajdonságot úgy is fogalmazhatjuk, hogy a vegyes szorzat invariáns a benne szereplő vektorok ciklikus permutációira:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mapsto (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}).$$

A vegyes szorzat képlete koordinátákban

Legyen

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Állítás

Ekkor:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

Bizonyítás

Azonnal következik a skaláris és vektoriális szorzat koordinátákban megadott képletéből.

A VEGYES SZORZAT KÉPLETE KOORDINÁTÁKBAN

Legyen

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

ÁLLÍTÁS

Ekkor:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

BIZONYÍTÁS

Azonnal következik a skaláris és vektoriális szorzat koordinátákban megadott képletéből.

A VEGYES SZORZAT KÉPLETE KOORDINÁTÁKBAN

Legyen

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

ÁLLÍTÁS

Ekkor:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

BIZONYÍTÁS

Azonnal következik a skaláris és vektoriális szorzat koordinátákban megadott képletéből.

A VEGYES SZORZAT KÉPLETE KOORDINÁTÁKBAN

MEGJEGYZÉS

Akik tanultak determinánsokról:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|ccc|cc} a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_2 & c_3 & c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}$$

A VEGYES SZORZAT KÉPLETE KOORDINÁTÁKBAN

MEGJEGYZÉS

Akik tanultak determinánsokról:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|ccc|cc} a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_2 & c_3 & c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}$$

TETRAÉDER TÉRFOGATA

ÁLLÍTÁS

Az $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ csúcsú tetraéder térfogata

$$V(ABCD) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}.$$

Bizonyítás: Az $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ vektorok által kifeszített parallelepipedon felbontható hat teraéderre, melyek térfogata éppen az $ABCD$ tetraéder térfogata.

Tetraéder térfogata

Állítás

Az $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ *csúcsú tetraéder térfogata*

$$V(ABCD) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}.$$

Bizonyítás: Az $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ vektorok által kifeszített parallelepipedon felbontható hat teraéderre, melyek térfogata éppen az $ABCD$ tetraéder térfogata.

Példák a vegyes szorzat használatára

Feladat

Állapítsa meg, hogy az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok* $t \in \mathbb{R}$ *milyen értékeire komplanárisak.*

Megoldás: A vektorok pontosan akkor esnek egy síkba, ha az általuk kifeszített parallelepipedon térfogata 0, azaz amikor $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. De

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (-1)\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 3\cdot t - (-1)\cdot 2\cdot t - 5\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 1 =$$

$$= 0 - 20 - 3t + 2t - 15 - 0 = -35 - t \Longrightarrow t = -35.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Állapítsa meg, hogy az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok* $t \in \mathbb{R}$ *milyen értékeire komplanárisak.*

Megoldás: A vektorok pontosan akkor esnek egy síkba, ha az általuk kifeszített parallelepipedon térfogata 0, azaz amikor $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. De

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (-1)\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 3\cdot t - (-1)\cdot 2\cdot t - 5\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 1 =$$

$$= 0 - 20 - 3t + 2t - 15 - 0 = -35 - t \Longrightarrow t = -35.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Állapítsa meg, hogy az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok* $t \in \mathbb{R}$ *milyen értékeire komplanárisak.*

Megoldás: A vektorok pontosan akkor esnek egy síkba, ha az általuk kifeszített parallelepipedon térfogata 0, azaz amikor $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. De

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (-1)\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 3\cdot t - (-1)\cdot 2\cdot t - 5\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 1 =$$

$$= 0 - 20 - 3t + 2t - 15 - 0 = -35 - t \Longrightarrow t = -35.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Állapítsa meg, hogy az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok* $t \in \mathbb{R}$ *milyen értékeire komplanárisak.*

Megoldás: A vektorok pontosan akkor esnek egy síkba, ha az általuk kifeszített parallelepipedon térfogata 0, azaz amikor $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. De

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (-1)\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 3\cdot t - (-1)\cdot 2\cdot t - 5\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 1 =$$

$$= 0 - 20 - 3t + 2t - 15 - 0 = -35 - t \Longrightarrow t = -35.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Állapítsa meg, hogy az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok* $t \in \mathbb{R}$ *milyen értékeire komplanárisak.*

Megoldás: A vektorok pontosan akkor esnek egy síkba, ha az általuk kifeszített parallelepipedon térfogata 0, azaz amikor $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. De

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (-1)\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 3\cdot t - (-1)\cdot 2\cdot t - 5\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 1 =$$

$$= 0 - 20 - 3t + 2t - 15 - 0 = -35 - t \Longrightarrow t = -35.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Állapítsa meg, hogy az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok* $t \in \mathbb{R}$ *milyen értékeire komplanárisak.*

Megoldás: A vektorok pontosan akkor esnek egy síkba, ha az általuk kifeszített parallelepipedon térfogata 0, azaz amikor $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. De

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (-1)\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 3\cdot t - (-1)\cdot 2\cdot t - 5\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 1 =$$

$$= 0 - 20 - 3t + 2t - 15 - 0 = -35 - t \Longrightarrow t = -35.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Állapítsa meg, hogy az $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$ *vektorok* $t \in \mathbb{R}$ *milyen értékeire komplanárisak.*

Megoldás: A vektorok pontosan akkor esnek egy síkba, ha az általuk kifeszített parallelepipedon térfogata 0, azaz amikor $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. De

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (-1)\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 3\cdot t - (-1)\cdot 2\cdot t - 5\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 1 =$$

$$= 0 - 20 - 3t + 2t - 15 - 0 = -35 - t \Longrightarrow t = -35.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Mennyi az $A(-1,2,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(-2,1,-1)$, $D(3,-1,0)$ csúcsú tetraéder térfogata?

Megoldás:

$$V = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) \cdot (-3) - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot (-1) \cdot (4) = 2 + 8 - 6 - 12 + 1 - 8 = -15.$

$$V = \frac{|-15|}{6} = \frac{5}{2}.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Mennyi az $A(-1, 2, 1)$, $B(1, 1, -1)$, $C(-2, 1, -1)$, $D(3, -1, 0)$ *csúcsú tetraéder térfogata?*

Megoldás:

$$V = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) \cdot (-3) - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot (-1) \cdot (4) = 2 + 8 - 6 - 12 + 1 - 8 = -15.$

$$V = \frac{|-15|}{6} = \frac{5}{2}.$$

Példák a vegyes szorzat használatára

Feladat

Mennyi az $A(-1,2,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(-2,1,-1)$, $D(3,-1,0)$ *csúcsú tetraéder térfogata?*

Megoldás:

$$V = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 2\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2)\cdot 4 + (-2)\cdot(-1)\cdot(-3) - 2\cdot(-2)\cdot(-3) - (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) - (-2)\cdot(-1)\cdot(4) = 2 + 8 - 6 - 12 + 1 - 8 = -15.$

$$V = \frac{|-15|}{6} = \frac{5}{2}.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Mennyi az $A(-1,2,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(-2,1,-1)$, $D(3,-1,0)$ csúcsú tetraéder térfogata?

Megoldás:

$$V = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) \cdot (-3) - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot (-1) \cdot (4) = 2 + 8 - 6 - 12 + 1 - 8 = -15.$

$$V = \frac{|-15|}{6} = \frac{5}{2}.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Mennyi az $A(-1,2,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(-2,1,-1)$, $D(3,-1,0)$ csúcsú tetraéder térfogata?

Megoldás:

$$V = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) \cdot (-3) - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot (-1) \cdot (4) = 2 + 8 - 6 - 12 + 1 - 8 = -15.$

$$V = \frac{|-15|}{6} = \frac{5}{2}.$$

Példák a vegyes szorzat használatára

Feladat

Mennyi az $A(-1,2,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(-2,1,-1)$, $D(3,-1,0)$ csúcsú tetraéder térfogata?

Megoldás:

$$V = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) \cdot (-3) - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot (-1) \cdot (4) = 2 + 8 - 6 - 12 + 1 - 8 = -15.$

$$V = \frac{|-15|}{6} = \frac{5}{2}.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Mennyi az $A(-1,2,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(-2,1,-1)$, $D(3,-1,0)$ csúcsú tetraéder térfogata?

Megoldás:

$$V = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 2\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2)\cdot 4 + (-2)\cdot(-1)\cdot(-3) - 2\cdot(-2)\cdot(-3) - (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) - (-2)\cdot(-1)\cdot(4) = 2 + 8 - 6 - 12 + 1 - 8 = -15.$

$$V = \frac{|-15|}{6} = \frac{5}{2}.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Mennyi az $A(-1, 2, 1)$, $B(1, 1, -1)$, $C(-2, 1, -1)$, $D(3, -1, 0)$ csúcsú tetraéder térfogata?

Megoldás:

$$V = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) \cdot (-3) - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot (-1) \cdot (4) = 2 + 8 - 6 - 12 + 1 - 8 = -15.$

$$V = \frac{|-15|}{6} = \frac{5}{2}.$$

PÉLDÁK A VEGYES SZORZAT HASZNÁLATÁRA

FELADAT

Mennyi az $A(-1,2,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(-2,1,-1)$, $D(3,-1,0)$ *csúcsú tetraéder térfogata?*

Megoldás:

$$V = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) \cdot (-3) - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot (-1) \cdot (4) = 2 + 8 - 6 - 12 + 1 - 8 = -15.$

$$V = \frac{|-15|}{6} = \frac{5}{2}.$$

A kifejtési tétel

Állítás

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

Bizonyítás

A skaláris és vektoriális szorzat linearitása miatt elegendő leellenőrizni a képletet azokban az esetekben, amikor a szóban forgó vektorok mindegyike az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ standard bázis valamelyik vektora. Ezek az esetek egyenként végignézhetők. Például:

$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} = (\vec{i}\vec{j}) \cdot \vec{j} - (\vec{j}\vec{j}) \cdot \vec{i},$$
$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} = (\vec{i}\vec{k}) \cdot \vec{j} - (\vec{j}\vec{k}) \cdot \vec{i}.$$

A KIFEJTÉSI TÉTEL

ÁLLÍTÁS

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

BIZONYÍTÁS

A skaláris és vektoriális szorzat linearitása miatt elegendő leellenőrizni a képletet azokban az esetekben, amikor a szóban forgó vektorok mindegyike az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ standard bázis valamelyik vektora. Ezek az esetek egyenként végignézhetők. Például:

$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} = (\vec{i}\vec{j}) \cdot \vec{j} - (\vec{j}\vec{j}) \cdot \vec{i},$$
$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} = (\vec{i}\vec{k}) \cdot \vec{j} - (\vec{j}\vec{k}) \cdot \vec{i}.$$

A KIFEJTÉSI TÉTEL

ÁLLÍTÁS

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

BIZONYÍTÁS

A skaláris és vektoriális szorzat linearitása miatt elegendő leellenőrizni a képletet azokban az esetekben, amikor a szóban forgó vektorok mindegyike az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ standard bázis valamelyik vektora. Ezek az esetek egyenként végignézhetők. Például:

$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} = (\vec{i}\vec{j}) \cdot \vec{j} - (\vec{j}\vec{j}) \cdot \vec{i},$$

$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} = (\vec{i}\vec{k}) \cdot \vec{j} - (\vec{j}\vec{k}) \cdot \vec{i}.$$

A KIFEJTÉSI TÉTEL

ÁLLÍTÁS

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

BIZONYÍTÁS

A skaláris és vektoriális szorzat linearitása miatt elegendő leellenőrizni a képletet azokban az esetekben, amikor a szóban forgó vektorok mindegyike az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ standard bázis valamelyik vektora. Ezek az esetek egyenként végignézhetők. Például:

$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} = (\vec{i}\vec{j}) \cdot \vec{j} - (\vec{j}\vec{j}) \cdot \vec{i},$$

$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} = (\vec{i}\vec{k}) \cdot \vec{j} - (\vec{j}\vec{k}) \cdot \vec{i}.$$

A KIFEJTÉSI TÉTEL

ÁLLÍTÁS

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

BIZONYÍTÁS

A skaláris és vektoriális szorzat linearitása miatt elegendő leellenőrizni a képletet azokban az esetekben, amikor a szóban forgó vektorok mindegyike az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ standard bázis valamelyik vektora. Ezek az esetek egyenként végignézhetők. Például:

$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} = (\vec{i}\vec{j}) \cdot \vec{j} - (\vec{j}\vec{j}) \cdot \vec{i},$$
$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} = (\vec{i}\vec{k}) \cdot \vec{j} - (\vec{j}\vec{k}) \cdot \vec{i}.$$

JACOBI-AZONOSSÁG

ÁLLÍTÁS

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

BIZONYÍTÁS

A kifejtési tétel miatt

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a} \\ (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{b}\vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{c}\vec{a}) \cdot \vec{b} \\ (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} &= (\vec{c}\vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

Összeadva a jobb oldalakat, és felhasználva a skaláris szorzat szimmetriáját, minden tag kiesik.

Jacobi-azonosság

Állítás

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Bizonyítás

A kifejtési tétel miatt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a}$$
$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b}\vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{c}\vec{a}) \cdot \vec{b}$$
$$(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = (\vec{c}\vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Összeadva a jobb oldalakat, és felhasználva a skaláris szorzat szimmetriáját, minden tag kiesik.

JACOBI-AZONOSSÁG

ÁLLÍTÁS

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

BIZONYÍTÁS

A kifejtési tétel miatt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b}\vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{c}\vec{a}) \cdot \vec{b}$$

$$(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = (\vec{c}\vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Összeadva a jobb oldalakat, és felhasználva a skaláris szorzat szimmetriáját, minden tag kiesik.

JACOBI-AZONOSSÁG

ÁLLÍTÁS

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

BIZONYÍTÁS

A kifejtési tétel miatt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a}$$
$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b}\vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{c}\vec{a}) \cdot \vec{b}$$
$$(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = (\vec{c}\vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Összeadva a jobb oldalakat, és felhasználva a skaláris szorzat szimmetriáját, minden tag kiesik.

JACOBI-AZONOSSÁG

ÁLLÍTÁS

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

BIZONYÍTÁS

A kifejtési tétel miatt

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a} \\ (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{b}\vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{c}\vec{a}) \cdot \vec{b} \\ (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} &= (\vec{c}\vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c}.\end{aligned}$$

Összeadva a jobb oldalakat, és felhasználva a skaláris szorzat szimmetriáját, minden tag kiesik.

JACOBI-AZONOSSÁG

ÁLLÍTÁS

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

BIZONYÍTÁS

A kifejtési tétel miatt

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a} \\ (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{b}\vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{c}\vec{a}) \cdot \vec{b} \\ (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} &= (\vec{c}\vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c}.\end{aligned}$$

Összeadva a jobb oldalakat, és felhasználva a skaláris szorzat szimmetriáját, minden tag kiesik.