27. ELŐADÁS: TÉRBELI KOORDINÁTAGEOMETRIA GYAKORLÓFELADATOK

1. PÉLDA

FELADAT

Döntsük el, hogy a megadott egyenletrendszerek közül melyek adják meg ugyanazt az egyenest:

1. $x = 5 - 3t,\ y = -7 + 2t,\ z = 2 - t;$
2. $\frac{x+7}{-6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{-12};$
3. $\frac{x-2}{18} = \frac{y+5}{-12} = \frac{z+1}{6};$
4. $x = 14 + 9t,\ y = -13 - 6t,\ z = 5 + 3t.$

Megoldás:

Azonos irányúak $\Longrightarrow$ párhuzamos irányvektoraik vannak.

Irányvektorok:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. PÉLDA

FELADAT

Döntsük el, hogy a megadott egyenletrendszerek közül melyek adják meg ugyanazt az egyenest:

1. $x = 5 - 3t,\ y = -7 + 2t,\ z = 2 - t;$
2. $\frac{x+7}{-6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{-12};$
3. $\frac{x-2}{18} = \frac{y+5}{-12} = \frac{z+1}{6};$
4. $x = 14 + 9t,\ y = -13 - 6t,\ z = 5 + 3t.$

Megoldás:

Azonos irányúak $\Longrightarrow$ párhuzamos irányvektoraik vannak.

Irányvektorok:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. PÉLDA

FELADAT

Döntsük el, hogy a megadott egyenletrendszerek közül melyek adják meg ugyanazt az egyenest:

1. $x = 5 - 3t,\ y = -7 + 2t,\ z = 2 - t;$
2. $\frac{x+7}{-6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{-12};$
3. $\frac{x-2}{18} = \frac{y+5}{-12} = \frac{z+1}{6};$
4. $x = 14 + 9t,\ y = -13 - 6t,\ z = 5 + 3t.$

Megoldás:

Azonos irányúak $\Longrightarrow$ párhuzamos irányvektoraik vannak.

Irányvektorok:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. PÉLDA

FELADAT

Döntsük el, hogy a megadott egyenletrendszerek közül melyek adják meg ugyanazt az egyenest:

1. $x = 5 - 3t,\ y = -7 + 2t,\ z = 2 - t;$
2. $\frac{x+7}{-6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{-12};$
3. $\frac{x-2}{18} = \frac{y+5}{-12} = \frac{z+1}{6};$
4. $x = 14 + 9t,\ y = -13 - 6t,\ z = 5 + 3t.$

Megoldás:

Azonos irányúak $\Longrightarrow$ párhuzamos irányvektoraik vannak.

Irányvektorok:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. PÉLDA

FELADAT

Döntsük el, hogy a megadott egyenletrendszerek közül melyek adják meg ugyanazt az egyenest:

1. $x = 5 - 3t,\ y = -7 + 2t,\ z = 2 - t;$
2. $\frac{x+7}{-6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{-12};$
3. $\frac{x-2}{18} = \frac{y+5}{-12} = \frac{z+1}{6};$
4. $x = 14 + 9t,\ y = -13 - 6t,\ z = 5 + 3t.$

Megoldás:

Azonos irányúak $\Longrightarrow$ párhuzamos irányvektoraik vannak.

Irányvektorok:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. PÉLDA

Ebből:

$$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2,\ \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_3,\ \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_4.$$

Az első egyenes egy pontja pl. $(5,-7,2)$. Ez pontja a harmadik vagy a negyedik egyenletnek?

$$\frac{5-2}{18} = \frac{1}{6} = \frac{(-7)+5}{-12} \neq \frac{2+1}{6} \Longrightarrow$$

az első és a harmadik egyenes különböző.

$$5 = 14 + 9t \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow -7 = -13 + 6,\ 2 = 5 - 3$$

Tehát az első és a negyedik egyenes egybeesik. Emiatt a harmadik és a negyedik egyenes különböző.

1. PÉLDA

Ebből:

$$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2,\ \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_3,\ \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_4.$$

Az első egyenes egy pontja pl. $(5, -7, 2)$. Ez pontja a harmadik vagy a negyedik egyenletnek?

$$\frac{5-2}{18} = \frac{1}{6} = \frac{(-7)+5}{-12} \neq \frac{2+1}{6} \Longrightarrow$$

az első és a harmadik egyenes különböző.

$$5 = 14 + 9t \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow -7 = -13 + 6,\ 2 = 5 - 3$$

Tehát az első és a negyedik egyenes egybeesik. Emiatt a harmadik és a negyedik egyenes különböző.

1. PÉLDA

Ebből:

$$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_3, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_4.$$

Az első egyenes egy pontja pl. $(5, -7, 2)$. Ez pontja a harmadik vagy a negyedik egyenletnek?

$$\frac{5-2}{18} = \frac{1}{6} = \frac{(-7)+5}{-12} \neq \frac{2+1}{6} \Longrightarrow$$

az első és a harmadik egyenes különböző.

$$5 = 14 + 9t \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow -7 = -13 + 6, 2 = 5 - 3$$

Tehát az első és a negyedik egyenes egybeesik. Emiatt a harmadik és a negyedik egyenes különböző.

1. PÉLDA

Ebből:

$$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_3, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_4.$$

Az első egyenes egy pontja pl. $(5, -7, 2)$. Ez pontja a harmadik vagy a negyedik egyenletnek?

$$\frac{5-2}{18} = \frac{1}{6} = \frac{(-7)+5}{-12} \neq \frac{2+1}{6} \Longrightarrow$$

az első és a harmadik egyenes különböző.

$$5 = 14 + 9t \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow -7 = -13 + 6, 2 = 5 - 3$$

Tehát az első és a negyedik egyenes egybeesik. Emiatt a harmadik és a negyedik egyenes különböző.

1. PÉLDA

Ebből:

$$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2,\ \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_3,\ \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_4.$$

Az első egyenes egy pontja pl. $(5, -7, 2)$. Ez pontja a harmadik vagy a negyedik egyenletnek?

$$\frac{5-2}{18} = \frac{1}{6} = \frac{(-7)+5}{-12} \neq \frac{2+1}{6} \Longrightarrow$$

az első és a harmadik egyenes különböző.

$$5 = 14 + 9t \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow -7 = -13 + 6, 2 = 5 - 3$$

Tehát az első és a negyedik egyenes egybeesik. Emiatt a harmadik és a negyedik egyenes különböző.

1. PÉLDA

Ebből:

$$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_3, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_4.$$

Az első egyenes egy pontja pl. $(5, -7, 2)$. Ez pontja a harmadik vagy a negyedik egyenletnek?

$$\frac{5-2}{18} = \frac{1}{6} = \frac{(-7)+5}{-12} \neq \frac{2+1}{6} \Longrightarrow$$

az első és a harmadik egyenes különböző.

$$5 = 14 + 9t \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow -7 = -13 + 6, 2 = 5 - 3$$

Tehát az első és a negyedik egyenes egybeesik. Emiatt a harmadik és a negyedik egyenes különböző.

1. PÉLDA

Ebből:

$$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_3, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_4.$$

Az első egyenes egy pontja pl. $(5, -7, 2)$. Ez pontja a harmadik vagy a negyedik egyenletnek?

$$\frac{5-2}{18} = \frac{1}{6} = \frac{(-7)+5}{-12} \neq \frac{2+1}{6} \Longrightarrow$$

az első és a harmadik egyenes különböző.

$$5 = 14 + 9t \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow -7 = -13 + 6, 2 = 5 - 3$$

Tehát az első és a negyedik egyenes egybeesik. Emiatt a harmadik és a negyedik egyenes különböző.

1. PÉLDA

Ebből:

$$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_3, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_4.$$

Az első egyenes egy pontja pl. $(5, -7, 2)$. Ez pontja a harmadik vagy a negyedik egyenletnek?

$$\frac{5-2}{18} = \frac{1}{6} = \frac{(-7)+5}{-12} \neq \frac{2+1}{6} \Longrightarrow$$

az első és a harmadik egyenes különböző.

$$5 = 14 + 9t \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow -7 = -13 + 6, 2 = 5 - 3$$

Tehát az első és a negyedik egyenes egybeesik. Emiatt a harmadik és a negyedik egyenes különböző.

1. PÉLDA

Ebből:

$$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_3, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_4.$$

Az első egyenes egy pontja pl. $(5, -7, 2)$. Ez pontja a harmadik vagy a negyedik egyenletnek?

$$\frac{5-2}{18} = \frac{1}{6} = \frac{(-7)+5}{-12} \neq \frac{2+1}{6} \Longrightarrow$$

az első és a harmadik egyenes különböző.

$$5 = 14 + 9t \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow -7 = -13 + 6, 2 = 5 - 3$$

Tehát az első és a negyedik egyenes egybeesik. Emiatt a harmadik és a negyedik egyenes különböző.

1. PÉLDA

Ebből:

$$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_3, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_4.$$

Az első egyenes egy pontja pl. $(5, -7, 2)$. Ez pontja a harmadik vagy a negyedik egyenletnek?

$$\frac{5-2}{18} = \frac{1}{6} = \frac{(-7)+5}{-12} \neq \frac{2+1}{6} \Longrightarrow$$

az első és a harmadik egyenes különböző.

$$5 = 14 + 9t \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow -7 = -13 + 6, 2 = 5 - 3$$

Tehát az első és a negyedik egyenes egybeesik. Emiatt a harmadik és a negyedik egyenes különböző.

1. PÉLDA

Ebből:

$$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_3, \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_4.$$

Az első egyenes egy pontja pl. $(5, -7, 2)$. Ez pontja a harmadik vagy a negyedik egyenletnek?

$$\frac{5-2}{18} = \frac{1}{6} = \frac{(-7)+5}{-12} \neq \frac{2+1}{6} \Longrightarrow$$

az első és a harmadik egyenes különböző.

$$5 = 14 + 9t \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow -7 = -13 + 6, 2 = 5 - 3$$

Tehát az első és a negyedik egyenes egybeesik. Emiatt a harmadik és a negyedik egyenes különböző.

2. PÉLDA

FELADAT

Tükrözzük az $x = 7 - 8t$, $y = -4 + 6t$, $z = 9t$ egyenletű e egyenest a $C(-4, 6, 1)$ pontra. Mi a tükörkép egyenletrendszere?

Megoldás:

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy pontját és egy irányvektorát,
2. a pontot tükrözzük C-re,
3. az egyenes tükörképe párhuzamos az eredetivel, így fel kell írni a tükrözött ponton átmenő, az eredetivel párhuzamos egyenest.

$$P_0(7, -4, 0),\ \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

2. PÉLDA

FELADAT

Tükrözzük az $x = 7 - 8t$, $y = -4 + 6t$, $z = 9t$ egyenletű e egyenest a $C(-4, 6, 1)$ pontra. Mi a tükörkép egyenletrendszere?

Megoldás:

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy pontját és egy irányvektorát,
2. a pontot tükrözzük C-re,
3. az egyenes tükörképe párhuzamos az eredetivel, így fel kell írni a tükrözött ponton átmenő, az eredetivel párhuzamos egyenest.

$$P_0(7, -4, 0),\ \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

2. PÉLDA

FELADAT

Tükrözzük az $x = 7 - 8t$, $y = -4 + 6t$, $z = 9t$ egyenletű e egyenest a $C(-4, 6, 1)$ pontra. Mi a tükörkép egyenletrendszere?

Megoldás:

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy pontját és egy irányvektorát,
2. a pontot tükrözzük C-re,
3. az egyenes tükörképe párhuzamos az eredetivel, így fel kell írni a tükrözött ponton átmenő, az eredetivel párhuzamos egyenest.

$$P_0(7, -4, 0),\ \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

2. PÉLDA

FELADAT

Tükrözzük az $x = 7 - 8t$, $y = -4 + 6t$, $z = 9t$ egyenletű e egyenest a $C(-4, 6, 1)$ pontra. Mi a tükörkép egyenletrendszere?

Megoldás:

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy pontját és egy irányvektorát,
2. a pontot tükrözzük C-re,
3. az egyenes tükörképe párhuzamos az eredetivel, így fel kell írni a tükrözött ponton átmenő, az eredetivel párhuzamos egyenest.

$$P_0(7, -4, 0),\ \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

2. PÉLDA

FELADAT

Tükrözzük az $x = 7 - 8t$, $y = -4 + 6t$, $z = 9t$ egyenletű e egyenest a $C(-4, 6, 1)$ pontra. Mi a tükörkép egyenletrendszere?

Megoldás:

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy pontját és egy irányvektorát,
2. a pontot tükrözzük C-re,
3. az egyenes tükörképe párhuzamos az eredetivel, így fel kell írni a tükrözött ponton átmenő, az eredetivel párhuzamos egyenest.

$$P_0(7, -4, 0),\ \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

2. PÉLDA

FELADAT

Tükrözzük az $x = 7 - 8t$, $y = -4 + 6t$, $z = 9t$ egyenletű e egyenest a $C(-4, 6, 1)$ pontra. Mi a tükörkép egyenletrendszere?

Megoldás:

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy pontját és egy irányvektorát,
2. a pontot tükrözzük C-re,
3. az egyenes tükörképe párhuzamos az eredetivel, így fel kell írni a tükrözött ponton átmenő, az eredetivel párhuzamos egyenest.

$$P_0(7, -4, 0),\ \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

2. PÉLDA

FELADAT

Tükrözzük az $x = 7 - 8t$, $y = -4 + 6t$, $z = 9t$ *egyenletű e egyenest a* $C(-4, 6, 1)$ *pontra. Mi a tükörkép egyenletrendszere?*

Megoldás:

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy pontját és egy irányvektorát,
2. a pontot tükrözzük C-re,
3. az egyenes tükörképe párhuzamos az eredetivel, így fel kell írni a tükrözött ponton átmenő, az eredetivel párhuzamos egyenest.

$$P_0(7, -4, 0),\ \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

2. PÉLDA

FELADAT

Tükrözzük az $x = 7 - 8t$, $y = -4 + 6t$, $z = 9t$ egyenletű e egyenest a $C(-4, 6, 1)$ pontra. Mi a tükörkép egyenletrendszere?

Megoldás:

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy pontját és egy irányvektorát,
2. a pontot tükrözzük C-re,
3. az egyenes tükörképe párhuzamos az eredetivel, így fel kell írni a tükrözött ponton átmenő, az eredetivel párhuzamos egyenest.

$$P_0(7, -4, 0),\ \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

2. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0C} = \vec{c} - \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} -11 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CP_0^t} = \overrightarrow{P_0C} \Longrightarrow \vec{p}_0^{\,t} = \vec{c} + \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -15 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Azaz $P_0^t = (-15, 16, 2)$. Az egyenes egyenletrendszere:

$$x = -15 - 8t, y = 16 + 6t, z = 2 + 9t.$$

2. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0C} = \vec{c} - \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} -11 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CP_0^t} = \overrightarrow{P_0C} \Longrightarrow \vec{p}_0^t = \vec{c} + \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -15 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Azaz $P_0^t = (-15, 16, 2)$. Az egyenes egyenletrendszere:

$$x = -15 - 8t, y = 16 + 6t, z = 2 + 9t.$$

2. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0C} = \vec{c} - \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} -11 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CP_0^t} = \overrightarrow{P_0C} \Longrightarrow \vec{p}_0^{\,t} = \vec{c} + \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -15 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Azaz $P_0^t = (-15, 16, 2)$. Az egyenes egyenletrendszere:

$$x = -15 - 8t, y = 16 + 6t, z = 2 + 9t.$$

2. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0C} = \vec{c} - \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} -11 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CP_0^t} = \overrightarrow{P_0C} \Longrightarrow \vec{p}_0^{\,t} = \vec{c} + \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -15 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Azaz $P_0^t = (-15, 16, 2)$. Az egyenes egyenletrendszere:

$$x = -15 - 8t, y = 16 + 6t, z = 2 + 9t.$$

2. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0C} = \vec{c} - \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} -11 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CP_0^t} = \overrightarrow{P_0C} \Longrightarrow \vec{p}_0^{\,t} = \vec{c} + \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -15 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Azaz $P_0^t = (-15, 16, 2)$. Az egyenes egyenletrendszere:

$$x = -15 - 8t, y = 16 + 6t, z = 2 + 9t.$$

2. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0C} = \vec{c} - \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} -11 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CP_0^t} = \overrightarrow{P_0C} \Longrightarrow \vec{p}_0^t = \vec{c} + \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -15 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Azaz $P_0^t = (-15, 16, 2)$. Az egyenes egyenletrendszere:

$$x = -15 - 8t, y = 16 + 6t, z = 2 + 9t.$$

2. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0C} = \vec{c} - \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} -11 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CP_0^t} = \overrightarrow{P_0C} \Longrightarrow \vec{p}_0^{\,t} = \vec{c} + \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -15 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Azaz $P_0^t = (-15, 16, 2)$. Az egyenes egyenletrendszere:

$$x = -15 - 8t, y = 16 + 6t, z = 2 + 9t.$$

2. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0C} = \vec{c} - \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} -11 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CP_0^t} = \overrightarrow{P_0C} \Longrightarrow \vec{p}_0^{\,t} = \vec{c} + \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -15 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Azaz $P_0^t = (-15, 16, 2)$. Az egyenes egyenletrendszere:

$$x = -15 - 8t, y = 16 + 6t, z = 2 + 9t.$$

2. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0C} = \vec{c} - \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} -11 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CP_0^t} = \overrightarrow{P_0C} \Longrightarrow \vec{p}_0^{\,t} = \vec{c} + \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -15 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Azaz $P_0^t = (-15, 16, 2)$. Az egyenes egyenletrendszere:

$$x = -15 - 8t, y = 16 + 6t, z = 2 + 9t.$$

3. PÉLDA

FELADAT

Tükrözzük az $C(-4,6,1)$ pontot az $x = 7 - 8t$, $y = 4 + 6t$, $z = 9t$ egyenletű e egyenesre. Mik a tükörkép koordinátái?

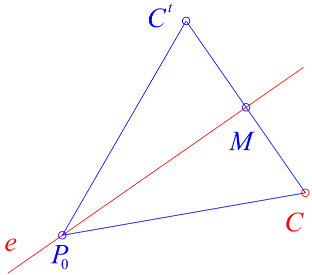

FIGURE: A C pont tükrözése az e egyenesre

3. PÉLDA

FELADAT

Tükrözzük az $C(-4,6,1)$ pontot az $x = 7 - 8t$, $y = 4 + 6t$, $z = 9t$ egyenletű e egyenesre. Mik a tükörkép koordinátái?

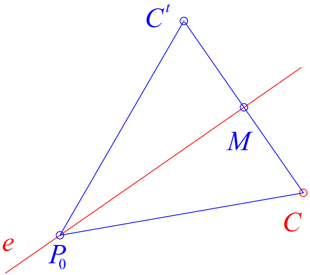

FIGURE: A C pont tükrözése az e egyenesre

3. PÉLDA

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy P_0 pontját és $\vec{v}$ irányvektorát,
2. a $\overrightarrow{P_0C}$ vektort felbontjuk $\vec{v}$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, ezek lesznek rendre a $\overrightarrow{P_0M}$ és $\overrightarrow{MC}$ vektorok.
3. $\overrightarrow{P_0C^t} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{MC}$ segítségével C^t koordinátái kiszámolhatók.

e: $x = 7 - 8t, y = 4 + 6t, z = 9t \Longrightarrow$

$$P_0 = (7,4,0), \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0C}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{(-8)\cdot(-11) + 2\cdot 6 + 1\cdot 9}{(-8)^2 + 6^2 + 9^2} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. PÉLDA

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy P_0 pontját és $\vec{v}$ irányvektorát,
2. a $\overrightarrow{P_0C}$ vektort felbontjuk $\vec{v}$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, ezek lesznek rendre a $\overrightarrow{P_0M}$ és $\overrightarrow{MC}$ vektorok.
3. $\overrightarrow{P_0C^t} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{MC}$ segítségével C^t koordinátái kiszámolhatók.

e: $x = 7 - 8t, y = 4 + 6t, z = 9t \Longrightarrow$

$$P_0 = (7, 4, 0), \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0C}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{(-8)\cdot(-11) + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 9}{(-8)^2 + 6^2 + 9^2} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. PÉLDA

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy P_0 pontját és $\vec{v}$ irányvektorát,
2. a $\overrightarrow{P_0C}$ vektort felbontjuk $\vec{v}$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, ezek lesznek rendre a $\overrightarrow{P_0M}$ és $\overrightarrow{MC}$ vektorok.
3. $\overrightarrow{P_0C^t} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{MC}$ segítségével C^t koordinátái kiszámolhatók.

e: $x = 7 - 8t, y = 4 + 6t, z = 9t \Longrightarrow$

$$P_0 = (7, 4, 0), \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0C}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{(-8)\cdot(-11) + 2\cdot 6 + 1 \cdot 9}{(-8)^2 + 6^2 + 9^2} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. PÉLDA

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy P_0 pontját és $\vec{v}$ irányvektorát,
2. a $\overrightarrow{P_0C}$ vektort felbontjuk $\vec{v}$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, ezek lesznek rendre a $\overrightarrow{P_0M}$ és $\overrightarrow{MC}$ vektorok.
3. $\overrightarrow{P_0C^t} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{MC}$ segítségével C^t koordinátái kiszámolhatók.

e: $x = 7 - 8t, y = 4 + 6t, z = 9t \Longrightarrow$

$$P_0 = (7, 4, 0), \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0C}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{(-8)\cdot(-11) + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 9}{(-8)^2 + 6^2 + 9^2} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. PÉLDA

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy P_0 pontját és $\vec{v}$ irányvektorát,
2. a $\overrightarrow{P_0C}$ vektort felbontjuk $\vec{v}$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, ezek lesznek rendre a $\overrightarrow{P_0M}$ és $\overrightarrow{MC}$ vektorok.
3. $\overrightarrow{P_0C^t} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{MC}$ segítségével C^t koordinátái kiszámolhatók.

e: $x = 7 - 8t, y = 4 + 6t, z = 9t \Longrightarrow$

$$P_0 = (7,4,0), \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0C}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{(-8)\cdot(-11) + 2\cdot 6 + 1\cdot 9}{(-8)^2 + 6^2 + 9^2} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. PÉLDA

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy P_0 pontját és $\vec{v}$ irányvektorát,
2. a $\overrightarrow{P_0C}$ vektort felbontjuk $\vec{v}$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, ezek lesznek rendre a $\overrightarrow{P_0M}$ és $\overrightarrow{MC}$ vektorok.
3. $\overrightarrow{P_0C^t} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{MC}$ segítségével C^t koordinátái kiszámolhatók.

e: $x = 7 - 8t, y = 4 + 6t, z = 9t \Longrightarrow$

$$P_0 = (7, 4, 0), \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0C}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{(-8)\cdot(-11) + 2\cdot 6 + 1\cdot 9}{(-8)^2 + 6^2 + 9^2} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. PÉLDA

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy P_0 pontját és $\vec{v}$ irányvektorát,
2. a $\overrightarrow{P_0C}$ vektort felbontjuk $\vec{v}$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, ezek lesznek rendre a $\overrightarrow{P_0M}$ és $\overrightarrow{MC}$ vektorok.
3. $\overrightarrow{P_0C^t} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{MC}$ segítségével C^t koordinátái kiszámolhatók.

e: $x = 7 - 8t, y = 4 + 6t, z = 9t \Longrightarrow$

$$P_0 = (7, 4, 0), \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0C}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{(-8)\cdot(-11) + 2\cdot 6 + 1\cdot 9}{(-8)^2 + 6^2 + 9^2} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. PÉLDA

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy P_0 pontját és $\vec{v}$ irányvektorát,
2. a $\overrightarrow{P_0C}$ vektort felbontjuk $\vec{v}$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, ezek lesznek rendre a $\overrightarrow{P_0M}$ és $\overrightarrow{MC}$ vektorok.
3. $\overrightarrow{P_0C^t} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{MC}$ segítségével C^t koordinátái kiszámolhatók.

e: $x = 7 - 8t, y = 4 + 6t, z = 9t \Longrightarrow$

$$P_0 = (7, 4, 0), \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0C}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{(-8)\cdot(-11) + 2\cdot 6 + 1\cdot 9}{(-8)^2 + 6^2 + 9^2} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. PÉLDA

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy P_0 pontját és $\vec{v}$ irányvektorát,
2. a $\overrightarrow{P_0C}$ vektort felbontjuk $\vec{v}$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, ezek lesznek rendre a $\overrightarrow{P_0M}$ és $\overrightarrow{MC}$ vektorok.
3. $\overrightarrow{P_0C^t} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{MC}$ segítségével C^t koordinátái kiszámolhatók.

e: $x = 7 - 8t, y = 4 + 6t, z = 9t \Longrightarrow$

$$P_0 = (7, 4, 0), \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0C}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{(-8)\cdot(-11) + 2\cdot 6 + 1\cdot 9}{(-8)^2 + 6^2 + 9^2} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. PÉLDA

Terv:

1. leolvassuk az egyenes egy P_0 pontját és $\vec{v}$ irányvektorát,
2. a $\overrightarrow{P_0C}$ vektort felbontjuk $\vec{v}$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, ezek lesznek rendre a $\overrightarrow{P_0M}$ és $\overrightarrow{MC}$ vektorok.
3. $\overrightarrow{P_0C^t} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{MC}$ segítségével C^t koordinátái kiszámolhatók.

e: $x = 7 - 8t, y = 4 + 6t, z = 9t \Longrightarrow$

$$P_0 = (7, 4, 0), \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0C}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{(-8)\cdot(-11) + 2\cdot 6 + 1\cdot 9}{(-8)^2 + 6^2 + 9^2} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0M} = \begin{bmatrix} -872/181 \\ 654/181 \\ 981/181 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{MC^t} = -\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} 1119/181 \\ 292/181 \\ 800/181 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c}^t = \vec{p}_0 + \overrightarrow{P_0M} + \overrightarrow{MC^t} = \begin{bmatrix} 1514/181 \\ 1670/181 \\ 1781/181 \end{bmatrix}$$

Azaz

$$C^t = (1514/181, 1670/181, 1781/181).$$

3. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0M} = \begin{bmatrix} -872/181 \\ 654/181 \\ 981/181 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{MC^t} = -\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} 1119/181 \\ 292/181 \\ 800/181 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c}^t = \vec{p}_0 + \overrightarrow{P_0M} + \overrightarrow{MC^t} = \begin{bmatrix} 1514/181 \\ 1670/181 \\ 1781/181 \end{bmatrix}$$

Azaz

$$C^t = (1514/181, 1670/181, 1781/181).$$

3. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0M} = \begin{bmatrix} -872/181 \\ 654/181 \\ 981/181 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{MC^t} = -\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} 1119/181 \\ 292/181 \\ 800/181 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c}^t = \vec{p}_0 + \overrightarrow{P_0M} + \overrightarrow{MC^t} = \begin{bmatrix} 1514/181 \\ 1670/181 \\ 1781/181 \end{bmatrix}$$

Azaz

$$C^t = (1514/181, 1670/181, 1781/181).$$

3. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0M} = \begin{bmatrix} -872/181 \\ 654/181 \\ 981/181 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{MC^t} = -\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} 1119/181 \\ 292/181 \\ 800/181 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c}^t = \vec{p}_0 + \overrightarrow{P_0M} + \overrightarrow{MC^t} = \begin{bmatrix} 1514/181 \\ 1670/181 \\ 1781/181 \end{bmatrix}$$

Azaz

$$C^t = (1514/181, 1670/181, 1781/181).$$

3. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0M} = \begin{bmatrix} -872/181 \\ 654/181 \\ 981/181 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{MC^t} = -\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} 1119/181 \\ 292/181 \\ 800/181 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c}^t = \vec{p}_0 + \overrightarrow{P_0M} + \overrightarrow{MC^t} = \begin{bmatrix} 1514/181 \\ 1670/181 \\ 1781/181 \end{bmatrix}$$

Azaz

$$C^t = (1514/181, 1670/181, 1781/181).$$

3. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0M} = \begin{bmatrix} -872/181 \\ 654/181 \\ 981/181 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{MC^t} = -\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} 1119/181 \\ 292/181 \\ 800/181 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c}^t = \vec{p}_0 + \overrightarrow{P_0M} + \overrightarrow{MC^t} = \begin{bmatrix} 1514/181 \\ 1670/181 \\ 1781/181 \end{bmatrix}$$

Azaz

$$C^t = (1514/181, 1670/181, 1781/181).$$

3. PÉLDA

$$\overrightarrow{P_0M} = \begin{bmatrix} -872/181 \\ 654/181 \\ 981/181 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{MC^t} = -\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{P_0M} - \overrightarrow{P_0C} = \begin{bmatrix} 1119/181 \\ 292/181 \\ 800/181 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c}^t = \vec{p}_0 + \overrightarrow{P_0M} + \overrightarrow{MC^t} = \begin{bmatrix} 1514/181 \\ 1670/181 \\ 1781/181 \end{bmatrix}$$

Azaz

$$C^t = (1514/181, 1670/181, 1781/181).$$

4. PÉLDA

FELADAT

Számítsuk ki az $x + 9y + 4z + 7 = 0$ egyenletű sík és az $\frac{x+3}{4} = y - 6 = \frac{z}{9}$ egyenletrendszerű egyenes által bezárt szöget.

Ötlet: a fenti γ szög a sík normálvektorának és az egyenes irányvektorának a 90°-ra kiegészítő szöge (pótszöge), ha az irányvektort úgy választjuk, hogy a normálvektor meghatározta féltér felé mutasson, azaz ha a szögük 90°-nál nem nagyobb (skaláris szorzatuk nem negatív).

Normálvektor : $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$, irányvektor: $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$.

4. PÉLDA

FELADAT

Számítsuk ki az $x + 9y + 4z + 7 = 0$ egyenletű sík és az $\frac{x+3}{4} = y - 6 = \frac{z}{9}$ egyenletrendszerű egyenes által bezárt szöget.

Ötlet: a fenti γ szög a sík normálvektorának és az egyenes irányvektorának a $90°$-ra kiegészítő szöge (pótszöge), ha az irányvektort úgy választjuk, hogy a normálvektor meghatározta féltér felé mutasson, azaz ha a szögük $90°$-nál nem nagyobb (skaláris szorzatuk nem negatív).

Normálvektor : $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$, irányvektor: $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$.

4. PÉLDA

FELADAT

Számítsuk ki az $x + 9y + 4z + 7 = 0$ *egyenletű sík és az* $\frac{x+3}{4} = y - 6 = \frac{z}{9}$ *egyenletrendszerű egyenes által bezárt szöget.*

Ötlet: a fenti γ szög a sík normálvektorának és az egyenes irányvektorának a 90°-ra kiegészítő szöge (pótszöge), ha az irányvektort úgy választjuk, hogy a normálvektor meghatározta féltér felé mutasson, azaz ha a szögük 90°-nál nem nagyobb (skaláris szorzatuk nem negatív).

Normálvektor : $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$, irányvektor: $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$.

4. PÉLDA

FELADAT

Számítsuk ki az $x + 9y + 4z + 7 = 0$ *egyenletű sík és az* $\frac{x+3}{4} = y - 6 = \frac{z}{9}$ *egyenletrendszerű egyenes által bezárt szöget.*

Ötlet: a fenti γ szög a sík normálvektorának és az egyenes irányvektorának a $90°$-ra kiegészítő szöge (pótszöge), ha az irányvektort úgy választjuk, hogy a normálvektor meghatározta féltér felé mutasson, azaz ha a szögük $90°$-nál nem nagyobb (skaláris szorzatuk nem negatív).

Normálvektor : $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$, irányvektor: $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$.

4. PÉLDA

FELADAT

Számítsuk ki az $x+9y+4z+7=0$ egyenletű sík és az $\frac{x+3}{4}=y-6=\frac{z}{9}$ egyenletrendszerű egyenes által bezárt szöget.

Ötlet: a fenti γ szög a sík normálvektorának és az egyenes irányvektorának a 90°-ra kiegészítő szöge (pótszöge), ha az irányvektort úgy választjuk, hogy a normálvektor meghatározta féltér felé mutasson, azaz ha a szögük 90°-nál nem nagyobb (skaláris szorzatuk nem negatív).

Normálvektor : $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$, irányvektor: $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$.

4. PÉLDA

FELADAT

Számítsuk ki az $x + 9y + 4z + 7 = 0$ egyenletű sík és az $\frac{x+3}{4} = y - 6 = \frac{z}{9}$ egyenletrendszerű egyenes által bezárt szöget.

Ötlet: a fenti γ szög a sík normálvektorának és az egyenes irányvektorának a 90°-ra kiegészítő szöge (pótszöge), ha az irányvektort úgy választjuk, hogy a normálvektor meghatározta féltér felé mutasson, azaz ha a szögük 90°-nál nem nagyobb (skaláris szorzatuk nem negatív).

Normálvektor : $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$, irányvektor: $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$.

4. PÉLDA

FELADAT

Számítsuk ki az $x + 9y + 4z + 7 = 0$ egyenletű sík és az $\frac{x+3}{4} = y - 6 = \frac{z}{9}$ egyenletrendszerű egyenes által bezárt szöget.

Ötlet: a fenti γ szög a sík normálvektorának és az egyenes irányvektorának a $90°$-ra kiegészítő szöge (pótszöge), ha az irányvektort úgy választjuk, hogy a normálvektor meghatározta féltér felé mutasson, azaz ha a szögük $90°$-nál nem nagyobb (skaláris szorzatuk nem negatív).

$$\text{Normálvektor}: \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ irányvektor}: \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

4. PÉLDA

$$\frac{\vec{n}\vec{v}}{|\vec{n}|\vec{v}} = \cos(90^\circ - \gamma) = \sin\gamma.$$

$$\sin\gamma = \frac{1\cdot 4 + 9\cdot 1 + 4\cdot 9}{\sqrt{1^2+9^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2+9^2}} = \frac{49}{98} = \frac{1}{2}.$$

Ebből: $\gamma = 30^\circ$.

4. példa

$$\frac{\vec{n}\vec{v}}{|\vec{n}|\vec{v}} = \cos(90^\circ - \gamma) = \sin\gamma.$$

$$\sin\gamma = \frac{1\cdot 4 + 9\cdot 1 + 4\cdot 9}{\sqrt{1^2+9^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2+9^2}} = \frac{49}{98} = \frac{1}{2}.$$

Ebből: $\gamma = 30^\circ$.

4. PÉLDA

$$\frac{\vec{n}\vec{v}}{|\vec{n}|\vec{v}} = \cos(90^\circ - \gamma) = \sin\gamma.$$

$$\sin\gamma = \frac{1\cdot 4 + 9\cdot 1 + 4\cdot 9}{\sqrt{1^2+9^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2+9^2}} = \frac{49}{98} = \frac{1}{2}.$$

Ebből: $\gamma = 30^\circ$.

4. PÉLDA

$$\frac{\vec{n}\vec{v}}{|\vec{n}|\vec{v}} = \cos(90^\circ - \gamma) = \sin\gamma.$$

$$\sin\gamma = \frac{1\cdot 4 + 9\cdot 1 + 4\cdot 9}{\sqrt{1^2+9^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2+9^2}} = \frac{49}{98} = \frac{1}{2}.$$

Ebből: $\gamma = 30^\circ$.

5. PÉLDA

FELADAT

Az $x = -5 + 3t, y = 2t, z = 1 + t$ egyenletrendszerű egyenes mely pontja van egyenlő távol az $A(2, -4, 7)$ és az $B(0, -6, 5)$ pontoktól?

Megoldás:

Az egyenes pontjainak koordinátái: $(-5 + 3t, 2t, 1 + t)$. Ezen pont A-tól és B-től vett távolsága rendre

$$d_A = \sqrt{(-5 + 3t - 2)^2 + (2t + 4)^2 + (1 + t - 7)^2},$$

$$d_B = \sqrt{(-5 + 3t - 0)^2 + (2t - (-6))^2 + (1 + t - 5)^2}.$$

5. PÉLDA

FELADAT

Az $x = -5 + 3t, y = 2t, z = 1 + t$ egyenletrendszerű egyenes mely pontja van egyenlő távol az $A(2, -4, 7)$ és az $B(0, -6, 5)$ pontoktól?

Megoldás:

Az egyenes pontjainak koordinátái: $(-5 + 3t, 2t, 1 + t)$. Ezen pont A-tól és B-től vett távolsága rendre

$$d_A = \sqrt{(-5 + 3t - 2)^2 + (2t + 4)^2 + (1 + t - 7)^2},$$

$$d_B = \sqrt{(-5 + 3t - 0)^2 + (2t - (-6))^2 + (1 + t - 5)^2}.$$

5. PÉLDA

FELADAT

Az $x = -5 + 3t, y = 2t, z = 1 + t$ egyenletrendszerű egyenes mely pontja van egyenlő távol az $A(2, -4, 7)$ és az $B(0, -6, 5)$ pontoktól?

Megoldás:

Az egyenes pontjainak koordinátái: $(-5 + 3t, 2t, 1 + t)$. Ezen pont A-tól és B-től vett távolsága rendre

$$d_A = \sqrt{(-5 + 3t - 2)^2 + (2t + 4)^2 + (1 + t - 7)^2},$$

$$d_B = \sqrt{(-5 + 3t - 0)^2 + (2t - (-6))^2 + (1 + t - 5)^2}.$$

5. PÉLDA

FELADAT

Az $x = -5 + 3t, y = 2t, z = 1 + t$ egyenletrendszerű egyenes mely pontja van egyenlő távol az $A(2, -4, 7)$ és az $B(0, -6, 5)$ pontoktól?

Megoldás:

Az egyenes pontjainak koordinátái: $(-5 + 3t, 2t, 1 + t)$. Ezen pont A-tól és B-től vett távolsága rendre

$$d_A = \sqrt{(-5 + 3t - 2)^2 + (2t + 4)^2 + (1 + t - 7)^2},$$

$$d_B = \sqrt{(-5 + 3t - 0)^2 + (2t - (-6))^2 + (1 + t - 5)^2}.$$

5. PÉLDA

FELADAT

Az $x = -5 + 3t, y = 2t, z = 1 + t$ egyenletrendszerű egyenes mely pontja van egyenlő távol az $A(2, -4, 7)$ és az $B(0, -6, 5)$ pontoktól?

Megoldás:

Az egyenes pontjainak koordinátái: $(-5 + 3t, 2t, 1 + t)$. Ezen pont A-tól és B-től vett távolsága rendre

$$d_A = \sqrt{(-5 + 3t - 2)^2 + (2t + 4)^2 + (1 + t - 7)^2},$$

$$d_B = \sqrt{(-5 + 3t - 0)^2 + (2t - (-6))^2 + (1 + t - 5)^2}.$$

5. PÉLDA

FELADAT

Az $x = -5 + 3t, y = 2t, z = 1 + t$ egyenletrendszerű egyenes mely pontja van egyenlő távol az $A(2, -4, 7)$ és az $B(0, -6, 5)$ pontoktól?

Megoldás:

Az egyenes pontjainak koordinátái: $(-5 + 3t, 2t, 1 + t)$. Ezen pont A-tól és B-től vett távolsága rendre

$$d_A = \sqrt{(-5 + 3t - 2)^2 + (2t + 4)^2 + (1 + t - 7)^2},$$

$$d_B = \sqrt{(-5 + 3t - 0)^2 + (2t - (-6))^2 + (1 + t - 5)^2}.$$

5. PÉLDA

Ha $d_A = d_B$, akkor

$$(-5+3t-2)^2 + (2t-(-4))^2 + (1+t-7)^2 =$$
$$= (-5+3t-0)^2 + (2t-(-6))^2 + (1+t-5)^2,$$

$$9t^2 - 42t + 49 + 4t^2 + 16t + 16 + t^2 - 12t + 36 =$$
$$= 9t^2 - 30t + 25 + 4t^2 + 24t + 36 + t^2 - 8t + 16,$$

$$14t^2 - 38t + 101 = 14t^2 - 14t + 77$$

$$24 = 24t \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow P = (-2, 2, 2).$$

5. PÉLDA

Ha $d_A = d_B$, akkor

$$(-5+3t-2)^2 + (2t-(-4))^2 + (1+t-7)^2 =$$
$$= (-5+3t-0)^2 + (2t-(-6))^2 + (1+t-5)^2,$$

$$9t^2 - 42t + 49 + 4t^2 + 16t + 16 + t^2 - 12t + 36 =$$
$$= 9t^2 - 30t + 25 + 4t^2 + 24t + 36 + t^2 - 8t + 16,$$

$$14t^2 - 38t + 101 = 14t^2 - 14t + 77$$

$$24 = 24t \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow P = (-2, 2, 2).$$

5. PÉLDA

Ha $d_A = d_B$, akkor

$$(-5+3t-2)^2 + (2t-(-4))^2 + (1+t-7)^2 =$$
$$= (-5+3t-0)^2 + (2t-(-6))^2 + (1+t-5)^2,$$

$$9t^2 - 42t + 49 + 4t^2 + 16t + 16 + t^2 - 12t + 36 =$$
$$= 9t^2 - 30t + 25 + 4t^2 + 24t + 36 + t^2 - 8t + 16,$$

$$14t^2 - 38t + 101 = 14t^2 - 14t + 77$$

$$24 = 24t \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow P = (-2, 2, 2).$$

5. PÉLDA

Ha $d_A = d_B$, akkor

$$(-5+3t-2)^2+(2t-(-4))^2+(1+t-7)^2=$$
$$=(-5+3t-0)^2+(2t-(-6))^2+(1+t-5)^2,$$

$$9t^2-42t+49+4t^2+16t+16+t^2-12t+36=$$
$$=9t^2-30t+25+4t^2+24t+36+t^2-8t+16,$$

$$14t^2-38t+101=14t^2-14t+77$$

$$24=24t \Longrightarrow t=1 \Longrightarrow P=(-2,2,2).$$

5. PÉLDA

Ha $d_A = d_B$, akkor

$$(-5+3t-2)^2 + (2t-(-4))^2 + (1+t-7)^2 =$$
$$= (-5+3t-0)^2 + (2t-(-6))^2 + (1+t-5)^2,$$

$$9t^2 - 42t + 49 + 4t^2 + 16t + 16 + t^2 - 12t + 36 =$$
$$= 9t^2 - 30t + 25 + 4t^2 + 24t + 36 + t^2 - 8t + 16,$$

$$14t^2 - 38t + 101 = 14t^2 - 14t + 77$$

$$24 = 24t \implies t = 1 \implies P = (-2, 2, 2).$$

5. PÉLDA

Ha $d_A = d_B$, akkor

$$(-5+3t-2)^2 + (2t-(-4))^2 + (1+t-7)^2 =$$
$$= (-5+3t-0)^2 + (2t-(-6))^2 + (1+t-5)^2,$$

$$9t^2 - 42t + 49 + 4t^2 + 16t + 16 + t^2 - 12t + 36 =$$
$$= 9t^2 - 30t + 25 + 4t^2 + 24t + 36 + t^2 - 8t + 16,$$

$$14t^2 - 38t + 101 = 14t^2 - 14t + 77$$

$$24 = 24t \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow P = (-2, 2, 2).$$

5. PÉLDA

Ha $d_A = d_B$, akkor

$$(-5+3t-2)^2+(2t-(-4))^2+(1+t-7)^2 =$$
$$= (-5+3t-0)^2+(2t-(-6))^2+(1+t-5)^2,$$

$$9t^2-42t+49+4t^2+16t+16+t^2-12t+36 =$$
$$= 9t^2-30t+25+4t^2+24t+36+t^2-8t+16,$$

$$14t^2-38t+101 = 14t^2-14t+77$$

$$24 = 24t \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow P = (-2,2,2).$$

6. PÉLDA

FELADAT

Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(-3, 5, 2)$ ponton, párhuzamos a $2x - y + 5z + 9 = 0$ síkkal, és metszi az $\frac{x-5}{4} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-2}{5}$ egyenest.

Megoldás:
A keresett egyenes egy pontja adott, így egy irányvektorát kell meghatározni. Legyen Q a keresett és a megadott egyenes metszéspontja. Ekkor $\overrightarrow{PQ}$ párhuzamos a síkkal, azaz merőleges az $\vec{n}$ normálvektorára.
Kérdés: Hogyan kell a megadott egyenes egy Q pontját kiválasztani, hogy $\overrightarrow{PQ}$ merőleges legyen a megadott sík n normálvektorára?

6. PÉLDA

FELADAT

Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(-3,5,2)$ ponton, párhuzamos a $2x - y + 5z + 9 = 0$ síkkal, és metszi az $\frac{x-5}{4} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-2}{5}$ egyenest.

Megoldás:

A keresett egyenes egy pontja adott, így egy irányvektorát kell meghatározni. Legyen Q a keresett és a megadott egyenes metszéspontja. Ekkor $\overrightarrow{PQ}$ párhuzamos a síkkal, azaz merőleges az $\vec{n}$ normálvektorára.

Kérdés: Hogyan kell a megadott egyenes egy Q pontját kiválasztani, hogy $\overrightarrow{PQ}$ merőleges legyen a megadott sík n normálvektorára?

6. PÉLDA

FELADAT

Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(-3, 5, 2)$ ponton, párhuzamos a $2x - y + 5z + 9 = 0$ síkkal, és metszi az $\frac{x-5}{4} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-2}{5}$ egyenest.

Megoldás:

A keresett egyenes egy pontja adott, így egy irányvektorát kell meghatározni. Legyen Q a keresett és a megadott egyenes metszéspontja. Ekkor $\overrightarrow{PQ}$ párhuzamos a síkkal, azaz merőleges az $\vec{n}$ normálvektorára.

Kérdés: Hogyan kell a megadott egyenes egy Q pontját kiválasztani, hogy $\overrightarrow{PQ}$ merőleges legyen a megadott sík n normálvektorára?

6. PÉLDA

FELADAT

Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(-3, 5, 2)$ *ponton, párhuzamos a* $2x - y + 5z + 9 = 0$ *síkkal, és metszi az* $\frac{x-5}{4} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-2}{5}$ *egyenest.*

Megoldás:

A keresett egyenes egy pontja adott, így egy irányvektorát kell meghatározni. Legyen Q a keresett és a megadott egyenes metszéspontja. Ekkor $\overrightarrow{PQ}$ párhuzamos a síkkal, azaz merőleges az $\vec{n}$ normálvektorára.

Kérdés: Hogyan kell a megadott egyenes egy Q pontját kiválasztani, hogy $\overrightarrow{PQ}$ merőleges legyen a megadott sík n normálvektorára?

6. PÉLDA

FELADAT

Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(-3, 5, 2)$ ponton, párhuzamos a $2x - y + 5z + 9 = 0$ síkkal, és metszi az $\frac{x-5}{4} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-2}{5}$ egyenest.

Megoldás:
A keresett egyenes egy pontja adott, így egy irányvektorát kell meghatározni. Legyen Q a keresett és a megadott egyenes metszéspontja. Ekkor $\overrightarrow{PQ}$ párhuzamos a síkkal, azaz merőleges az $\vec{n}$ normálvektorára.

Kérdés: Hogyan kell a megadott egyenes egy Q pontját kiválasztani, hogy $\overrightarrow{PQ}$ merőleges legyen a megadott sík n normálvektorára?

6. PÉLDA

FELADAT

Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(-3, 5, 2)$ ponton, párhuzamos a $2x - y + 5z + 9 = 0$ síkkal, és metszi az $\frac{x-5}{4} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-2}{5}$ egyenest.

Megoldás:
A keresett egyenes egy pontja adott, így egy irányvektorát kell meghatározni. Legyen Q a keresett és a megadott egyenes metszéspontja. Ekkor $\overrightarrow{PQ}$ párhuzamos a síkkal, azaz merőleges az $\vec{n}$ normálvektorára.
Kérdés: Hogyan kell a megadott egyenes egy Q pontját kiválasztani, hogy $\overrightarrow{PQ}$ merőleges legyen a megadott sík n normálvektorára?

6. PÉLDA

$$\frac{x-5}{4}=\frac{y+5}{7}=\frac{z-2}{5}\Longrightarrow$$
$$Q=(4t+5,7t-5,5t+2).$$

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}4t+8\\7t-10\\5t\end{bmatrix},\vec{n}=\begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix}$$

$$0=\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=(4t+8)\cdot 2+(7t-10)\cdot(-1)+5t\cdot 5=26t+26$$

Ebből $t=-1$ és $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}4\\-17\\-5\end{bmatrix}$, és az egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-17}=\frac{z-2}{-5}.$$

6. PÉLDA

$$\frac{x-5}{4}=\frac{y+5}{7}=\frac{z-2}{5}\Longrightarrow$$
$$Q=(4t+5,7t-5,5t+2).$$

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}4t+8\\7t-10\\5t\end{bmatrix},\vec{n}=\begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix}$$

$$0=\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=(4t+8)\cdot 2+(7t-10)\cdot(-1)+5t\cdot 5=26t+26$$

Ebből $t=-1$ és $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}4\\-17\\-5\end{bmatrix}$, és az egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-17}=\frac{z-2}{-5}.$$

6. PÉLDA

$$\frac{x-5}{4}=\frac{y+5}{7}=\frac{z-2}{5}\Longrightarrow$$
$$Q=(4t+5, 7t-5, 5t+2).$$

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix} 4t+8 \\ 7t-10 \\ 5t \end{bmatrix}, \vec{n}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$0=\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=(4t+8)\cdot 2+(7t-10)\cdot(-1)+5t\cdot 5=26t+26$$

Ebből $t=-1$ és $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix} 4 \\ -17 \\ -5 \end{bmatrix}$, és az egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-17}=\frac{z-2}{-5}.$$

6. PÉLDA

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-2}{5} \Longrightarrow$$
$$Q = (4t+5, 7t-5, 5t+2).$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 4t+8 \\ 7t-10 \\ 5t \end{bmatrix}, \vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = (4t+8) \cdot 2 + (7t-10) \cdot (-1) + 5t \cdot 5 = 26t + 26$$

Ebből $t = -1$ és $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 4 \\ -17 \\ -5 \end{bmatrix}$, és az egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z-2}{-5}.$$

6. PÉLDA

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-2}{5} \Longrightarrow$$
$$Q = (4t+5, 7t-5, 5t+2).$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 4t+8 \\ 7t-10 \\ 5t \end{bmatrix}, \vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = (4t+8) \cdot 2 + (7t-10) \cdot (-1) + 5t \cdot 5 = 26t + 26$$

Ebből $t = -1$ és $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 4 \\ -17 \\ -5 \end{bmatrix}$, és az egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z-2}{-5}.$$

6. PÉLDA

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-2}{5} \Longrightarrow$$
$$Q = (4t+5, 7t-5, 5t+2).$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 4t+8 \\ 7t-10 \\ 5t \end{bmatrix}, \vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = (4t+8) \cdot 2 + (7t-10) \cdot (-1) + 5t \cdot 5 = 26t + 26$$

Ebből $t = -1$ és $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 4 \\ -17 \\ -5 \end{bmatrix}$, és az egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z-2}{-5}.$$

6. PÉLDA

$$\frac{x-5}{4}=\frac{y+5}{7}=\frac{z-2}{5}\Longrightarrow$$
$$Q=(4t+5,7t-5,5t+2).$$

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}4t+8\\7t-10\\5t\end{bmatrix},\vec{n}=\begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix}$$

$$0=\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=(4t+8)\cdot 2+(7t-10)\cdot(-1)+5t\cdot 5=26t+26$$

Ebből $t=-1$ és $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}4\\-17\\-5\end{bmatrix}$, és az egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-17}=\frac{z-2}{-5}.$$

6. PÉLDA

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-2}{5} \Longrightarrow$$
$$Q = (4t+5, 7t-5, 5t+2).$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 4t+8 \\ 7t-10 \\ 5t \end{bmatrix}, \vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = (4t+8)\cdot 2 + (7t-10)\cdot(-1) + 5t \cdot 5 = 26t + 26$$

Ebből $t = -1$ és $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 4 \\ -17 \\ -5 \end{bmatrix}$, és az egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z-2}{-5}.$$

6. PÉLDA

$$\frac{x-5}{4}=\frac{y+5}{7}=\frac{z-2}{5}\Longrightarrow$$
$$Q=(4t+5,7t-5,5t+2).$$

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix} 4t+8 \\ 7t-10 \\ 5t \end{bmatrix}, \vec{n}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$0=\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=(4t+8)\cdot 2+(7t-10)\cdot(-1)+5t\cdot 5=26t+26$$

Ebből $t=-1$ és $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix} 4 \\ -17 \\ -5 \end{bmatrix}$, és az egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-17}=\frac{z-2}{-5}.$$