Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 1. hét

1. Így szokás halmazokat definiálni: $\{x \in \text{alaphalmaz} \mid \text{feltételek } x\text{-re}\}$. Definiáljuk:

   a) 1-nél kisebb pozitív valós számok halmaza,
   b) racionális; irracionális számok halmaza,
   c) a négyzetszámok halmaza,
   d) a második síknegyed pontjai,
   e)^{hf} páros számok halmaza,
   f)^{hf} prímszámok halmaza,
   g)^{hf} az egységsugarú gömbön belüli pontok,
   h)^{hf} harmadfokú polinomok halmaza.

Megoldás a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
b) $\mathbb{Q}$, $\{x \in \mathbb{Q} \mid \neg x \in \mathbb{Q}\}$
c) $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}\ (x = y^2)\}$
d) $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \leq 0) \wedge (y \geq 0)\}$
e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z}\ (x = 2y)\}$
f) $\{x \in \mathbb{Z} \setminus \{0; 1; -1\} \mid (x = yz \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge z \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (y = 1 \vee y = -1 \vee z = 1 \vee z = -1)\}$
g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
h) $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \wedge d \in \mathbb{R}\}$

2. Legyen A, B és C három halmaz. Fejezzük ki a

$$D = A - (A - (B - (B - C)))$$

halmazt az A, B és C halmazokkal, és az unió és metszet műveletekkel. Ez alapján döntsük el, hogy mivel egyenlő D az alábbi esetekben:

   a) a három halmaz páronként diszjunkt,
   b) pontosan két diszjunkt van köztük,
   c)^{hf} nincs köztük kettő diszjunkt.

Megoldás $D = A \cap \overline{A \cap \overline{B \cap \overline{B \cap \overline{C}}}} = A \cap \left(\overline{A} \cup \left(B \cap \overline{B \cap \overline{C}}\right)\right) = A \cap \left(\overline{A} \cup \left(B \cap \left(\overline{B} \cup C\right)\right)\right)$. Másrészt, $B \cap \left(\overline{B} \cup C\right) = \left(B \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap C) = \emptyset \cup (B \cap C) = B \cap C$, és hasonlóan $A \cap \left(\overline{A} \cup (B \cap C)\right) = A \cap B \cap C$. Így a válasz:
a) $\emptyset$,
b) $\emptyset$,
c) előfordulhat, hogy $\emptyset$, de nem feltétlenül.

3. Igazoljuk az alábbi állításokat teljes indukcióval minden pozitív egész számra!

   a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   b) $\sum\limits_{n=1}^{k} n(n!) = (k+1)! - 1$
   c)^{hf} $\prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$
   d) $\sqrt{k} < \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}} < 2\sqrt{k}$, ahol $k \geq 2$
   e)^{hf} $\frac{(2t)!}{(t!)^2} < 4^{t-1}$, ahol $t \geq 5$

Megoldás a) Helyettesítsünk be $n = 1$-et. Ekkor $\sum\limits_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, azaz ekkor az állítás igaz. Tegyük fel, hogy valamely konkrét n értékre teljesül az egyenlőség. Belátjuk, hogy ekkor a rákövetkező értékre is igaz, azaz $(n+1)$-et helyettesítve is igaz marad az egyenlőség. Azaz az $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ egyenlőség felhasználásával kell levezetnünk az $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ egyenlőséget. Induljunk ki a bal oldalból:
$\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} =$

$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, ahol az utolsó átalakításnál a másodfokú kifejezések gyöktényezős felbontását használtuk.

b) Most $k=1$ esetén $\sum\limits_{n=1}^{1} n(n!) = 1\cdot 1! = 1 = 2!-1$, azaz az egyenlőség teljesül. Hasonlóan az előző feladathoz, tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=1}^{k} n(n!) = (k+1)!-1$, és igazoljuk ennek felhasználásával, hogy $\sum\limits_{n=1}^{k+1} n(n!) = (k+2)!-1$. Kiindulva a bal oldalból:

$\sum\limits_{n=1}^{k+1} n(n!) = \left(\sum\limits_{n=1}^{k} n(n!)\right) + (k+1)(k+1)! = (k+1)!-1+(k+1)(k+1)! = (k+1+1)\,(k+1)!-1 = (k+2)!-1$.

c) Most $n=1$ esetén $\prod\limits_{i=1}^{1}\left(1-\frac{1}{(i+1)^2}\right) = 1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{1+2}{2+2}$, azaz az egyenlőség teljesül. Tegyük fel, hogy valamely konkrét n-re $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(i+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$, és lássuk be, hogy ekkor $\prod\limits_{i=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{(i+1)^2}\right) = \frac{n+3}{2n+4}$. Az előző feladatokhoz hasonlóan:

$\prod\limits_{i=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{(i+1)^2}\right) = \left(\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(i+1)^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+2)^3}\right) = \frac{n+2}{2n+2}\cdot\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2} = \frac{n+2}{2n+2}\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \frac{n+3}{2n+4}$.

d) Az egyenlőtlenségsorozat $k=2$ esetén $\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$, ami némi algebrai átalakítással ellenőrizhető, hogy igaz. Tegyük fel, hogy valamilyen konkrét k-ra $\sqrt{k} < \sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{j}} < 2\sqrt{k}$ teljesül, és lássuk be, hogy ekkor $\sqrt{k+1} < \sum\limits_{j=1}^{k+1}\frac{1}{\sqrt{j}} < 2\sqrt{k+1}$. Az indukciós feltétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \sum\limits_{j=1}^{k+1}\frac{1}{\sqrt{j}} = \left(\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{j}}\right)+\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Így elegendő belátni, hogy $\sqrt{k+1} \le \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, és $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$. Az első egyenlőtlenség $\sqrt{k+1}$-gyel való szorzás után $k+1 = \sqrt{k\cdot k}+1 < \sqrt{k(k+1)}+1$ alakra hozható, ami nyilván igaz. Mivel ekvivalens átalakítást végeztünk, az eredeti egyenlőtlenség is teljesül. Hasonlóan igazolható a második egyenlőtlenség is.

e) Ha $t=5$, akkor az egyenlőtlenség $252 < 256$ alakú, azaz teljesül. Tegyük fel, hogy valamely konkrét t-re $\frac{(2t)!}{(t!)^2} < 4^{t-1}$ igaz, és vezessük le, hogy ekkor $\frac{(2t+2)!}{((t+1)!)^2} < 4^t$. Az indukciós feltevés alkalmazásával:

$\frac{(2t+2)!}{((t+1)!)^2} = \frac{(2t)!}{(t!)^2}\cdot\frac{(2t+1)(2t+2)}{(t+1)^2} < 4^{t-1}\frac{(2t+1)(2t+2)}{(t+1)^2} < 4^{t-1}\cdot\frac{(2t+2)(2t+2)}{(t+1)^2} = 4^{t-1}\cdot 4 = 4^t$.

4. A síkot n egyenessel részekre bontottuk.

   a) Mutassuk meg, hogy az így kapott síkrészek két színnel kiszínezhetők úgy, hogy az él mentén érintkező részek különböző színűek.

   b)[hf] Igazoljuk, hogy ha az egyenesek között nincsenek párhuzamosak, és mindegyik metszéspont pontosan két egyeneshez tartozik, akkor a síkrészek száma $\frac{n^2+n+2}{2}$.

Megoldás a) Az állítás $n=0$ vagy $n=1$ egyenessel való felbontáskor nyilván igaz. Tegyük fel, hogy akárhogyan van felbontva a sík n egyenessel, a fentiek szerint két színnel kiszínezhető. Tekintsünk egy $(n+1)$ egyenessel való felbontást. Képzeletben vegyük ki valamelyik e egyenest. Most már csak n egyenesünk van, így ekkor a sík kiszínezhető úgy két színnel, hogy az él mentén érintkező részek ellentétes színűek. Rakjuk most vissza a kivett egyenest. Ez az egyenes két félsíkra bontja a síkot. Most azt fogjuk csinálni, hogy az egyik félsíkban meghagyjuk az eredeti színezést, míg a másikban éppen az ellentétére változtatjuk. Belátjuk, hogy ez a színezés pont jó lesz. Tekintsünk két él mentén érintkező tartományt. Ha ezek közt az él nem az e egyeneshez

tartozik, akkor a tartományok különböző színűek, mert az eredeti színezéshez képest vagy mindkettőnek maradt a színe, vagy mindkettőnek ellentétére változott. Ha a köztük levő él az e egyeneshez tartozik, akkor az e egyenes kivétele előtt ugyanazon síkrészhez tartoztak, így ugyanolyan színűek voltak, e berakásakor viszont az egyik színe maradt, a másik színe ellentétére változott (érdemes rajzolgatni). Azaz az így definiált színezés teljesíti a feltételeket, így $(n+1)$ egyenes esetén is kiszínezhető a sík.
b) Ha $n = 0$ vagy 1, akkor a síkrészek száma rendre 1 vagy 2, azaz ekkor az állítás igaz. Tegyük fel, hogy a fenti feltételeket kielégítő n egyenes éppen $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre vágja a síkot. Vegyünk $(n+1)$ egyenest. A feltételek szerint, ha valamelyik egyenest elhagyjuk (ezt jelöljük e-vel), akkor a maradék n egyenes $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre bontja a síkot. Visszarakva az e egyenest, ez a meglevő síkrészek egy részét nem változtatja, de egy részét kettévágja. A kettévágott síkrészek darabszáma megegyezik az egyenesen, a többi egyenessel vett metszéspontok által keletkező szakaszok számával. Mivel n egyenes van e-n kívül, és a feltételek szerint mindegyik pontosan egy pontban metszi e-t (és ezek a pontok különbözőek), így e-n összesen $n+1$ szakasz keletkezik, ami a fentiek szerint megegyezik a keletkező új síkrészek számával. Azaz $n+1$ egyenes esetén összesen $\frac{n^2+n+2}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$ síkrész keletkezik, ami az állítást igazolja.

5. Legyen $z = 1 - 4i$. Mi lesz $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$, $|z|$, $\arg z$?

Megoldás Ekkor $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = -4$, $\overline{z} = 1 + 4i$, $|z| = \sqrt{17}$, $\arg z = -\operatorname{arctg} 4 \approx -1.3258$.

6. Írjuk a következő komplex számokat $a + ib$ alakba!

a) $(1+4i)(4-2i)$ b) i^7 c) $\dfrac{3-2i}{-2+i}$ d) $\dfrac{3-2i}{3i}$

e)^{hf} i^{2009} f)^{hf} $\dfrac{1}{i}$ g)^{hf} $\dfrac{2-i}{i-1}$ h)^{hf} $(2+i)^{37}(2-i)^{38}$

Megoldás a) $(1+4i)(4-2i) = 12 + 14i$
b) $i^7 = -i$
c) $\frac{3-2i}{-2+i} = -\frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$
d) $\frac{3-2i}{3i} = \frac{3i+2}{-3} = -\frac{2}{3} - i$
e) $i^{2009} = i$
f) $\frac{1}{i} = -i$
g) $\frac{2-i}{i-1} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$
h) $(2+i)^{37}(2-i)^{38} = 2 \cdot 5^{37} - 5^{37}i$.