Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 2. hét

1. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő halmazokat:

   a) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 2\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < -2\}$ c) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-3| > 2\}$

   d) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i| \geq |z-2|\}$ e) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z > 3\}$ f) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im}(z+1) \geq \operatorname{Re} z\}$

   g) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z^2 = (\operatorname{Im} z)^2\}$ h)^{hf} $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+2i| = \pi\}$ i)^{hf} $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i| \geq |z|\}$

   j)^{hf} $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z\}$ k)^{hf} $\{z \in \mathbb{C} \ : \ -3 > \operatorname{Re} z \geq 0\}$ l)^{hf} $\{z \in \mathbb{C} \ : \ z = \bar{z}\}$

Megoldás a) Keressük a megoldásokat $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ alakban. Ezt behelyettesítve kapjuk a $\sqrt{x^2+y^2} = 2$, azaz az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletet. Ez egy origó középpontú, 2 sugarú körvonal egyenlete.
b) A fenti módszert alkalmazva azt kapjuk, hogy nincs megoldás.
c) A megoldás egy 3 (azaz $(3,0)$) középpontú, 2 sugarú körvonalon kívül levő síkrész, melyhez maga a körvonal nem tartozik hozzá.
d) Vegyük észre, hogy $|z+i|$ éppen z-nek és $(-i)$-nek a távolsága. Hasonlóan $|z-2|$ z és 2 távolsága. A két távolság a $-i$ és 2 pontokat összekötő felezőmerőlegesén egyenlő, és az egyenlőtlenség az általa meghatározta, 2-t tartalmazó zárt félsík pontjaira teljesül. A felezőmerőleges egyenlete: $4x + 2y = 3$.
e) Ha $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, akkor az egyenlőtlenség $y > 3$, ami az $y = 3$ egyenes által meghatározta "felső" nyílt félsík egyenlete.
f) A megoldás az $x = y$ egyenletű egyenes határolta "felső" zárt félsík.
g) Ha $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, akkor az egyenlet $2xy = y^2$, aminek a megoldása az $y = 0$ és a $2x = y$ egyenletű egyenesek uniója.
h) A megoldás a $-2i$ középpontú, π sugarú körvonal.
i) A $-i$ és 0 pontokat összekötő szakasz felezőmerőlegese által határolt, 0-t tartalmazó zárt félsík.
j) Az $y = x$ egyenes által határolt "felső" zárt félsík.
k) Lehetetlen feltétel, nincs megoldás.
l) Ha $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, akkor a feltétel $y = 0$-ra redukálódik, azaz a megoldás a valós tengely.

2. Mi lehet z, ha...

   a) $\bar{z} - z = 3$, $\operatorname{Im} z = 2$ b) $z^2 - \bar{z} = 1$

   c) $|z| + z = 1 - i$ d)^{hf} $\arg z = 3\pi/4$, $\operatorname{Re} z = 5$

   e)^{hf} $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, $|z-2| = 3$

Megoldás a) Ha $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor az első feltétel $-2bi = 3$, ami semmilyen komplex számra nem teljesül, így nincs megoldás.
b) Ha $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor az egyenlet: $a^2 - b^2 + 2abi - a + bi = 1$. Két komplex szám akkor egyenlő, ha a valós és képzetes részük is egyenlő, így ez az egyenlet átírható az $a^2 - b^2 - a = 1$ és $2ab + b = 0$ egyenletrendszerre. Ebből a megoldások: $b = 0$ és $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, azaz $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
c) Ha $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor az egyenlet $\sqrt{a^2+b^2} + a + bi = 1 - i$. A b)-hez hasonlóan megoldva ebből $b = -1$ és $a = 0$ adódik, azaz $z = -i$.
d) Legyen $r = |z|$. A fenti egyenletek alapján $r \cos \frac{3\pi}{4} = 5$, amiből $r = -5\sqrt{2}$. Mivel egy komplex szám abszolút értéke egy nemnegatív valós szám, nincs a feltételeket kielégítő komplex szám.
e) Ha $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor a fenti feltételekből $a = b$ és $\sqrt{(a-2)^2 + b^2} = 3$ adódik.

Ebből a $2a^2-4a-5=0$ egyenletet kapjuk, melynek megoldása $a=\frac{2\pm\sqrt{14}}{2}$. Azaz a megoldások: $z_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{14}}{2}(1+i)$.

3. Írjuk a következő komplex számokat algebrai vagy trigonometrikus alakba alakba! (A gyökjelek a b) jelű feladat kivételével komplex gyökvonást jelentenek.)

a) $(1-i)^{997}$ b) $(1-i\sqrt{3})^{14}-3$ c) $\sqrt[4]{1}$ d) $\sqrt[3]{-8i}$

e)^{hf} i^{2009} f)^{hf} $\frac{1}{\sqrt{i}}$ g)^{hf} $(-1-i)^{2014}+500i$ h)^{hf} $\frac{\sqrt{i}}{1-i}$

Megoldás a) A megoldás:
$(1-i)^{997}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{997}=\left(\sqrt{2}\right)^{997}\left(\cos\frac{-997\pi}{4}+i\sin\frac{-997\pi}{4}\right)=2^{498}\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-2^{498}+2^{498}i$.
b) $(1-i\sqrt{3})^{14}-3=\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{14}-3=16384\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)-3=-8195-i8182\sqrt{3}$.
c) $\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1(\cos 0+i\sin 0)}$. A gyökvonás képletét alkalmazva az alábbi megoldásokat kapjuk: $1(\cos 0+i\sin 0)=1$, $1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i$, $1\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-1$, $1\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-i$.
d) $\sqrt[3]{-8i}=\sqrt[3]{8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}$. A gyökvonás képletét alkalmazva a megoldások: $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i$, $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-i$, $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=+\sqrt{3}-i$.
e) $i^{2009}=\left(i^4\right)^{502}i=1^{502}i=i$.
f) $\frac{1}{\sqrt{i}}=\frac{1}{\sqrt{1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}}$. A gyökvonás képlete alapján erre két megoldást kapunk:
$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, illetve
$\frac{1}{\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.
g) $(-1-i)^{2014}+500i=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{2014}+500i=2^{1007}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)+500i=\left(500-2^{1007}\right)i$.
h) Az f) feladat módszerével a két megoldás: $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. A feladatokban szereplő polinomoknak írjuk fel a gyöktényezős felbontását!

a) $z^2-iz+3+2i$ b) z^4+1 c)^{hf} $3z^2-iz^2+3iz+6-i$

d)^{hf} z^5-z^2

Megoldás a) A gyökképlet alkalmazásával (és a komplex gyökvonás elvégzésével) felírható a gyöktényezős alak. Ennek pontos értéke:
$z^2-iz+3+2i=\left(z-\sqrt{\frac{\sqrt{233}-13}{8}}-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{\sqrt{233}+13}{8}}\right)i\right)\left(z+\sqrt{\frac{\sqrt{233}-13}{8}}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{\sqrt{233}+13}{8}}\right)i\right)$.
Közelítőleg:
$z^2-iz+3+2i\approx(z-0.532017+1.379639i)(z+0.532017-2.379639i)$.
b) $z^4+1=\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$
c) $3z^2-iz^2+3iz+6-i=(3-i)(z-i)\left(z-\frac{3}{10}-\frac{19}{10}i\right)$.
d) $z^5-z^2=z^2\left(z^3-1\right)z^2(z-1)\left(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

5. Legfeljebb hány nem valós, komplex gyöke lehet egy hetedfokú polinomnak?

Megoldás Tegyük fel, hogy a polinom együtthatói valós számok. Ekkor, a tanultak alapján, minden gyök konjugáltja is gyök, tehát minden nem valós, komplex gyök konjugáltjával együtt, párban jelenik meg a gyökök között. Azaz ekkor legfeljebb hat nem valós gyök van. Ha a polinom együtthatói lehetnek nem valósak, akkor a fenti érv nem alkalmazható, így nyugodtan lehet maximális számú, azaz hét nem valós gyök is.

6. Egy szabályos hatszög középpontja $3+2i$, egyik csúcsa $2+i$. Írjuk fel a többi csúcsát!

Megoldás A középpontból a megadott csúcsba mutató vektor a $(2+i)-(3+2i)=-1-i$ vektor. A többi csúcsba mutató vektort megkaphatjuk úgy, hogy ezen vektort rendre $\frac{\pi}{3}$-mal elforgatjuk. A komplex számok szorzásképlete alapján ez a forgatás elvégezhető úgy, hogy az $f=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ komplex számmal szorzunk. Azaz a középpontból a csúcsokba mutató vektorok rendre $(-1-i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $1+i$, $\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Így a több csúcs rendre:
$\frac{\sqrt{3}+5}{2}+i\frac{3-\sqrt{3}}{2}$, $\frac{7+\sqrt{3}}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, $4+3i$, $\frac{7-\sqrt{3}}{2}+i\frac{5+\sqrt{3}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{3}}{2}+i\frac{5-\sqrt{3}}{2}$.

7.[hf] Pistike rondán ír, és nem tudja eldönteni, hogy a füzetében egy helyen $\bar{z}^2$, (azaz $(\bar{z})^2$) vagy pedig z^{-2} (azaz $(z)^{-2}$) áll. Van olyan z komplex szám, amelyre ez a két szám egyenlő?

Megoldás Legyen $r=|z|$. Ekkor a $z\bar{z}=r^2$ azonosságot használva a $(\bar{z})^2=\frac{1}{z^2}$ egyenlőségből azt kapjuk, hogy $r^4=1$, azaz $r=1$. Vagyis van olyan komplex szám, melyekre igaz a fenti egyenlőség, méghozzá pontosan az egységnyi abszolút értékű komplex számokra.

8.[hf] Hol a hiba? $$-1=i^2=i\cdot i=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1\cdot 1}=\sqrt{1}\sqrt{1}=\left(\sqrt{1}\right)^2=1$$

Megoldás A fenti átalakításokban szereplő gyökök komplex gyökvonást kell, hogy jelöljenek, különben a kifejezések egy része nem értelmezhető. Ekkor viszont $\sqrt{-1}$ és $\sqrt{1}$ kétértékű kifejezések, $\sqrt{-1}=\pm i$, és $\sqrt{1}=\pm 1$, azaz az egyenlőségek a fenti formában nem igazak.