Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 4. hét

1. Számoljuk ki:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n^3}\right)^{n^3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n-3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n}{2}+1}$

d)^{hf} $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}-2}\right)^{n}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^{n}$ f)^{hf} $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2+3}\right)^{4n^2}$

g)^{hf} $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n-5}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n}{2}+1}$

Megoldás a) Felhasználva az emlékeztetőben szereplő nevezetes határértékeket, és azt, hogy konvergens sorozat minden részsorozata az eredeti határértékéhez tart, a $k=-3$ megfeleltetéssel azt kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n^3}\right)^{n^3}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n+2}\right)^{2(n+2)-7}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\left(1-\frac{3}{n+2}\right)^{n+2}\right)^2}{\left(1-\frac{3}{n+2}\right)^7}=\dfrac{(e^{-3})^2}{1^7}=\dfrac{1}{e^6}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n}{2}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{\frac{n}{2}+1}\cdot\left(\left(1-\frac{5/2}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{5/2}{2n+3}\right)^{\frac{1}{4}}\right)=\infty$

d) Az előző feladathoz hasonlóan adódik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}-2}\right)^{n}=\infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n}{n^2+n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{n+1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1+\frac{1}{n}}}=(e^{-2})^1=\frac{1}{e^2}$, külön levezetve, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1+\frac{1}{n}}=1$.

f) Az előzőekhez hasonlóan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+3}\right)^{4n^2}=e^4$.

g) Az e) feladathoz hasonlóan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n-5}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n}{2}+1}=\sqrt{e}$.

2. Felhasználva hogy $\sqrt[n]{n}\to 1$ és $\sqrt[n]{x}\to 1$ minden $x>0$ esetén, számoljuk ki:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[99n]{n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{99n^{99}}$ c)^{hf} $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+5}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+3n-2}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}}$ f)^{hf} $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n!]{n}$

g)^{hf} $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$

Megoldás a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[99n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{99}}=1^{\frac{1}{99}}=1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{99n^{99}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{99}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^{99}=1$

c) Vegyük észre, hogy $\sqrt[n]{n}\le\sqrt[n]{n+5}\le\sqrt[n]{n+5n}=\sqrt[n]{6n}$. Mivel $\sqrt[n]{6n}=\sqrt[n]{6}\cdot\sqrt[n]{n}\to 1$ és $\sqrt[n]{n}\to 1$, így a rendőr-elv alapján $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+5}=1$.

d) Itt most az $\left(\sqrt[n]{n}\right)^2=\sqrt[n]{n^2}\le\sqrt[n]{n^2+3n-2}\le\sqrt[n]{4n^2}=\sqrt[n]{4}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2$ becslést használva adódik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+3n-2}=1$.

e) Az előző feladat módszerét használva $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}}=1$.

f) Vegyük észre, hogy $1\le\sqrt[n!]{n}\le\sqrt[n]{n}$, amiből $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n!]{n}=1$.

g) A definíció alapján belátjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$. Legyen $K\in\mathbb{R}$ tetszőleges. Vizsgáljuk

meg, hogy milyen indexekre teljesül az $\sqrt[n]{n!} > K$ egyenlőtlenség. Ha $K \leq 0$, ez minden n-re teljesül, így feltehető, hogy $K > 0$. Ekvivalens átalakításokkal ekkor a $\frac{K^n}{n!} < 1$ egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel minden $K > 0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{K^n}{n!} = 1$, így (az $\varepsilon = 1$ esetnek megfelelően) a konvergens sorozat definíciója alapján létezik $n_K \in \mathbb{R}$, hogy ha $n > n_K$, akkor $\frac{K^n}{n!} < 1$ teljesül. Mivel éppen ezt kellett igazolnunk, azt kaptuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = 1$.

3. Legyen $p(x)$ és $q(x)$ egy-egy valós polinom. Adjon módszert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ meghatározására!

Megoldás Legyen $p(x)$ egy m-edfokú polinom, és a főegyütthatóját jelölje $A \neq 0$. Legyen $q(x)$ foka k, és a főegyütthatója $B \neq 0$. Ekkor a tanult határértékszámítási módszerek alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} \infty, \text{ ha } m > k \text{ és } A, B \text{ azonos előjelűek,} \\ -\infty, \text{ ha } m > k \text{ és } A, B \text{ ellentétes előjelűek,} \\ \frac{A}{B}, \text{ ha } m = k, \\ 0, \text{ ha } m < k. \end{cases}$$

4. Konvergensek-e a sorok? Ha igen, mennyi az összegük?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ c)^{hf} $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+2)}\right)$

Megoldás a) A részletösszegek sorozata: $s_n = \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \ldots \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, a sor nem konvergens.
b) Vegyük észre, hogy minden n értékre $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Ebből a részletösszegek sorozata az előző feladathoz hasonlóan számolva: $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, a sor konvergens, és összege 1.
c) Most $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, és $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{5}{6}$. Azaz a sor konvergens, és összege $\frac{5}{6}$.

5. Konvergensek-e a sorok? Ha igen, mennyi az összegük?

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}}$ b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+1}}{5^n}$

d)^{hf} $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}+(-5)^n}{3^{2n+2}}$ e)^{hf} $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1}}{3^{2n+1}}$ f)^{hf} $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-1}-2^n}{4^{2n-1}}$

Megoldás a) Felhasználva, hogy $\left|-\frac{4}{5}\right| < 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}} = \frac{1}{(-5)^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{45}$, azaz a sor konvergens, és összege $\frac{1}{45}$.
b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}} = -\frac{3^1}{2^{-2}} - \frac{3^3}{2^1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}} = -\frac{51}{2} + 12 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{8}\right)^n$. Mivel $\left|\frac{9}{8}\right| \geq 1$, a fenti sor nem konvergens.
c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+1}}{5^n} = -4 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+1}}{5^n} = -4 + \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}\right) + \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n}\right) = -4 + \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + 3\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = \frac{31}{6}$, és a sor konvergens.
d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}+(-5)^n}{3^{2n+2}} = \frac{2}{9}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n\right) + \frac{1}{9}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^n\right) = \frac{29}{14}$, és a sor konvergens.
e) Az előzőekhez hasonló módszerekkel $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1}}{3^{2n+1}} = \frac{1}{12}$, és a sor konvergens.
f) A szokásos lépésekkel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-1}-2^n}{4^{2n-1}} = \frac{10}{7}$, és a sor konvergens.