Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 6. hét

1. Ábrázolja az adott függvényeket, és állapítsd meg, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkeznek! (Páros? Páratlan? Periodikus? Értékkészlet? Értelmezési tartomány?) Amelyik invertálható, számolja ki az inverzét is!

   a) $-3x+4$ b) $-x^2+3x+1$ c) $\dfrac{1}{x+2}$ d) e^{-x}

   e) $\sin 2x$ f) $\ln x+1$ g)^{hf} $\operatorname{tg}(-x)$ h)^{hf} $\log_{1/3}(2x-1)$

   i)^{hf} $\dfrac{2}{x^2}$

Megoldás A grafikonokat nem ábrázoljuk a megoldásban.
a) $D_f=\mathbb{R}$, $R_f=\mathbb{R}$. Mivel $f(-x)=3x+4\neq\pm f(x)$, a függvény nem páros és nem páratlan. Az $y=-3x+4$ egyenletből x-et kifejezve $x=-\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}$ adódik. Mivel minden y értékhez pontosan egy x érték tartozik, a függvény nem periodikus, de invertálható, és inverze $f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.
b) $D_f=\mathbb{R}$, $R_f=\left(-\infty;\frac{13}{4}\right]$. Mivel $f(-x)=-x^2-3x+1\neq\pm f(x)$, a függvény nem páros és nem páratlan. A függvény nem injektív (pl. $f(1)=f(2)=3$), így nem invertálható. Mivel minden függvényértéket legfeljebb kétszer (azaz ∞-nél kevesebbszer) vesz fel, nem periodikus.
c) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $R_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Emiatt nem páros, nem páratlan és nem periodikus. Az $y=\frac{1}{x+2}$ egyenlet megoldása $x=\frac{1}{y}-2$, így invertálható, és inverze $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}-2$.
d) $D_f=\mathbb{R}$, $R_f=\mathbb{R}^+$. Az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy nem páros, nem páratlan, nem periodikus. Invertálható, és inverze $f^{-1}(x)=-\ln x$.
e) $D_f=\mathbb{R}$, $R_f=[-1;1]$. Páratlan, periodikus (legkisebb periódusa π). Nem invertálható.
f) $D_f=(0;\infty)$, $R_f=\mathbb{R}$. Emiatt nem páros, nem páratlan, nem periodikus. Invertálható, inverze $f^{-1}(x)=e^{x-1}$.
g) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\neg\exists k\in\mathbb{Z}, x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$, $R_f=\mathbb{R}$. Páratlan, periodikus (legkisebb periódusa π). Nem invertálható.
h) $D_f=\left(\frac{1}{2};\infty\right)$, $R_f=\mathbb{R}$. Nem páros, nem páratlan, nem periodikus. Imvertálható, inverze $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^x}$.
i) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $R_f=(0,\infty)$. Páros, nem periodikus. Nem invertálható.

2. Számoljuk ki a határértékeket:

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^9+4x^6+1)$ b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}$

   d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x}$ e)^{hf} $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right)$ f)^{hf} $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{\sqrt{4+x}-2}$

   g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin x}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ i)^{hf} $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

   j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 3x}$ k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ l)^{hf} $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+9x^2+27x+27}$

Megoldás a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^9+4x^6+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^9\left(-1+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^9}\right)=\infty$.
b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}$ egy „$\frac{6}{0}$ típusú” határérték. Mivel a nevező (-1)-et kivéve, (-1) egy környezetében pozitív, így $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}=+\infty$.
c) Ez egy „$\frac{0}{0}$ típusú” határérték, így egyszerűsíteni próbálunk. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)^2}$, ami egy „$\frac{-1}{0}$ típusú” határérték. A nevező előjelet vált 1-nél, így a határérték nem létezik. Részletesebben vizsgálva, az előjelek alapján $\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}=-\infty$

és $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2} = \infty$ adódik.

d) Ez egy „$\frac{0}{0}$ típusú” határérték, így egyszerűsíteni próbálunk. A gyök miatt először ehhez érdemes gyökteleníteni: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{3x^2+1}+2x\right)}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1} -\frac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{1+x} = -2.$

e) Az előző feladathoz hasonlóan $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-4}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} = -2.$

Figyeljünk arra, hogy $x \to -\infty$ miatt (feltehető, hogy) x negatív, azaz $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

f) Most a számláló és a nevező konjugáltjával is bővítünk. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{\sqrt{4+x}-2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{9+x}+3} = \frac{2}{3}.$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} = \sin 1.$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = 5.$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$, mert $\cos 0 = 1$.

j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 7x}{7x} \cdot \frac{7}{\cos 7x}}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3} = \frac{7}{3}.$

k) A gyökös feladatokhoz hasonló ötlettel: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$

l) Ez egy „$\frac{0}{0}$ típusú” határérték, így egyszerűsíteni próbálunk. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+9x^2+27x+27} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-1)^2}{(x+3)^3} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{(x-1)^2}{(x+3)^2} = \infty.$

3. Ábrázoljuk a függvényeket, majd határozzuk meg a határértékeket.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sin x$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$

Megoldás Az ábrákat megint az olvasóra bízzuk.

a) Mivel $\sin x_n \to 1$, ha $x_n = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ és $\sin x'_n \to -1$, ha $x'_n = \frac{3\pi}{2} + n2\pi$, ahol $n \in \mathbb{N}$, így a fenti függvényhatárérték nem létezik.

b) Most $x > 0$ esetén használhatjuk a $-\frac{1}{x} \le \frac{1}{x} \sin x \le \frac{1}{x}$ egyenlőséget, így a rendőr-elv alapján a határérték nulla.

c) Az a) feladatbeli $\{x_n\}$ és $\{x'_n\}$ sorozatok reciprokait használva azt kapjuk, hogy a határérték nem létezik.

d) A b) feladat ötlete és a $-|x| \le x \sin \frac{1}{x} \le |x|$ egyenlőtlenségek alapján a határérték nulla.

4.hf Mutassunk példát olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amely

a) minden pontban folytonos b) semelyik pontban sem folytonos

c) pontosan egy pontban nem folytonos d) pontosan egy pontban folytonos

Megoldás a) Például $f(x) = x$.

b) Például $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

c) Például $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

d) Például $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$