Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 7. hét

1. Számoljuk ki a határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)$ b)^{hf} $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}+x}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x^3-1}\right)$

d)^{hf} $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+1}{x^7+4x^3+5}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 9x^2}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x-\sin 8x}{7x+\sin 2x}$

Megoldás a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}=\frac{3}{4}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2\right)\right)=+\infty$, felhasználva, hogy $x\to-\infty$ miatt $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ feltehető.
b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}-x}{-4x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1}{4}=\frac{1}{2}$.
c) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{2(x^2+x+1)-3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{2}$.
d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^5-3x^2+1}{x^7+4x^3+5}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{x^2\left(1+\frac{4}{x^4}+\frac{5}{x^7}\right)}=0$.
e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 9x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 9x^2}{x^2(1+\cos 9x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 9x^2}{9x^2}\cdot\frac{9\sin 9x^2}{1+\cos 9x^2}=0$.
f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x-\sin 8x}{7x+\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5-8\frac{\sin 8x}{8x}}{7+2\frac{\sin 2x}{2x}}=-\frac{1}{3}$.

2. Számoljuk ki a megadott függvények deriváltját a megadott pontban, a definíció alapján.

a) x^2-x+3, $x_0=-1$ b) $\sqrt{2x-5}$, x_0-ban

c)^{hf} $\frac{2x-1}{x+3}$, $x_0=3$ d)^{hf} $\sqrt[3]{2x-1}$, $x_0=1$.

e) $|x|$, $x_0=0$

Megoldás a) A derivált $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^2-x+3)-5}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x-2)=-3$.
b) A derivált $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt{2x-5}-\sqrt{2x_0-5}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(2x-5)-(2x_0-5)}{(x-x_0)\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x_0-5}\right)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2(x-x_0)}{(x-x_0)\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x_0-5}\right)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2}{\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x_0-5}}=\frac{1}{\sqrt{2x_0-5}}$.
c) A derivált $\lim\limits_{x\to3}\frac{\frac{2x-1}{x+3}-\frac{5}{6}}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{6(2x-1)-5(x+3)}{6(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{7x-21}{6(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{7}{6(x+3)}=\frac{7}{36}$.
d) A derivált $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(2x-1)-1}{\left(\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}+1\right)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}+1}=\frac{2}{3}$.
e) A jobb-, és baloldali derivált rendre $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{x}{x}=1$ és $\lim\limits_{x\to0-0}\frac{-x}{x}=-1$. Mivel a két érték különbözik, az $|x|$ függvény nem deriválható 0-ban.

3. Hol deriválhatóak a megadott függvények? Számoljuk ki a deriváltakat.

a) $x^7 + \dfrac{2}{x} - \sqrt{x}$ b) $x^7 \cdot \dfrac{2}{x} \cdot \sqrt{x}$ c) $\operatorname{ctg} x \cdot e^x \cdot \sqrt[5]{x} - 3$ d) $e^x + x^e + e^e$

e) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^7+2x+1}$ f) $\sin(2x-1)$ g) $\operatorname{tg}(\pi x)$ h) $e^{\frac{1-x}{1+x}}$

i) $\sin x^2 + \sin^2 x$ j) $\ln\left(e^x + e^{-x}\right)$ k) $\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}$ l) $\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{arsh}\sqrt[3]{x}}$

m) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ n)^{hf} $\operatorname{sgn} x$ o)^{hf} $x \sin x \cos x$ p)^{hf} $\log_x x$

q)^{hf} $(x^3 - 3x + 8)^{2014}$ r)^{hf} $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{1+2x^2}}$ s)^{hf} $(\sin^3(x) + 2)^7$

Megoldás a) $\left(x^7 + \frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)' = \left(x^7 + 2x^{-1} - x^{\frac{1}{2}}\right)' = 7x^6 + 2 \cdot (-1)x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. A függvény $x > 0$ esetén deriválható.
b) $\left(x^7 \cdot \frac{2}{x} \cdot \sqrt{x}\right)' = \left(2x^{\frac{13}{2}}\right)' = 13x^{\frac{11}{2}}$. A függvény $x > 0$ esetén deriválható.
c) $(\operatorname{ctg} x \cdot e^x \cdot \sqrt[5]{x} - 3)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \cdot e^x \cdot \sqrt[5]{x} + \operatorname{ctg} x \cdot e^x \cdot \sqrt[5]{x} + \operatorname{ctg} x \cdot e^x \cdot \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$. A függvény $\sin x \neq 0$ és $x \neq 0$, azaz összefoglalva $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén deriválható.
d) $(e^x + x^e + e^e)' = e^x + ex^{e-1}$, és $x \in \mathbb{R}$ esetén deriválható.
e) $\left(\frac{x^2+2x-1}{x^7+2x+1}\right)' = \frac{(x^2+2x-1)' \cdot (x^7+2x+1) - (x^7+2x+1)' \cdot (x^2+2x-1)}{(x^7+2x+1)^2} = \frac{(2x+2) \cdot (x^7+2x+1) - (7x^6+2) \cdot (x^2+2x-1)}{(x^7+2x+1)^2}$, és a függvény $x^7 + 2x + 1 \neq 0$ esetén deriválható.
f) $(\sin(2x-1))' = 2\cos(2x-1)$, $x \in \mathbb{R}$ esetén.
g) $(\operatorname{tg}(\pi x))' = \pi \frac{1}{\cos^2(\pi x)}$, $\cos(\pi x) \neq 0$, azaz $x \neq \frac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén.
h) $\left(e^{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = e^{\frac{1-x}{1+x}} \frac{-2}{(1+x)^2}$, $x \neq -1$ esetén.
i) $\left(\sin x^2 + \sin^2 x\right)' = \cos x^2 \cdot 2x + 2\sin x \cos x$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
j) $(\ln(e^x + e^{-x}))' = \frac{1}{e^x + e^{-x}}\left(e^x + e^{-x}(-1)\right)$, $e^x + e^{-x} > 0$, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
k) $\left(\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}\right)' = \frac{1}{3}\left(x + \sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)$, és a függvény $x \neq 0$ és $x + \sqrt[3]{x} \neq 0$, azaz összesítve $x \neq 0$ esetén deriválható.
l) $\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{arsh}\sqrt[3]{x}}\right)' = \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-x^{-2}\right) \operatorname{arsh}\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{arsh}^2\sqrt[3]{x}}$, és a függvény $x \neq 0$ és $\operatorname{arsh}\sqrt[3]{x} \neq 0$ esetén, azaz összesítve $x \neq 0$ esetén deriválható.
m) A függvény $x > 0$ esetén deriválható, és $\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$.
n) A függvény $x \neq 0$ esetén deriválható, és ekkor $(\operatorname{sgn} x)' = 0$.
o) $(x \sin x \cos x)' = \sin x \cos x + x\cos^2 x - x\sin^2 x$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
p) $(\log_x x)' = 1' = 0$, ha $x > 0$ és $x \neq 1$.
q) $((x^3 - 3x + 8)^{2014})' = 2014(x^3 - 3x + 8)^{2013}(3x^2 - 3)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
r) $\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{1+2x^2}}\right)' = \frac{2x \cdot \sqrt{1+2x^2} - (x^2+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}} 4x}{1+2x^2}$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
s) $\left((\sin^3(x) + 2)^7\right)' = 7(\sin^3(x) + 2)^6 \cdot 3\sin^2(x) \cdot \cos x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

4. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}, & \text{ha } x \neq 1, \\ \beta, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

a) Megválasztható-e β értéke úgy, hogy az f függvény folytonos legyen $x = 1$-ben?
b) $f'(x) = ?$, ha $x \neq 1$
c) $\lim\limits_{x \to 1} f'(x) = ?$ Létezik-e $f'(1)$?

Megoldás a) A $\lim\limits_{y\to\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$ és $\lim\limits_{y\to-\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}$ határértékek alapján $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = -\frac{\pi}{2}$ és $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{2}$. Ezek szerint $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nem létezik. Minthogy egy függvény pontosan akkor folytonos valahol, ha itt van határértéke, és ez megegyezik a helyettesítési értékével, így β nem választható meg úgy, hogy f folytonos legyen.

b) Ha $x \neq 1$, $f'(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}$.

c) A b) rész szerint $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{1}{2}$. Mivel f nem folytonos 1-ben, így nem is lehet deriválható.