Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 8. hét

1. Milyen α, β-ra deriválhatóak a következő függvények?

a) $\begin{cases} \alpha - \cos x & \text{ha } x > 0 \\ \beta x & \text{különben} \end{cases}$ b)^{hf} $\begin{cases} \sin x & \text{ha } x > 0 \\ \alpha x + \beta & \text{különben} \end{cases}$ c)^{hf} $\begin{cases} x^3 + \alpha & \text{ha } x > 1 \\ 2 - \beta x & \text{különben} \end{cases}$

Megoldás a) Legyen f a megadott függvény. Vegyük észre, hogy $x \neq 0$ esetén a függvény deriválható, és deriváltja $\sin x$, ha $x > 0$, és β, ha $x < 0$. Megvizsgáljuk az $x = 0$ pontot: először megnézzük, hogy milyen feltétel mellett lesz itt f folytonos. Számoljuk ki f bal- és jobboldali határértékét 0-ban; f akkor lesz itt folytonos, ha mindkét határértékre $f(0) = \beta \cdot 0 = 0$ adódik. Mivel

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \alpha - \cos x = \alpha - 1; \quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \beta x = 0,$$

így a folytonosság szükséges és elégséges feltétele, hogy $\alpha - 1 = 0$, azaz $\alpha = 1$. Ekkor kiszámolhatjuk f bal- és jobboldali deriváltját is 0-ban:

$$f'_+(x) = (\alpha - \cos x)' \,|_{x=0} = (\sin x)\,|_{x=0} = 0; \quad f'_-(x) = (\beta x)' \,|_{x=0} = \beta.$$

Mivel egy függvény pontosan akkor deriválható x_0-ban, ha itt balról és jobbról is deriválható, és a féloldali deriváltak megegyeznek, így a deriválhatóságra a fenti kifejezésekből $\beta = 0$ adódik, azaz f pontosan akkor deriválható, ha $\alpha = 1$ és $\beta = 0$.
b) Legyen f a megadott függvény. Az a) rész gondolatmenetét alkalmazva az adódik, hogy

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \sin x = 0; \quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \alpha x + \beta = \beta; \quad f(0) = \beta$$

azaz $\beta = 0$, valamint ezen feltétel mellett:

$$f'_+(x) = (\sin x)' \,|_{x=0} = (\cos x)\,|_{x=0} = 1; \quad f'_-(x) = (\alpha x + \beta)' \,|_{x=0} = \alpha$$

vagyis f pontosan akkor deriválható, ha $\alpha = 1$ és $\beta = 0$.
c) A feltételek most $1 + \alpha = 2 - \beta$ és $3 = -\beta$, amiből $\beta = -3$ és $\alpha = 4$.

2. Írjuk fel az alábbi függvények grafikonjának x_0 abszcisszájú pontjához húzott érintő és normális egyenes egyenletét!

a) $f(x) = x^3, \quad x_0 = 2;$ b) $f(x) = \ln 3x, \quad x_0 = e^2/3;$
c)^{hf} $f(x) = \sin x, \quad x_0 = \pi;$ d)^{hf} $f(x) = 1 + \sin(xe^{2x+1}), \quad x_0 = 0.$

Megoldás Az érintési pont $P_0\,(x_0, f(x_0)) = P_0\,(2, 8)$. Az érintő meredeksége a derivált 2-beli értéke, azaz $m_e = f'(2) = (3x^2)\,|_{x=2} = 12$. Az m meredekségű, $P_0(x_0, y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete $y = y_0 + m(x - x_0)$, azaz az érintő egyenlete $y = 8 + 12(x - 2)$, vagyis $y = 12x - 16$. A normális egyenes a megadott ponton átmenő, érintőre merőleges egyenes. Így az egyenletének felírásához egyedül a meredekségét kell kiszámolnunk. Ismert, hogy ha m_1 és m_2 két egyenes meredeksége, akkor az egyenesek pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha igaz az $m_1 m_2 = -1$ összefüggés. Azaz jelen esetben a normális meredeksége $m_n = -\frac{1}{m_e} = -\frac{1}{12}$, és az egyenlete $y = 8 - \frac{1}{12}(x - 2)$.
b) Az érintési pont $P_0\left(\frac{e^2}{3}, f\left(\frac{e^2}{3}\right)\right) = P_0\left(\frac{e^2}{3}, 2\right)$. Az érintő meredeksége $m_e = f'\left(\frac{e^2}{3}\right) = \frac{3}{e^2}$. A normális meredeksége $m_n = -\frac{1}{m_e} = -\frac{e^2}{3}$. Végül az érintő egyenlete $y = 2 + \frac{3}{e^2}\left(x - \frac{e^2}{3}\right)$, és a normális egyenlete $y = 2 - \frac{e^2}{3}\left(x - \frac{e^2}{3}\right)$.
c) Az előzőekhez hasonló számolással az érintő egyenlete $y = -(x - \pi)$, a normális egyenlete $y = x - \pi$.
d) Mivel $f'(x) = \cos\left(xe^{2x+1}\right)\left(e^{2x+1} + xe^{2x+1}2\right)$, az érintő egyenlete $y = 1 + ex$, és a normális egyenlete $y = 1 - \frac{x}{e}$.

3. Írjuk fel az $y = \ln(x^2+1)$ görbének az $y = x+2$ egyenessel párhuzamos/merőleges érintőinek egyenletét.

Megoldás Az $y = x+2$ egyenes meredeksége 1, így a vele párhuzamos egyenesek meredeksége 1, és a rá merőleges egyeneseké -1. Az $y = \ln(x^2+1)$ görbe x pontjában húzott érintőjének meredeksége $(\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$. Így az x pontban húzott érintő pontosan akkor párhuzamos a megadott egyenessel, ha $\frac{2x}{x^2+1} = 1$. Ezen egyenletnek egyetlen megoldása $x_0 = 1$. Felírva az itteni érintő egyenletét $y = \ln 2 + (x-1)$ adódik. Hasonlóan, ha az x-ben húzott érintő merőleges a megadott egyenesre, akkor $\frac{2x}{x^2+1} = -1$. Ennek az egyenletnek egyetlen megoldása $x = -1$. Az itteni érintő egyenlete $y = \ln 2 - (x+1)$.

4. Pista ceruzájának a hegye a $(4,0)$ pontban van, és innen érintőegyenest szeretne húzni az $f(x) = x^2/3$ függvényhez. Hány fokos szögben kell elindítania a ceruzáját?

Megoldás Írjuk fel a megadott egyenes x_0-beli érintőjének egyenletét. Az érintési pont $P_0\left(x_0, \frac{x_0^2}{3}\right)$. Az érintő meredeksége $m_e = \frac{2x_0}{3}$, így az érintő egyenlete $y = \frac{x_0^2}{3} + \frac{2x_0}{3}(x - x_0)$. A keresett érintők átmennek a $(4,0)$ ponton, azaz a hozzájuk tartozó x_0 megoldása a $0 = \frac{x_0^2}{3} + \frac{2x_0}{3}(4 - x_0)$ egyenletnek. Az egyenlet megoldásai $x_1 = 0$ és $x_2 = 8$. Az ezekhez tartozó érintők meredeksége $m_1 = 0$ és $m_2 = \frac{16}{3}$. Egy egyenes meredeksége az irányszögének tangense, így a két érintő irányszögei $0°$ és $79,38°$. Azaz Pistának $0°$-os vagy $79,38°$-os szögben kell elindítania a ceruzáját.

5.^{hf} Van-e az $f(x) = x^2 - 1$ parabolának olyan érintője, amely átmegy a $(2,2)$ ponton? Ha igen, írjuk fel az érintő egyenletét!

Megoldás A parabola x_0 ponthoz tartozó érintőjének egyenlete $y = x_0^2 - 1 + 2x_0(x - x_0)$. Ha az érintő átmegy a $(2,2)$ ponton, teljesül a $2 = x_0^2 - 1 + 2x_0(2 - x_0)$ egyenlet. Ennek megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = 3$. Az ezen pontokhoz tartozó érintők egyenlete $y = 2x - 2$ és $y = 6x - 10$.

6. Kiszámolandó határértékek:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-5x}$

d)^{hf} $\lim\limits_{x\to 1} (\ln x)\cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ e)^{hf} $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x + \sin x}$ f)^{hf} $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x+1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

g)^{hf} $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{x\cos x}{(2\pi - x)^2}$ h)^{hf} $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x\sin x}\right)$ i)^{hf} $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x}\ln x^7$

j) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\operatorname{tg} x}$ l)^{hf} $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

m)^{hf} $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

Megoldás a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x} = 1$, felhasználva, hogy az eredeti határérték „$\frac{0}{0}$” típusú.
b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$, felhasználva, hogy az első két határérték „$\frac{0}{0}$” típusú.
c) A határérték „$\infty\cdot 0$” típusú, így átalakítjuk. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-5x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{5x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{5e^{5x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{25e^{5x}} = 0$, minthogy a 2. és a 3. határérték „$\frac{\infty}{\infty}$” típusú.
d) A határérték „$0\cdot(\pm\infty)$” típusú, így átalakítjuk. $\lim\limits_{x\to 1} (\ln x)\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}x} = -\frac{2}{\pi}$, mivel a 2. határérték „$\frac{0}{0}$” típusú.

e) A határérték „$\frac{0}{0}$” típusú. Így $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x+1)+xe^x-2e^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x+1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{6}=\frac{1}{6}$, mert az első és a harmadik határérték „$\frac{0}{0}$” típusú.

g) A határérték „$\frac{2\pi}{0}$” típusú, azaz nem kritikus. A Bernoulli-L'Hospital szabály nem alkalmazható, viszont a határérték közvetlenül megállapítható. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{x\cos x}{(2\pi-x)^2}=\infty$.

h) A határérték „$\infty-\infty$” típusú, így átalakítjuk. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6\cos x-6x\sin x-x^2\cos x}=-\frac{1}{6}$, mert a 2-4. határértékek „$\frac{0}{0}$” típusúak.

i) $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}\ln x^7=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{7\ln x}{x^{-1/2}}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{7}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}=\lim\limits_{x\to 0+}-14\sqrt{x}=0$, mert a 2. határérték „$\frac{-\infty}{\infty}$” típusú.

j) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$, mert a 2. és a 4. határérték „$\frac{0}{0}$” típusú.

k) A határérték „0^0” típusú, azaz kritikus, így átalakítjuk. $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\operatorname{tg} x}=\lim\limits_{x\to 0+}\left(e^{\ln x}\right)^{\operatorname{tg} x}=\lim\limits_{x\to 0+}e^{\ln x\cdot\operatorname{tg} x}$. Kiszámoljuk a kitevő határértékét. $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x\cdot\operatorname{tg} x=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{-\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{-2\sin x\cos x}{1}=0$, mert a 2. határérték „$\frac{-\infty}{\infty}$”, a 4. határérték „$\frac{0}{0}$” típusú. Így $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\operatorname{tg} x}=e^0=1$.

l) A határérték „$1^{\pm\infty}$” típusú, azaz kritikus. Az előző feladat gondolatmenetével $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}=\lim\limits_{x\to\pi/4}e^{\ln\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} 2x}$. A kitevő határértéke $\lim\limits_{x\to\pi/4}\ln\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} 2x=\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}=\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}}=\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{-\sin^2 2x}{2\cos x\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi/4}-\sin 2x=-1$, felhasználva, hogy a 2. határérték „$\frac{0}{0}$” típusú. Így $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

m) $\lim\limits_{x\to 0+}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0+}e^{\frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\ln x}}$. A kitevő határértéke $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{-x}{\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}\frac{-1}{\cos x}=-1$, mivel az 1. határérték „$\frac{\infty}{-\infty}$” típusú, és felhaszálva a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ nevezetes határértéket. Így $\lim\limits_{x\to 0+}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}=\frac{1}{e}$.