Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 11. hét

1. Keressük meg a primitív függvényeket.

a) $\displaystyle\int (3x^9 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^2})\,dx$ b)^{hf} $\displaystyle\int \frac{x^2-7x+8}{x^2}\,dx$ c)^{hf} $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$ e)^{hf} $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}\,dx$

Megoldás a) $\int (3x^9 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^2})\,dx = \int (3x^9 - 2x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-2})\,dx = 3\frac{x^{10}}{10} - 2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 2\frac{x^{-1}}{-1} + C$
b) $\int \frac{x^2-7x+8}{x^2}\,dx = \int 1 - 7\frac{1}{x} + 8x^{-2}\,dx = x - 7\ln|x| + 8\frac{x^{-1}}{-1} + C$
c) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int 1 - \frac{1}{x^2+1}\,dx = x - \operatorname{arctg} x + C$
d) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1\,dx = \operatorname{tg} x - x + C$
e) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}\,dx = \int \cos x - \sin x\,dx = \sin x + \cos x + C$

2. Keressük meg a primitív függvényeket.

a) $\displaystyle\int (2x+3)^5\,dx$ b)^{hf} $\displaystyle\int \frac{1}{(3-2x)^5}\,dx$ c)^{hf} $\displaystyle\int \frac{2}{9x+1}\,dx$

d)^{hf} $\displaystyle\int e^{11x} + \cos(111x)\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{2}\right)^2}}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{2}{4x^2+4x+11}\,dx$

g) $\displaystyle\int \sin(3x-1)\cos(2-x)\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{2x}{9x^2+3}\,dx$ i) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

j) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$ k) $\displaystyle\int \sin x\cos^4 x\,dx$ l) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$

m) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$ n) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ o) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{-2x-x^2}}\,dx$

p)^{hf} $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ q)^{hf} $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}\,dx$ r)^{hf} $\displaystyle\int e^{9x}(e^{9x}+1)^9\,dx$

s) $\displaystyle\int xe^{3x^2}\,dx$ t)^{hf} $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt{t}}$ u)^{hf} $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

v)^{hf} $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$ w)^{hf} $\displaystyle\int \frac{2}{\cos^2 x\operatorname{tg}^4 x}\,dx$

Megoldás a) $\int (2x+3)^5\,dx = \frac{\frac{(2x+3)^6}{6}}{2} + C = \frac{(2x+3)^6}{12} + C$
b) $\int \frac{1}{(3-2x)^5}\,dx = \int (3-2x)^{-5}\,dx = \frac{(3-2x)^{-4}}{(-2)\cdot(-4)} + C$
c) $\int \frac{2}{9x+1}\,dx = 2\frac{\ln|9x+1|}{9} + C$
d) $\int e^{11x} + \cos(111x)\,dx = \frac{e^{11x}}{11} + \frac{\sin 111x}{111} + C$
e) $\int \frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{2}\right)^2}}\,dx = 2\frac{\arcsin\frac{1-x}{2}}{-\frac{1}{2}} + C$
f) $\int \frac{2}{4x^2+4x+17}\,dx = \int \frac{2}{(2x+1)^2+16}\,dx = \frac{2}{16}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{8}\frac{\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4}}{\frac{1}{2}} + C$
g) Itt alkalmazzuk a $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$ azonosságot.
$\int \sin(3x-1)\cos(2-x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+1) + \sin(4x-3)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(2x+1)}{2} - \frac{\cos(4x-3)}{4}\right) + C$
h) $\int \frac{2x}{9x^2+3}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{18x}{9x^2+3}\,dx = \frac{1}{9}\ln|9x^2+3| + C$
i) $\int \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx = \frac{\ln^{-2} x}{-2} + C$
j) $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$
k) $\int \sin x\cos^4 x\,dx = -\int -\sin x\cos^4 x\,dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$

l) $\int \sin^5 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx = \int \sin x - 2\cos^2 x \sin x + \cos^4 x \sin x\,dx = -\cos x + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$

m) $\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{4}\left(x - 2\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right)\right) + C.$

n) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$

o) Mivel $(-2x-x^2)' = -2-2x$, így

$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(-2-2x)-2}{\sqrt{-2x-x^2}}\,dx = -\frac{3}{2}\int(-2-2x)\,(-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx - \int \frac{2}{\sqrt{-2x-x^2}}\,dx = -\frac{3}{2}\frac{\left(-2x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx = -3\sqrt{-2x-x^2} - 2\arcsin(x+1) + C$

p) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + C$

q) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}\,dx = \ln|\arcsin x| + C$

r) $\int e^{9x}(e^{9x}+1)^9\,dx = \frac{1}{9}\int 9e^{9x}(e^{9x}+1)^9\,dx = \frac{1}{9}\frac{(e^{9x}+1)^{10}}{10} + C$

s) $\int xe^{3x^2}\,dx = \frac{1}{6}\int (6x)e^{3x^2}\,dx = \frac{1}{6}e^{3x^2} + C$

t) $\int \frac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt{t}} = 2\int \left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)e^{\sqrt{t}}\,dt = 2e^{\sqrt{t}} + C$

u) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

v) $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx = \frac{\ln^4 x}{4} + C$

w) $\int \frac{2}{\cos^2 x\,\mathrm{tg}^4 x}\,dx = 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{tg}^{-4} x\,dx = 2\frac{\mathrm{tg}^{-3} x}{-3} + C$

3. Keressük meg a primitív függvényeket.

a) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx$ b)^{hf} $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ c)^{hf} $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$

d)^{hf} $\displaystyle\int \ln x\,dx$ e) $\displaystyle\int \mathrm{arctg}\,x\,dx$ f) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$

g)^{hf} $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

Megoldás a) A parciális integrálás tételét alkalmazzuk az $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^{-x}$ választással. Ekkor $f'(x) = 2x$ és $g(x) = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$, amiből
$\int x^2 e^{-x}\,dx = x^2\left(-e^{-x}\right) - \int 2x\left(-e^{-x}\right)\,dx = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}\,dx.$
Most megint ezt a tételt alkalmazzuk az $f(x) = 2x$ és $g'(x) = e^{-x}$ választással, amiből $f'(x) = 2$ és $g(x) = -e^{-x}$. Behelyettesítve:
$\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - \int 2\left(-e^{-x}\right)\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C.$
b) Az $f(x) = x$ és $g'(x) = \cos x$ választás esetén $f'(x) = 1$ és $g(x) = \sin x$, amiből
$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$
c) Az $f(x) = x$ és $g'(x) = e^{2x}$ választás esetén $f'(x) = 1$ és $g(x) = \frac{e^{2x}}{2}$, amiből
$\int xe^{2x}\,dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$
d) Az $f(x) = \ln x$ és $g'(x) = 1$ választás esetén $f'(x) = \frac{1}{x}$ és $g(x) = x$, amiből
$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$
e) Az $f(x) = \mathrm{arctg}\,x$ és $g'(x) = 1$ választás esetén $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ és $g(x) = x$, amiből
$\int \mathrm{arctg}\,x\,dx = x\,\mathrm{arctg}\,x - \int x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$
f) Parciális integrálást alkalmazunk: $f(x) = \sin x$, $g'(x) = e^x$, $f'(x) = \cos x$, $g(x) = e^x$. Ebből
$\int e^x \sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$
Még egy parciális integrálást alkalmazunk: $f(x) = \cos x$, $g'(x) = e^x$, $f'(x) = -\sin x$, $g(x) = e^x$.
$e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \left(e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\right).$
A zárójelet felbontva azt kapjuk, hogy
$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx.$ Vegyük észre, hogy visszakaptuk az eredeti integrált, amit így (ismeretlennek tekintve) kifejezhetünk a fenti egyenlőségből:
$2\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x + 2C$ és $\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x\sin x - \frac{1}{2}e^x\cos x + C.$

g) Az $f(x) = \ln x$ és $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ választással $f'(x) = \frac{1}{x}$ és $g(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$, amiből:
$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$

4.hf Hol a hiba? $\ln|x| = \int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{100}{100x}\,dx = 100\int \frac{1}{100x}\,dx = 100\frac{\ln|100x|}{100} = \ln|100x|$

Megoldás Vegyük észre, hogy mind a bal- és a jobboldalon a használt primitív függvényeknél lemaradtak a konstansok. A lemaradt konstansokat beírva az állítás szerint $\ln|x| + C = \ln|100x| + C'$ teljesül, illetve pontosabb formában az, hogy az $\{\ln|x| + C : C \in \mathbb{R}\}$ és az $\{\ln|100x| + C' : C' \in \mathbb{R}\}$ halmazok egyenlőek. Mivel $\ln|100x| = \ln|x| + \ln 100$, tehát $\ln|x|$ és $\ln|100x|$ csak egy konstansban különbözik, ez az állítás tényleg teljesül.