Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 12. hét

1. Alkalmas helyettesítéssel számoljuk ki a következő integrálokat.

a) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})}\,dx$ d) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+8}\,dx$ f) $\displaystyle\int x^2\sin(x^3)\,dx$ g)^{hf} $\displaystyle\int \sin x e^{\cos x}\,dx$ h)^{hf} $\displaystyle\int \sin\ln x\,dx$

i)^{hf} $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ j)^{hf} $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ k)^{hf} $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ l)^{hf} $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

m)^{hf} $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

Megoldás a) Próbálkozzunk meg a $\sqrt{x}=t$ helyettesítéssel. Ekkor $x=t^2$ és $dx=2t\,dt$. Írjuk át az integrált:
$\int \cos\sqrt{x}\,dx = \int \cos t\cdot 2t\,dt$
A 11. hét anyaga alapján ezt az integrált parciális integrálással érdemes átalakítani: a $f(t)=2t$, $g'(t)=\cos t$ választás esetén $f'(t)=2$, $g(t)=\sin t$, így
$\int \cos t\cdot 2t\,dt = 2t\sin t - \int 2\sin t\,dt = 2t\sin t + 2\cos t + C$
Minthogy az eredeti változónk x volt, nem t, visszaírjuk a végeredményt x-re a $t=\sqrt{x}$ helyettesítéssel.
$\int \cos\sqrt{x}\,dx = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$
b) Most legyen $e^x=t$, amiből $x=\ln t$ és $dx=\frac{1}{t}\,dt$. Beírva:
$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C$
c) Mivel a kifejezésben szerepel $\sqrt{x}$ és $\sqrt[3]{x}$ is, érdemes lehet megpróbálkozni a $\sqrt[6]{x}=t$ helyettesítéssel. Ebből $x=t^6$ és $dx=6t^5\,dt$, azaz
$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})}\,dx = \int \frac{1}{t^3(t^3-t^2)}6t^5\,dt = \int \frac{6}{t-1}\,dt = 6\ln|t-1| + C = 6\ln|\sqrt[6]{x}-1| + C$
d) Most az $x=\sin t$ helyettesítéssel próbálkozunk. Ebből $dx=\cos t\,dt$ és $t=\arcsin x$.
$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt$
Mivel $t=\arcsin x$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, így $\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|=\cos t$. Azaz az integrál:
$\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$
A 11. héten látott ötletek alapján tudható, hogy a linearizáló képletek alkalmazásával érdemes folytatni.
$\int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + C.$
e) $\int \sqrt{x^2+4x+8}\,dx = \int \sqrt{(x+2)^2+4}\,dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\,dx$
Az $\frac{x+2}{2}=\operatorname{sh} t$ helyettesítést érdemes alkalmazni (ld. Emlékeztető). Ebből $t=\operatorname{arsh}\frac{x+2}{2}$, $x=2\operatorname{sh} t-2$, $dx=2\operatorname{ch} t\,dt$. Alkalmazva:
$2\int \sqrt{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\,dx = 2\int \sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1}\cdot 2\operatorname{ch} t\,dt = 4\int \operatorname{ch}^2 t\,dt$
A linearizáló képletek alkalmazásával
$4\int \operatorname{ch}^2 t\,dt = 2\int \operatorname{ch} 2t + 1\,dt = \operatorname{sh} 2t + 2t + C = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arsh}\frac{x+2}{2}\right) + 2\operatorname{arsh}\frac{x+2}{2} + C$
f) Vegyük észre, hogy $(x^3)'=3x^2$. Így megpróbálkozhatunk az $x^3=t$ helyettesítéssel, melyből $3x^2\,dx=dt$.
$\int x^2\sin(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(x^3)3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C$
g) Vegyük észre, hogy $(\cos x)'=-\sin x$. A $\cos x=t$ helyettesítéssel $-\sin x\,dx=dt$, amiből
$\int \sin x e^{\cos x}\,dx = -\int e^{\cos x}(-\sin x)\,dx = -\int e^t\,dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$
h) Legyen $t=\ln x$, amiből $x=e^t$ és $dx=e^t\,dt$. Az integrál
$\int \sin\ln x\,dx = \int \sin t e^t\,dt.$

Ez az integrál parciális integrálással számolható ki (ld. 11. hét, 3/f feladat). A megoldást onnan átmásoljuk:
$\int \sin t e^t \, dt = \frac{1}{2}e^t \sin t - \frac{1}{2}e^t \cos t + C = \frac{1}{2}x \sin \ln x - \frac{1}{2}x \cos \ln x + C$
i) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} \, dx$
Az Emlékeztető szerint érdemes az $\frac{x}{3} = \sin t$ helyettesítést alkalmazni. Ekkor $x = 3 \sin t$, $dx = 3 \cos t \, dt$ és $t = \arcsin \frac{x}{3}$ (a helyettesítés után a d) feladat módszerét alkalmazzuk).
$\frac{1}{3} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{9 \sin^2 t}{\cos t} 3 \cos t \, dt = 3 \int \sin^2 t \, dt = 3 \int \frac{1-\cos 2t}{2} \, dt = 3t - \frac{3}{4} \sin 2t + C = 3 \arcsin \frac{x}{3} - \frac{3}{4} \sin \left(2 \arcsin \frac{x}{3}\right) + C$
j) $\int \sqrt{4-x^2} \, dx = 2 \int \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \, dx$
Legyen $\frac{x}{2} = \sin t$. Ekkor $x = 2 \sin t$, $dx = 2 \cos t \, dt$, $t = \arcsin \frac{x}{2}$.
$2 \int \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \, dx = 2 \int \cos t \cdot 2 \cos t \, dt = 4 \int \cos^2 t \, dt = 2 \int 1 + \cos 2t \, dt = 2t + \sin 2t + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \sin \left(2 \arcsin \frac{x}{2}\right) + C$
k) Legyen $\sqrt{x} = t$, amiből $x = t^2$, $dx = 2t \, dt$ és
$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2t}{t^2-t} \, dt = \int \frac{2}{t-1} \, dt = 2 \ln |t-1| + C = 2 \ln |\sqrt{x}-1| + C$
l) Mivel ezen trigonometrikus függvényre nem alkalmazhatóak az eddigi módszerek, az Emlékeztető szerint most a $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel érdemes lehet próbálkozni. A képletgyűjtemény szerint ilyenkor $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Másrészt ha $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, akkor $x = 2 \operatorname{arctg} t$ és $dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt$. Így $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int \frac{1}{t} \, dt = \ln |t| + C = \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C$
m) Vegyük észre, hogy $(x^2)' = 2x$. Legyen most $x^2 = t$, amiből $2x \, dx = dt$. Végezzük el a helyettesítést:
$\int \frac{2x \, dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin x^2 + C$

2. Keressük meg a primitív függvényeket.

a) $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2+1} \, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x+2)^2} \, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} \, dx$

d)^{hf} $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} \, dx$ e)^{hf} $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} \, dx$ f)^{hf} $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+6x+9} \, dx$

g)^{hf} $\displaystyle\int \frac{2x+3}{4x^2-4x+10} \, dx$ h)^{hf} $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} \, dx$ i)^{hf} $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+x-2} \, dx$

Megoldás a) Először polinomosztást végzünk: $\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2+1} = 2x - 4 + \frac{-3x+1}{x^2+1}$. A maradékból adódó tört egy elsőfokú és egy másodfokú polinom hányadosa, így a tanult lépésekkel tudjuk integrálni.
$\int 2x - 4 + \frac{-3x+1}{x^2+1} \, dx = x^2 - 4x - \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx + \int \frac{1}{x^2+1} \, dx = x^2 - 4x - \frac{3}{2} \ln |x^2+1| + \operatorname{arctg} x + C$
b) Mivel a nevező foka kisebb, mint a számláló foka, nem kell elosztani a kettőt. A nevező szorzattá van bontva, így parciális törtekre bontással kezdjük. Az integrandust $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$ alakban fogjuk felírni, ahol $A, B \in \mathbb{R}$. A feladatunk meghatározni A, B értékét úgy, hogy a fenti kifejezés egyenlő legyen az integrandussal. Ehhez a szétbontott alakot az integrandushoz hasonló alakra hozzuk:
$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+(2A+B)}{(x+2)^2}$. Ez a tört akkor egyenlő az $\frac{x-2}{(x+2)^2}$ törttel, ha a számlálókban szereplő különböző x-hatványok együtthatói páronként egyenlők, azaz $A = 1$ és $2A + B = -2$. Az így kapott egyenletrendszer megoldása $A = 1$ és $B = -4$, tehát $\frac{x-2}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2}$. Azaz az integrál $\int \frac{x-2}{(x+2)^2} \, dx = \int \frac{1}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} \, dx = \ln |x+2| - 4 \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C$
c) Ennél a függvénynél is a parciális törtekre bontással kezdhetjük:
$\frac{x^2-x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
A két tört akkor egyenlő, ha $x^2 - x + 2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$. Itt

viszont, ha fennáll az egyenlőség, x helyett tetszőleges valós számot behelyettesítve mindkét oldalba ugyanazt a mennyiséget kapjuk. Három tetszőleges számot behelyettesítve három egyenletet kapunk, melyekből A, B, C értéke általában meghatározható. Helyettesítsük be a nevező gyökeit: $x = 1$ esetén $2 = 2A$, $x = 2$ esetén $4 = -B$, $x = 3$ esetén $8 = 2C$. Ezen egyenletek megoldása $A = 1$, $B = -4$ és $C = 4$. Most már elvégezhetjük az integrálást.
$\int \frac{x^2-x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)}\,dx = \int \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3}\,dx = \ln|x-1| - 4\ln|x-2| + 4\ln|x-3| + C$
d) Bontsuk szorzattá a nevezőt. A másodfokú kifejezés gyökei -1 és 3, azaz $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$. A törtet most már parciális törtekre bonthatjuk. $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$. Azaz $5x - 3 = A(x-3) + B(x+1)$. Behelyettesítve $x = -1$-et és $x = 3$-at, azt kapjuk, hogy $-8 = -4A$ és $12 = 4B$, amiből $A = 2$ és $B = 3$.
$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \int \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}\,dx = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C$
e) Polinomosztással $\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} = 2x + \frac{5x-3}{x^2-2x-3}$. Innen d) alapján

$$\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx = x^2 + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C$$

f) A nevező szorzattá bontva $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$. Parciális törtekre bontunk. $\frac{x+5}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2}$. Behelyettesítve a számlálókba $x = -3$-at és $x = 0$-t azt kapjuk, hogy $B = 2$ és $3A + B = 5$ azaz $A = 1$.
$\int \frac{x+5}{x^2+6x+9}\,dx = \int \frac{1}{x+3} + \frac{2}{(x+3)^2}\,dx = \ln|x+3| + 2\frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C$
g) Mivel a másodfokú kifejezésnek nincsenek gyökei, a nevezőt nem lehet szorzattá bontani. Így a tanult módszerrel integrálhatjuk:
$\int \frac{2x+3}{4x^2-4x+10}\,dx = \int \frac{\frac{1}{4}(8x-4)+4}{4x^2-4x+10}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x-4}{4x^2-4x+10}\,dx + \int \frac{4}{4x^2-4x+10}\,dx = \frac{1}{4}\ln|4x^2-4x+10| + 4\int \frac{1}{(2x-1)^2+9}\,dx = \frac{1}{4}\ln|4x^2-4x+10| + \frac{4}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|4x^2-4x+10| + \frac{4}{9}\frac{\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{3}}{\frac{2}{3}} + C$
h) Parciális törtekre bontást alkalmazunk.
$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(A+C-2D)x+(-A+B+D)}{(x-1)^2(x^2+1)}$, amiből $A + C = 0$, $A + B - 2C + D = 0$, $A + C - 2D = 0$ és $-A + B + D = 1$. Az egyenletrendszer megoldása $A = -\frac{1}{2} = -B = -C$ és $D = 0$. Azaz
$\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \int -\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + C$
i) Most polinomosztással kezdjük: $\frac{x^4}{x^2+x-2} = x^2 - x + 3 + \frac{-5x+6}{x^2+x-2}$. A nevező szorzattá bontása: $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$. Parciális törtekre bontunk: $\frac{-5x+6}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$. A számlálókba $x = 1$-et és $x = -2$-t helyettesítve $1 = 3A$ és $16 = -3B$, amiből $A = \frac{1}{3}$ és $B = -\frac{16}{3}$. Az integrálás:
$\int \frac{x^4}{x^2+x-2}\,dx = \int x^2 - x + 3 + \frac{1/3}{x-1} - \frac{16/3}{x+2}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{16}{3}\ln|x+2| + C$