Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 13. hét

1. Mekkora az f és g függvények grafikonja által közrefogott síkidom területe, ha

   a) $f(x) = x + 2$ és $g(x) = x^2$
   b)^{hf} $f(x) = x^2$ és $g(x) = x^3$
   c)^{hf} $f(x) = x^2$ és $g(x) = -x^2 + 2$

   Megoldás a) Először számoljuk ki a metszéspontokat: az $x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldásai $x = -1$ és $x = 2$. Másrészt ha $-1 \le x \le 2$, akkor $x^2 - x - 2 \le 0$, azaz $x^2 \le x + 2$. Tehát a két függvény grafikonja által közrefogott síkidom területe a Newton-Leibniz tétel alapján:
   $T = \int\limits_{-1}^{2} x + 2\,dx - \int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx = \int\limits_{-1}^{2} x + 2 - x^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{9}{2}$.
   b) A metszéspontok: $x^2 = x^3 \iff x^2(x-1) = 0 \iff x = 0$ vagy $x = 1$. Ha $0 \le x \le 1$, akkor $x^2 \ge x^3$, azaz a terület: $T = \int\limits_{0}^{1} x^2 - x^3\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{12}$.
   c) A metszéspontok $x \pm 1$, és a két érték közt $x^2 \le 2 - x^2$. A terület:
   $T = \int\limits_{-1}^{1} 2 - 2x^2\,dx = \left[2x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$.

2. Mekkora az $\left.\begin{array}{l} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{array}\right\}$, $t \in [0, 2\pi]$ görbe (ciklois) és az x-tengely által közbezárt terület?

   Megoldás Mivel $\dot{x}(t) = 1 - \cos t > 0$, ha $t \in (0, 2\pi)$, $x(t)$ szigorúan növő a vizsgált intervallumon, azaz a paraméterezés balról jobbra fut végig a görbén. Másrészt ugyanígy $y(t) \ge 0$ is teljesül a vizsgált intervallumon, azaz a grafikon alatti területet számolhatjuk az emlékeztetőben megadott módon.
   $T = \int\limits_{0}^{2\pi} y(t)\dot{x}(t)\,dt = \int\limits_{0}^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt = \int\limits_{0}^{2\pi} 1 - 2\cos t + \cos^2 t\,dt = \int\limits_{0}^{2\pi} 1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$
   $\left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{0}^{2\pi} = 3\pi$.

3.^{hf} Mekkora az $\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array}\right\}$, $t \in [0, 2\pi]$ egyenletű, a és b féltengelyű ellipszis területe?

   Megoldás A paraméterezés az óramutató járásával ellenkező irányban fut végig az ellipszis pontjain. Így alkalmazva a zárt görbére vonatkozó képletet $\dot{x}(t) = -a\sin t$, és a bezárt terület:
   $T = -\int\limits_{0}^{2\pi} b\sin t(-a\sin t)\,dt = ab\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 t\,dt = ab\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_{0}^{2\pi} = ab\pi$.

4. Mennyi az $y = x^{3/2}$ görbe ívhossza, ha $x \in [0, 2]$

   Megoldás Mivel $\left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{1/2}$, alkalmazva az ívhosszra vonatkozó képletet,
   $s = \int\limits_{0}^{2} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx = \int\limits_{0}^{2} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \left[\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}}\right]_{0}^{2} = \frac{8}{27}\cdot\left(10^{3/2} - 1\right)$.

5. Számoljuk ki az r sugarú gömb térfogatát és felszínét!

Megoldás Ha egy origó középpontú r sugarú kör felső félkörét (azaz az $y \geq 0$ feltételt kielégítő pontjait) az x-tengely körül megforgatjuk, éppen egy r sugarú gömböt kapunk. A fenti félkör pontjai leírhatók $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ alakban, ahol $-r \leq x \leq r$. Tehát a képletünk alapján a gömb térfogata:

$V = \pi \int\limits_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int\limits_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi \cdot \left(\frac{2}{3}r^3 - \left(-\frac{2}{3}r^3\right)\right) = \frac{4}{3}r^3\pi.$

Minthogy $\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)' = \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-1/2} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, a felszín:

$A = 2\pi \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} \, dx = 2\pi \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2 + (-x)^2} \, dx = 2\pi \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2} \, dx = 2\pi \int\limits_{-r}^{r} r \, dx = 2\pi \left[rx\right]_{-r}^{r} = 4r^2\pi.$

6. Mennyi a megadott integrálok értéke?

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-8}^\infty \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

d)[hf] $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$, ahol $p \in \mathbb{R}$ egy paraméter.

e)[hf] $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, ahol $p \in \mathbb{R}$ egy paraméter.

Megoldás a) A fenti integrál egyedül ∞ miatt improprius, mivel a megadott intervallumon az integrandus folytonos. Így

$\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^b = \lim\limits_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$, felhasználva az $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ függvény tulajdonságait.

b) A megadott intervallumon az integrandus az $x = 1$ pont kivételével folytonos, és $x = 1$ az integrálás intervallumának határán van, így

$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim\limits_{b\to 1-0} \int\limits_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim\limits_{b\to 1-0} \left[\arcsin\right]_0^b = \lim\limits_{b\to 1-0} \arcsin b = \frac{\pi}{2}.$

c) A megadott intervallumon 0 és ∞ egy-egy problémás hely, és 0 az integrálási tartomány belsejében van, így a megadott intervallumot három részre kell bontanunk.

$\int\limits_{-8}^\infty \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int\limits_{-8}^0 \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx + \int\limits_0^1 \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx + \int\limits_1^\infty \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \lim\limits_{b\to 0-0} \int\limits_{-8}^b 3x^{-2/3}\,dx + \lim\limits_{a\to 0+0} \int\limits_a^0 3x^{-2/3}\,dx + \lim\limits_{c\to\infty} \int\limits_1^c 3x^{-2/3}\,dx = \lim\limits_{b\to 0-0} \left[3\frac{x^{1/3}}{1/3}\right]_{-8}^b + \lim\limits_{a\to 0+0} \left[9\sqrt[3]{x}\right]_a^1 + \lim\limits_{c\to\infty} \left[9\sqrt[3]{x}\right]_1^c = \lim\limits_{b\to 0-0} \left(9\sqrt[3]{b} + 18\right) + \lim\limits_{a\to 0+0} \left(9 - 9\sqrt[3]{a}\right) + \lim\limits_{c\to\infty} \left(9\sqrt[3]{c} - 9\right) = \infty$, mert „$18 + 9 + \infty$” $=\infty$.

d) Most csak a ∞ hellyel lehet probléma. Így, megvizsgálva először a $p \neq 1$ esetet:

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b x^{-p}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } p < 1 \\ \frac{1}{p-1} & \text{ha } p > 1 \end{cases}$

Másrészt, ha $p = 1$, akkor

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b = \infty.$

Összesítve tehát:

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \infty, & \text{ha } p \leq 1 \\ \frac{1}{p-1} & \text{ha } p > 1 \end{cases}$

e) Az előző feladathoz hasonló módon az adódik, hogy:

$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \infty, & \text{ha } p \geq 1 \\ \frac{1}{1-p} & \text{ha } p < 1 \end{cases}$