Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 14. hét

1. Bontsuk fel a $\vec{v}$ vektort a $\vec{a}$, $\vec{b}$ és a $\vec{c}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre.

a) $\vec{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 10 \end{bmatrix}$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$

b)^{hf} $\vec{v} = \begin{bmatrix} 31 \\ -37 \\ 19 \end{bmatrix}$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Megoldás Ebben a feladatban a $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ egyenlet megoldásait keressük, ahol $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ az ismeretlenek.
a)

$$\begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 10 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ebből:

$$\begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha - \beta + \gamma \\ -\alpha + 3\beta \\ \alpha + 7\gamma \end{bmatrix},$$

így a koordináták egyenlőségéből kapunk egy három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert, melynek megoldása $\alpha = 3$, $\beta = -2$ és $\gamma = 1$, azaz $\vec{v}$ felbontása $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.
b) Az előző feladathoz hasonló módon kaphatjuk a megoldást: $\vec{v} = -3\vec{a} - 3\vec{b} + 7\vec{c}$.

2. Döntse el, hogy lineárisan függetlenek-e.

a) $\vec{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ b)^{hf} $\vec{a} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Megoldás Ebben a feladatban azt akarjuk megtudni, hogy az $\vec{o} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ egyenletnek, ahol $\vec{o}$ a nullvektor, van-e az $\alpha = \beta = \gamma = 0$ megoldástól különböző megoldása. Ha nincs, a vektorok lineárisan függetlenek, ha van, összefüggőek.
a) Az egyenletünk:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\alpha - 4\gamma \\ 2\alpha + 4\beta + 6\gamma \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma \end{bmatrix}.$$

Ebből, némi számolással azt kapjuk, hogy a fenti egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van: $\beta = \alpha$, $\gamma = -\alpha$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen választható. Tehát a vektorok lineárisan összefüggőek.
b) Hasonló számolással kapjuk, hogy a kérdéses vektoregyenletnek csak $\alpha = \beta = \gamma = 0$ a megoldása, azaz a vektorok lineárisan függetlenek.

3.^{hf} Számítsuk ki az $\vec{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorok szögét.

Megoldás A két vektor γ szögére az igaz, hogy $\cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Jelen esetben $\vec{a}\cdot\vec{b} = 7\cdot 2 + (-1)\cdot 20 + 6\cdot 1 = 0$. Tehát $\cos\gamma = 0$, amiből $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

4. Mennyi legyen $t \in \mathbb{R}$ értéke, hogy az $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ t \end{bmatrix}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra?

Megoldás A két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk nulla. Most $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 12 + (-6)\cdot 4 + 1\cdot t = 12 + t$, tehát a két vektor $t = -12$ esetén lesz egymásra merőleges.

5. A z-tengely melyik pontjából látszik az $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ pontpár $30°$-os szög alatt?

Megoldás A z-tengely egy tetszőleges pontja felírható $C(0,0,z)$ alakban. Ekkor C-ből pontosan akkor látszik az A, B pontpár $30°$-os szög alatt, ha a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok szöge $30°$; más szóval, ha teljesül a $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos 30°$ egyenlőség. Koordinátákkal kifejezve ezt az egyenlőséget a $z^2 = \sqrt{z^2+1}\cdot\sqrt{z^2+1}\cos 30°$ egyenlet adódik, melynek megoldásai $z = \pm\sqrt{2\sqrt{3}+3}$.

6.[hf] Bizonyítsuk be, hogy az $A(0,0,0)$, $B(4,3,1)$, $C(8,4,-2)$ és $D(4,1,-3)$ pontok egy rombusz csúcsai.

Megoldás A fenti pontokra $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \overrightarrow{DC}$, tehát a fenti négy pont egy olyan parallelogramma csúcsai, ahol a csúcsok sorrendje A, B, C és D. Másrészt $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+3^2+1^2} = \sqrt{26} = |\overrightarrow{BC}|$, tehát a parallelogrammának egyenlők az oldalai.

7. Bontsuk fel az $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$ vektort a $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorral párhuzamos, és rá merőleges összetevőkre.

Megoldás Ha $\vec{b}$ egy egységnyi hosszú vektor, akkor $\vec{a}$ $\vec{b}$ irányú komponense $\vec{a}_{||} = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{b}$. Azaz ha $\vec{b}$ nem egységnyi hosszú, akkor $\vec{a}_{||} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}$, és a merőleges komponens $\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{||}$. A fenti adatok esetén $\vec{a}_{||} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ és $\vec{a}_{\perp} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

8. Számítsuk ki az $A(1,0,-2)$, $B(4,3,8)$ és $C(0,-4,6)$ csúcsú háromszög területét!

Megoldás Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok által kifeszített parallelogramma területe $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Így a keresett háromszög területe $T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. A tanult módszerek alapján $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 64 \\ -34 \\ -9 \end{bmatrix}$. Ebből $T = \frac{\sqrt{64^2+(-34)^2+(-9)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5333}}{2} \approx 36,51$.

9.[hf] Egy kocka egyik csúcsa az origó, két vele szomszédos csúcs pedig $(1,4,8)$ és $(8,-4,1)$. Számítsuk ki a harmadik origóval szomszédos csúcs koordinátáit.

Megoldás A keresett csúcs helyvektorának lehetséges értékei éppen a két megadott pont helyvektorára merőleges, ezen vektorokkal egyenlő hosszú vektorok. A megadott pontok helyvektorainak hossza $\sqrt{1^2+4^2+8^2}=9$. Vegyük észre, hogy: két megoldás van, melyek egymás (-1)-szeresei; ha a két helyvektor vektoriális szorzatát vesszük, akkor egy mindkét helyvektorra merőleges, de 81 egység hosszú vektort kapunk. A tanult számítási mód szerint $\begin{bmatrix}1\\4\\8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}8\\-4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}36\\63\\-36\end{bmatrix}$. Ezt 9-cel osztva kapjuk az egyik megoldás helyvektorát. Tehát a 3. csúcs lehetséges koordinátái: $(4,7,-4)$ és $(-4,-7,4)$.

10.[hf] Mekkora szöget zárnak be az $ABCD$ tetraéder ABC és ABD lapsíkjai, ha a csúcsok koordinátái $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ és $D(-5,-4,8)$?

Megoldás Vegyük észre, hogy két sík szöge éppen a síkokra merőleges vektorok szöge (amennyiben ez nem tompaszög). Másrészt az $\vec{a}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ vektor merőleges az ABC síkra, míg a $\vec{b}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ vektor az ABD síkra. Ezen két vektorra $\vec{a}=\begin{bmatrix}-12\\-24\\8\end{bmatrix}$ és $\vec{b}=\begin{bmatrix}-7\\35\\-28\end{bmatrix}$.

Kiszámoljuk a vektorok γ szögét: $\cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-9}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{42}}$. Ebből $\gamma\approx 104,944°$, amiből a két sík által bezárt szög $180°-\gamma\approx 75,056°$.

11. Döntsük el, a megadott négy pont egy síkba esik-e: $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(4,1,3)$.

Megoldás A pontok pontosan akkor esnek egy síkba, ha az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok ugyanazon, origón átmenő síkba esnek. Ez pontosan akkor teljesül, ha a vektorok által kifeszített parallelepipedon elfajuló, azaz térfogata nulla. Ezen parallelepipedon előjeles térfogata a három vektor vegyes szorzata. Azaz azt kell csak eldöntenünk, hogy a fenti három vektor vegyesszorzata nulla-e, vagy sem. Jelen esetben $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=-4$, azaz a pontok nem esnek egy síkba.

12. Mennyi az $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$ és $D(1,2,3)$ csúcsú tetraéder térfogata?

Megoldás A tetraéder térfogata

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot|54|=9.$$

13. Számítsa ki az $\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}4\\2\\-1\end{bmatrix}$ és $\vec{c}=\begin{bmatrix}1\\0\\-3\end{bmatrix}$ vektorokra $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ értékét.

Megoldás A vektoriális szorzásra vonatkozó $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}$ azonosságot alkalmazzuk. Ez alapján $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\begin{bmatrix}-18\\19\\-6\end{bmatrix}$.