Elmélet

A) (5 pont) Mondja ki egy függvény adott felosztáshoz tartozó alsó közelítő összegének definícióját, és vezesse be a benne szereplő mennyiségeket is!

Megoldás Legyen f korlátos $[a;b]$-n, és $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ az intervallum egy felosztása. Legyen $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Ekkor a $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ kifejezést a függvénynek a felosztáshoz tartozó alsó közelítő összegének nevezzük.

B) (5 pont) Mondja ki a Lagrange-tételt!

Megoldás Legyen f folytonos $[a;b]$-n és deriválható $(a;b)$-n. Ekkor létezik olyan $t \in (a;b)$ melyre $f'(t) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

C) (5 pont) Mondja ki három vektor vegyes szorzatának definícióját, és írja le ennek geometriai jelentését!

Megoldás Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok vegyes szorzata a $[a;b;c] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ mennyiség. Ez megadja a vektorok által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogatát.

1. (6 pont) Oldja meg a komplex számok halmazán a $-\operatorname{Re}(z) + 2\bar{z} + |z| = 1 - i$ egyenletet!

Megoldás Legyen $z = a + bi$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Ezt behelyettesítve az egyenletbe

$$-a + 2(a - bi) + \sqrt{a^2 + b^2} = 1 - i.$$

Ha két komplex szám egyenlő, akkor valós és képzetes részeik is megegyeznek, így $a + \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ és $-2b = -1$. Az utóbbi egyenletből $b = \frac{1}{2}$, amit az első egyenletbe visszaírva $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} = 1 - a$. Ezt négyzetreemelve és megoldva a kapott elsőfokú egyenletet $a = \frac{3}{8}$. A négyzetreemelés miatt ellenőrizni kell, melyre azt kapjuk, hogy $z = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}i$ tényleg megoldása az egyenletnek.

2. (6 pont) Abszolút konvergens/feltételesen konvergens vagy divergens? Állapítsa meg!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$$

Megoldás Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$, az $\left\{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right\}$ sorozat szigorúan csökken, és a sor elemei váltakozó előjelű sorozatot alkotnak, így a sor Leibniz-típusú, tehát konvergens. Másrészt $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergens, azaz a minoráns-elv miatt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ divergens. Vagyis $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ feltételesen konvergens.

3. (9 pont) Végezze el az $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ függvény teljes vizsgálatát!

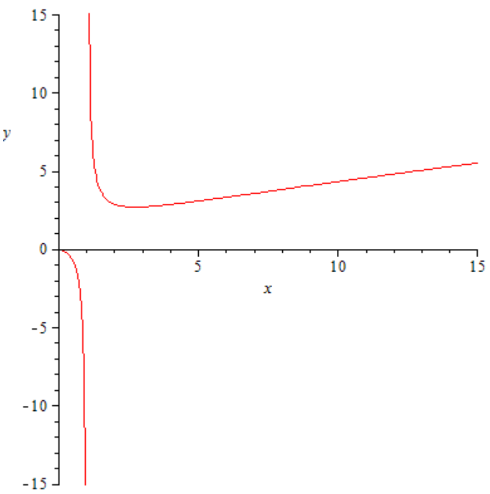
Megoldás 1) $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, és nincs zérushely.
2) Az értelmezési tartomány miatt nem páros, nem páratlan, nem periódikus.
3) Az értelmezési tartományon folytonos. A határértékek:
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty$ (a határérték kritikus, így alkalmaztuk a Bernoulli-L'Hospital szabályt);
$\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x}{\ln x} = 0$ (a határérték "$\frac{0}{-\infty}$" típusú);
$\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{x}{\ln x} = \infty$; $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x}{\ln x} = -\infty$.
4) A függvény deriváltja $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, melynek egyetlen gyöke $x = e$. A táblázat:

	$0 < x < 1$	$1 < x < e$	$x = e$	$e < x$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

A lokális minimum értéke $f(e) = e$.
5) A függvény második deriváltja $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$, melynek egyetlen gyöke $x = e^2 \approx 7,3891$. A táblázat:

	$0 < x < 1$	$1 < x < e^2$	$x = e^2$	$e^2 < x$
$f''(x)$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv	konvex	infl. pont	konkáv

Az inflexiós pont y-koordinátája $f\left(e^2\right) = \frac{e^2}{2} \approx 3,6945$.
6) A grafikon (helyesen az origóban egy üres karika jelenne meg):



Az értékkészlet $R_f = (-\infty, 0) \cup \left[\frac{e^2}{2}, \infty\right)$.

4. (6 pont) Számolja ki a $\lim\limits_{x\to 1+0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x}\right)$ függvényhatárértéket!

Megoldás Vegyük észre, hogy $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1}{x} = 1$, és a $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1}{\ln x}$ határérték "$\frac{1}{0}$" típusú. Mivel $x > 1$ esetén $\ln x > 0$, így az előjelek vizsgálata alapján $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1}{\ln x} = \infty$ adódik, azaz a keresett határérték $\lim\limits_{x\to 1+0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x}\right) = -\infty$.

5. (6 pont) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = ?$

Megoldás Alkalmazzuk az $e^x = t$ helyettesítést, melyből $x = \ln t$ és $dx = \frac{1}{t}\,dt$. Behelyettesítve

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C$$

6. (6 pont) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3}{(x-1)^2}\,dx = ?$

Megoldás

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{3}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{b\to 1-0} \int\limits_{-1}^{b} \frac{3}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{b\to 1-0} \left[3\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{b} = \lim_{b\to 1-0}\left(-\frac{3}{b-1}-\frac{3}{2}\right) = \infty$$

7. (6 pont) Bontsa fel a $\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektort az $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre!

Megoldás Legyen a párhuzamos és a merőleges összetevő jele $\vec{b}_{||}$ és $\vec{b}_{\perp}$. A tanult képlet alapján

$$\vec{b}_{||} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a} = \frac{7\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 3\cdot 2}{1^2 + (-1)^2 + 2^2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{12}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ebből a merőleges összetevő: $\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \vec{b}_{||} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.