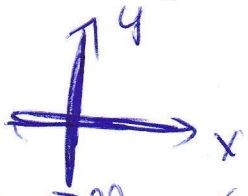
Pótpót zh. m.o.

① Legyen $z = x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$. Ekkor $\operatorname{Im}((x+yi)^2) = \operatorname{Im}((x-yi)^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{Im}(x^2+2xyi-y^2) = \operatorname{Im}(x^2-2xyi-y^2) \Rightarrow 2xy = -2xy \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=0$ vagy $y=0$



A megoldás a 2 tengely unioja

② Legyen $z = a+bi$; $a,b \in \mathbb{R}$. Ekkor $(a+bi)^2 = a-bi \Rightarrow a^2+2abi-b^2 = a-bi$
$\Rightarrow a^2-b^2 = a$ és $2ab = -b$. A 2. egyenletből $b=0$ vagy $a=-\frac{1}{2}$. Ha $b=0$, akkor az első egyenlet $a^2=a \Rightarrow a=0$ vagy $a=1$. Ha $a=-\frac{1}{2}$, az első egyenlet $\frac{1}{4}-b^2=-\frac{1}{2} \Rightarrow b^2=\frac{3}{4} \Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Négy megoldás van: $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=$
$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

③ $n=1$ esetén $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 2-\frac{3}{2^1}$

Tfh. $n=m$ esetén igaz az állítás, és belátjuk $n=m+1$ esetére is.

$$\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\dots+\frac{m+1}{2^{m+1}} = \left(\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\dots+\frac{m}{2^m}\right)+\frac{m+1}{2^{m+1}} = 2-\frac{m+2}{2^m}+\frac{m+1}{2^{m+1}} =$$

$$= 2-\frac{2(m+2)-(m+1)}{2^{m+1}} = 2-\frac{m+3}{2^{m+1}},$$ és ezt akartuk belátni.

④ a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^7-2n^2+1}{n^4+2^n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^7}{2^n}\cdot\frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^6}}{\frac{n^4}{2^n}+1-\frac{1}{2^n}} = 0$$

b) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{3x-6} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)}{(3x-6)(\sqrt{4x+1}+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{4\cancel{(x-2)}}{3\cancel{(x-2)}(\sqrt{4x+1}+3)} = \frac{4}{3\cdot 6} = \frac{2}{9}$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

⑤ Alkalmazzuk a hányadoskritériumot a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ sorra:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!} \text{ konvergens} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{n!} \text{ abszolút konvergens}$$