Feladatok az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 3. hét

1. Számítsuk ki a megadott mátrix rangját $\lambda \in \mathbb{R}$ függvényében!
$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

2. Állapítsuk meg, hogy a megadott egyenletrendszereknek hány megoldása van az u, v valós paraméterek függvényében!

a) $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - ux_2 &= 2 \\ x_1 + vx_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= v \\ -x_1 + ux_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$

3. A Cramer-szabály segítségével számoljuk ki a megadott egyenletrendszerben a megadott ismeretlen értékét!

a) $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8 \end{aligned}\right\}, \ x_4 = ?$

b) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 &= -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 &= 5 \end{aligned}\right\}, \ x_1 = ?$

4. Vizsgálja meg, hogy a megadott transzformáció lineáris-e, és ha igen írja fel a mátrixát $\mathbb{R}^2$ megadott bázisában!

a) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y \\ 5x - 2y \end{bmatrix}$, a szokásos bázisban

b) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y \\ 5x - 2y \end{bmatrix}$, az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázisban.

c) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y + 1 \\ 5x - 2y \end{bmatrix}$, a szokásos bázisban

5. Írja fel a megadott lineáris transzformációk mátrixát a sík/tér szokásos bázisában!

a) a sík origó körüli forgatása α szöggel pozitív forgásirányban

b) az origón átmenő, $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú síkra vett merőleges vetítés

c) az origón átmenő, $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú síkra vett tükrözés

d) az $x = y = z$ egyenes körüli, $120°$-os forgatás, a pozitív ortáns felől nézve pozitív forgásirányban

6.[hf] Egy A négyzetes mátrix *ortogonális*, ha $A^{-1} = A^T$, és *idempotens*, ha $A^2 = A$. Igazoljuk, hogy ha A ortogonális, akkor $\det(A) = \pm 1$, és ha idempotens, akkor $\det(A) = 0$ vagy 1!