Feladatok az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 5. hét

1. Oldjuk meg új változó bevezetésével az alábbi differenciálegyenleteket!

   a) $y' = \dfrac{2y^2 + x^2}{xy}$

   b) $x^2 y' + xy = x^2 + y^2, \quad y(1) = 2$

   c)$^{\text{hf}}$ $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$

   d) $y' = \dfrac{1}{x + y}$

2. Írjuk fel az $y' = e^{y+2} - x$ differenciálegyenlet izoklínáinak egyenletét, és rajzoljunk fel kettőt. Van-e lokális szélsőértéke az $P_0(e, -1)$ ponton áthaladó megoldásnak a P_0 pontban?

3. Tekintsük a következő differenciálegyenletet: $y' = (y^2 - 4)x + x - 1$.

   a) A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = -x$ egyenessel? Vázoljuk ezeket a pontokat és jelöljünk be néhány vonalelemet!

   b) Van-e lokális szélsőértéke vagy inflexiós pontja az $(1, 2)$ ponton átmenő megoldásnak ebben a pontban? (Feltéve, hogy van ilyen megoldás.)

4. Oldjuk meg a következő homogén lineáris állandó együtthatós egyenleteket!

   a) $y'' - 8y' + 15y = 0$

   b)$^{\text{hf}}$ $y'' + 2y' = 0$

   c) $y'' - 8y' + 16y = 0$

   d) $y'' + 4y' + 13y = 0$

   e)$^{\text{hf}}$ $y'' + 25y = 0$

   f) $y''' + 2y'' + y' = 0$

   g) $y''' + 4y'' + 13y' = 0$

   h) $y^{(4)} - y = 0$

   i)$^{\text{hf}}$ $y^{(4)} - y^{(3)} = 0$

5. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat!

   a) $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$

   b)$^{\text{hf}}$ $y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -4$

   c) $y'' + 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 7$

Emlékeztető

– A sík minden pontjához, amelyen átmegy a differenciálegyenlet egy megoldása, illesszünk egy kis szakaszt, amely az adott ponton átmenő megoldást érinti. Az így kapott $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény a d.e. *iránymezője.* Ha a differenciálegyenlet $y' = f(x, y)$ alakú, akkor az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban az iránymező meredeksége $f(x_0, y_0)$.
  Az *izoklína* azon pontok halmaza a síkon, melyekben az iránymező azonos irányba mutat. Ha a differenciálegyenlet $y' = f(x, y)$ alakú, akkor az izoklínák egyenlete $f(x, y) = K$, ahol $K \in \mathbb{R}$ az iránymező kérdéses meredeksége.

– A *másodrendű homogén lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet* $y'' + ay' + by = 0$ alakú $(a, b \in \mathbb{R})$. Ha ennek egy megoldását $e^{\lambda x}$ alakban keressük, akkor ezt visszaírva az egyenletbe, az egyszerűsítések után λ-ra a $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ *karakteriszitkus polinom* adódik. Legyen ennek két megoldása λ_1 és λ_2. Ekkor az általános megoldások:
  Ha $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\quad y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.
  Ha $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$: $\quad y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.
  Ha $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = p + qi$, $\lambda_2 = p - qi$: $\quad y(x) = c_1 e^{px} \cos qx + c_2 e^{px} \sin qx \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.