Feladatok az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 8. hét

1. Számoljuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+3}{x^2y+4}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x}{\cos y}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2\cos y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\sin xy}{x}$ e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}(xy)\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{y}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{2x^2+2y^2}$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy^3}{2x^2+2y^2}$ i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{2x^2+3y^2}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2+5y^2}{2x^2+y^2}$ k) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+xy-y}{x+xy+y}$

2. Legyen $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2y^2}{4x^4+7y^4}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{egyébként}\end{cases}$. Mely pontokban folytonos f?

3. Legyen $f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ c, & \text{egyébként}\end{cases}$. Adjuk meg c értékét úgy, hogy f minden pontban folytonos legyen!

4. További gyakorló feladatok:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^3-y}=?$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{y(x+y)}=?$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2}=?$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{1}{x-y}=?$ e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x+3y}{2x+8y}=?$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2+4y^2)\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=?$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin 2y}{x^2+y^2}=?$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin 2y}{2x^2+5y^2}=?$ i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5y^3}{2x^8+y^8}=?$

5. Legyen $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4+x^2y+y^2}{x^4+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{egyébként}\end{cases}$. Mutassuk meg, hogy az origón átmenő bármely egyenes mentén felvéve egy origóhoz tartó pontsorozatot, az ezekhez tartozó függvényértékek sorozatának mindig ugyanaz a határértéke. Vizsgáljuk meg a függvényértékek sorozatának határértékét akkor is, ha az $y=x^2$ egyenletű parabolán közelítünk az origóhoz. Van-e a függvénynek határértéke az origóban?

Emlékeztető

– Vektoros jelölést használva: Egy $f: A\to\mathbb{R}^m$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ függvénynek $\vec{a}\in\mathbb{R}^m$ a *határértéke* az $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ pontban, ha $\vec{x}_0$ minden környezete tartalmaz $\vec{x}_0$-tól különböző A-beli pontot, és minden $\varepsilon>0$-hoz létezik $\delta>0$, hogy $0<|\vec{x}-\vec{x}_0|<\delta$ esetén $|f(\vec{x})-\vec{a}|<\varepsilon$.
Az $f: A\to\mathbb{R}^m$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ függvény *folytonos az $\vec{x}_0$ pontban*, ha értelmezett $\vec{x}_0$ egy környezetében, és $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)$.