FELADATOK AZ A2 (VBK) TÁRGY HALLGATÓI SZÁMÁRA
2022/23/tavasz, 12. hét

1. Számoljuk ki:

   a) $\iint_T y^2\, dT =?\qquad T = \left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x\right\}$

   b) $\iint_T x^2y\, dT =?\qquad T = \left\{(x,y)\,\middle|\, 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0, y \ge 0\right\}$

   c) $\iint_T 7xy^4\, dT =?\qquad T = \left\{(x,y)\,\middle|\, 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0, y \ge \sqrt{3}x\right\}$

2. Számítsuk ki az $\iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dT$ integrál értékét, ha T az $4 \le x^2+y^2 \le 25$, $x \le 0$, $y \ge 0$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány.

3. Számoljuk ki az $x^2+y^2=1$ egyenletű henger és a $z=0$, valamint a $z=2-x-y$ egyenletű síkok által határolt térrész térfogatát!

4. A V korlátos térrész határai a $z=\sqrt{x^2+y^2}$, illetve a $z=1$ egyenletű felületek. Számítsuk ki az $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\, dV$ integrál értékét!

5. Számoljuk ki a $z=\sqrt{x^2+y^2}$ és a $z=6-x^2-y^2$ egyenletű felületek által határolt korlátos térrész térfogatát!

6. Számítsuk ki az $\iiint_V xyz\, dV$ integrál értékét, ahol a V korlátos térrész az $x^2+y^2+z^2 \le 1$ gömb belsejének az $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ térnyolcadba eső része.

7. Számoljuk ki az $x^2+y^2+z^2 \le 1$ és a $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott térrész térfogatát!

Emlékeztető

– *Integráltranszformáció:* Legyen $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $\varphi = (\varphi_1, \dots \varphi_n) : B \to A$ deriválható, kölcsönösen egyértelmű függvény.
  Ekkor $\varphi'(\mathbf{x})$ egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelynek (i,j) eleme $(\varphi_j)'_i(\mathbf{x})$. Igaz a következő:
  $\int_A f(\mathbf{x})\, dA = \int_B (f \circ \varphi)(\mathbf{y}) \cdot |\det \varphi'(\mathbf{y})|\, dB.$

– Egy gyakori integráltranszformáció a $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *polártranszformáció.* Ekkor $\varphi(r,\alpha) = (r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$, és $|\det\varphi(r,\alpha)| = r$. Azaz, ha $A \subset \mathbb{R}^2$ egy R sugarú körlap, akkor

$$\iint_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) \cdot r\, d\alpha\, dr.$$

– A *henger-koordinátarendszer* $\mathbb{R}^3$*-ban*: $(r,\phi,z) \mapsto (r\cos\phi,\ r\sin\phi,\ z)$. A hengerkoordinátákra való áttérés Jacobi-determinánsa: $\det|J| = r$.

– A *gömbi polárkoordinátarendszer* $\mathbb{R}^3$*-ban*: $(r,\theta,\phi) \mapsto (r\cos\theta\cos\phi), r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta)$, ahol $r \in [0,\infty), \theta \in [0,\pi]$ és $\phi \in [0,2\pi]$. A gömbi koordinátákra való áttérés Jacobi determinánsa $\det|J| = r^2\cos\theta$.