Feladatok az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 14. hét

1. Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ és $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát! Adjuk meg elemi műveletekkel az x^4 együtthatóit!

2. Legyen $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{32-2x^2}}$ és $x_0 = 0$.
   a) Írjuk fel az f függvény x_0 bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát!
   b) x^8 együtthatója? (Elemi műveletekkel adjuk meg!)
   c) $f^{(26)}(0) =?$, $\quad f^{(25)}(0) =?$

3. Írjuk fel a $g(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt[5]{32-2x^2}}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát! Számítsuk ki $g^{(102)}(0)$ és $g^{(103)}(0)$ értékét!

4. Adjuk meg az $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ integrál értékét az integrandus nyolcadfokú Taylor-polinomjának felhasználásával, és becsüljük meg a hibát!

5. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt[4]{1+2x^3}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát! Számítsuk ki $f^{(9)}(0)$ és $f^{(10)}(0)$ értékét!

6. Legyen $f(x) = 0$ ha $x \in (-\pi, 0]$, és $f(x) = 2$ ha $x \in (0, \pi]$. Írjuk fel f Fourier-sorát! Mely pontokban állítja elő f Fourier-sora a függvényt?

7. Legyen $f : (0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, és terjesszük ki ezt a függvényt periodikusan $\mathbb{R}$-re. Írjuk fel f Fourier-sorát! Mely pontokban állítja elő a Fourier-sor a függvényt?

8. Legyen $f(x) = 0$ ha $x \in (-\pi, 0]$, és $f(x) = x/2$ ha $x \in (0, \pi]$. Írjuk fel f Fourier-sorát! Mely pontokban állítja elő f Fourier-sora a függvényt?

9. Jelöljük f-fel az abszolútérték-függvény periodikus kiterjesztését a $[-\pi, \pi)$ intervallumról a számegyenesre. Írjuk fel a Fourier-sorát!

Emlékeztető

– Egy $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ integrálható fv. *Fourier-sora*: $\Phi(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.
  Az a_k, b_k-k a *Fourier-együtthatók:* $\quad a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$

– Egy függvény "szakaszonként folytonos", ha véges sok pont kivételével folytonos, és e véges sok pontban létezik mindkét oldali véges határérték. *Dirichlet tétele:* Ha az f függvény 2π szerint periodikus, korlátos, és a $(0, 2\pi)$ intervallumon $f$és f' "szakaszonként folytonos", akkor a Fourier-sora pontonként konvergens.
  Ekkor x-ben a Fourier-sor összege $\Phi(x) = \dfrac{f(x+) + f(x-)}{2}$.
  ($f(x+)$ az x-beli jobb oldali, $f(x-)$ az x-beli bal oldali határértéket jelöli.)