Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 1. hét

1. Valós vektorterek-e a következő halmazok? Ha igen, határozzuk meg a dimenziójukat, és véges dimenzió esetén adjuk meg egy bázisukat! Adjunk meg néhány alteret bennük!

a) egész számok	b) valós számok
c) a valós számpárok	d) $P_n = \{\text{maximum } n\text{-edfokú polinomok}\}$
e)$^{\text{hf}}$ a legalább n-edfokú polinomok	f) a valós számegyenesen folytonos függvények
g)$^{\text{hf}}$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett páros függvények	h)$^{\text{hf}}$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett, felülről korlátos függvények

Megoldás a) Ha egy egész számot összeszorzunk egy valós számmal, nem mindig egész számot kapunk, így az egész számok halmaza nem alkot vektorterek $\mathbb{R}$ felett.
b) A valós számok összeadása (mint vektorösszeadás) kommutatív és asszociatív művelet. Létezik egy speciális elem: 0, mely minden $a \in \mathbb{R}$ esetén teljesíti az $a+0=a$ azonosságot. Ezt az elemet (vektort) hívjuk nullvektornak. Emellett minden $a \in \mathbb{R}$ vektorhoz tartozik egy $(-a)$-val jelölt elem, mely teljesíti az $a+(-a)=0$ azonosságot, ahol 0 az előző mondatban szereplő nullvektor. Ezt az elemet hívjuk az $a \in \mathbb{R}$ vektor *ellentett*jének. Ezen kívül minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esetén igazak az $(a+b)c = ac+bc$, $a(c+d) = ac+ad$, $(ab)c = a(bc)$ és az $1 \cdot c = c$ azonosságok (ezekben, a vektortér definíciójával összehasonlítva, a, b skalár, és c, d vektor szerepét tölti be). Minthogy a valós vektortér definíciójában szereplő összes tulajdonság teljesül, $\mathbb{R}$ egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. Például az $\{1\}$ halmaz lineárisan független és generátorrendszer, tehát egy bázis. Ennek egy eleme van, tehát a vektortér dimenziója 1. Egydimenziós vektortérben csak a két triviális altér létezik: $\{0\}$, és $\mathbb{R}$.
c) Idézzük fel, hogy két valós számpárt koordinátánként adunk össze, illetve egy valós számpárt egy valós számmal is koordinátánként szorzunk meg. Ennek megfelelően a valós számpárok összeadása kommutatív, asszociatív, létezik nullvektor (a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektor), és minden vektornak van ellentettje (az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektor ellentettje $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$). Másrészt tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ és $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ esetén igazak az alábbi azonosságok:

$$a\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) = a\left(\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax+az \\ ay+aw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} az \\ aw \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix};$$

$$(a+b)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)x \\ (a+b)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bx \\ ay+by \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bx \\ by \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};$$

$$(ab)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ab)x \\ (ab)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(bx) \\ a(by) \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} bx \\ by \end{bmatrix} = a\left(b\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right);$$

$$1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x \\ 1y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Tehát $\mathbb{R}^2$ vektortér $\mathbb{R}$ felett. Az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek, mert ha $x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, akkor ebből következik, hogy $x = y = 0$. Másrészt generátorrendszer is, mert tetszőleges $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektor előállítható a lineáris kombinációjukként az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ módon. tehát a két vektor bázist alkot, amiből következik az is, hogy a vektortér dimenziója 2. A triviális $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ és $\mathbb{R}^2$ alterek mellett alterek például az

$\left\{a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$ halmazok, ahol $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ egy tetszőleges *rögzített* vektor.

d) Két legfeljebb n-edfokú polinom összege ugyancsak egy legfeljebb n-edfokú polinom, és egy ilyen polinomt beszorozva tetszőleges valós számmal ugyancsak egy legfeljebb n-edfokú polinomot kapunk. Tehát a P_n halmazon tényleg értelmezve vannak a megkívánt műveletek: *két vektor összeadása* és *vektor szorzása valós számmal.* Ellenőrizzük, hogy ezek teljesítik-e a definícióban szereplő azonosságokat. A vektorok összeadása kommutatív és asszociatív. Létezik nullvektor: a 0 polinom. Minde p polinomnak van ellentettje, a $-p$ polinom. Végül, ha p, q legfeljebb n-edfokú polinomok, és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor teljesülnek az $a(p+q) = ap + aq$, $(a+b)p = ap + bp$, az $(ab)p = a(bp)$ és az $1 \cdot p = p$ azonosságok, tehát P_n valós vektortér. Megmutatjuk, hogy az $1, x, x^2, \ldots, x^n$ vektorrendszer egy bázis. Ha valamilyen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ számokra teljesül az $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$ összefüggés, akkor ebből $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$ következik, tehát a fenti polinomok lineárisan függetlenek. Másrészt generátorrendszert is alkotnak, hiszen tetszőleges p legfeljebb n-edfokú polinom előáll $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ alakban alkalmas $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ számokra, azaz felírható a megadott vektorok egy lineáris kombinációjaként. Ez a bázis $n+1$ polinomból áll, tehát P_n egy $(n+1)$-dimenziós vektortér. Ellenőrizhető, hogy az alábbi halmazok mind P_n alterei:

1. azon polinomok halmaza, melyekből hiányoznak x-nek bizonyos előre megadott hatványai (pl. x^2, x^n, stb.);
2. az $\{ap : a \in \mathbb{R}\}$ alakú halmazok, ahol $p \in P_n$ egy tetszőleges rögzített polinom;
3. az $\{ap + bq : a, b \in \mathbb{R}$ alakú halmazok, ahol $p, q \in P_n$ tetszőleges rögzített polinomok.

e) Ennek a halmaznak nincsen olyan p_0 eleme, mely teljesítené minden p legalább n-edfokú vektorra a $p + p_0 = p$ azonosságot (vegyük észre, hogy a 0 polinom fokát nem szokták definiálni). Hasonlóan végiggondolható, hogy két legalább n-edfokú polinom összegének a foka nem feltétlenül legalább n (pl. $(x^n + 1) + (-x^n) = 1$). Ennek megfelelően a halmaz nem valós vektortér.

f) Valós számegyenesen folytonos függvényeket összeadva, illetve valós számmal szorozva szintén mindenhol folytonos függvényeket kapunk. Ellenőrizhető, hogy a definícióban szereplő tulajdonságok mind teljesülnek, azaz a halmaz egy valós vektortér. Másrészt az $x \mapsto 1, x \mapsto x, \ldots, x \mapsto x^n$ függvények lineárisan függetlenek *minden* pozitív egész n-re, azaz a vektortér dimenziója végtelen. Alterek pl. azon folytonos függvények, melyek egy tetszőleges rögzített halmazon 0-t vesznek fel.

g) Páros függvények összege, illetve valós számokkal vett szorzata páros, így értelmezett a halmazon két vektor összege, illetve vektor szorzata valós számmal. Ellenőrizhető, hogy a valós vektortér definíciójában szereplő tulajdonságok teljesülnek (a nullvektor a 0 függvény, és f ellentettje $-f$). Tehát a halmaz vektortér $\mathbb{R}$ felett. Az $x \mapsto 1, x \mapsto x^2, \ldots, x \mapsto x^{2n}$ függvények lineárisan függetlenek minden pozitív egész n-re, tehát a vektortér dimenziója végtelen. Alteret alkotnak például a tetszőleges halmazon 0-t felvevő páros függvények, vagy a korlátos páros függvények halmaza, stb.

h) Egy felülről korlátos függvényt negatív számmal megszorozva nem mindig kapunk egy felülről korlátos függvényt, így a függvények valós számmal vett szorzása művelete nem jól definiált a megadott halmazon. A megfelelő műveletek hiányában így a halmaz nem egy valós vektortér.

2. Lássuk be, hogy $\mathbb{R}^2$-ben bázist alkot a $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektorpár. Állítsuk elő e két vektor lineáris kombinációjaként a következő vektorokat:

   a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$ c)$^{\text{hf}}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Megoldás Oldjuk meg az

$$a\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

egyenletet, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Átalakítva a

$$\left.\begin{array}{rcl}2a+b&=&0\\3a+2b&=&0\end{array}\right\}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk, melynek egyetlen megoldása $a = b = 0$. Tehát a vektorrendszer lineárisan független. Megmutatjuk, hogy generátorrendszer is. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ vektor felírható

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

alakban alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$ választása esetén. Az előző vektoregyenlethez hasonlóan megoldva ebből az $a = 2x - y$ és $b = 2y - 3x$ megoldást kapjuk. Tehát tetszőleges $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ vektor előáll a megadott vektorok lineáris kombinációjaként, méghozzá a

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(2x-y)\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+(2y-3x)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

módon. Tehát a két megadott vektor egy bázist alkot. Megjegyezzük, hogy az előző feladat alapján $\mathbb{R}^2$ egy 2-dimenziós valós vektortér, tehát tetszőleges 2 lineárisan független vektor egy bázis, így a második számolás a fenti érv használata mellett elhagyható. Így viszont a további rész megoldása egyszrű helyettesítéssel adódik.

a)

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}=(2\cdot 9-4)\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+(2\cdot 4-3\cdot 9)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=14\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}-19\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

3. Írjuk fel a megadott vektorok koordinátáit a $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$ bázisban!

a) $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ c)$^{\text{hf}}$ $\begin{bmatrix}3\\-1\\7\end{bmatrix}$

Megoldás A feladatunk felírni a megadott vektorokat a bázisvektorok lineáris kombinációjaként; a kért koordináták a bázisvektorok együtthatói. Így az előző feladathoz hasonlóan kaphatóak meg a megoldások.

a)

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},$$

tehát a koordináták $0, 0, 0$.

b)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

azaz a koordináták $3, 4, 2$.

c)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = -20 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 31 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 12 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

a koordináták $-20, -31, -12$.

4. Egy vektortérben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárisan független vektorok. Lineárisan független-e az $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, $(\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c})$, $(\vec{a} + 4\vec{b} + 5\vec{c})$ rendszer?

Megoldás Oldjuk meg az $\alpha(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) + \beta(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}) + \gamma(\vec{a}+4\vec{b}+5\vec{c}) = \vec{0}$ vektoregyenletet. Átalakítva ebből az $(\alpha+\beta+\gamma)\vec{a} + (\alpha+2\beta+4\gamma)\vec{b} + (\alpha+3\beta+5\gamma)\vec{c} = \vec{0}$ egyenletet kapjuk. Mivel $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ lineárisan függetlenek, ez csak akkor teljesülhet, ha mindhárom együttható nulla. Azaz az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma &=& 0 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma &=& 0 \\ \alpha + 3\beta + 5\gamma &=& 0 \end{array}\right\}.$$

Ennek egyetlen megoldása $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tehát a megadott három vektor lineárisan független.

5. Végezzük el az összes lehetséges szorzást A, B, C, A^T, B^T, C^T között!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Megoldás Két mátrixot pontosan akkor tudunk összeszorozni, ha az első oszlopainak száma megegyezik a második sorainak számával. Így jelen esetben tizenkettő szorzat létezik: $AB, A^TC, BC^T, B^TA^T, CB^T, C^TA$, valamint A, B és C szorzata a saját transzponáltjával tetszőleges sorrendben. A szorzatok:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{matrix} 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 5 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 3 + 2 \cdot (-6) & 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-6) & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \end{matrix}\right] = \begin{bmatrix} 17 & -10 & -18 & 5 \\ -15 & 8 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^TC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -10 & 17 & -20 \\ 8 & -12 & -2 & 4 \\ -17 & 22 & -15 & 16 \end{bmatrix}$$

$$BC^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -6 \\ 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -18 \\ 15 & -21 \\ -31 & -33 \end{bmatrix}$$

$$B^TA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -10 & 8 \\ -18 & 27 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$CB^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 15 & -31 \\ -18 & -21 & -33 \end{bmatrix}$$

$$C^TA = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -6 \\ 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -17 \\ -10 & -12 & 22 \\ 17 & -2 & -15 \\ -20 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & 10 & -9 \\ -4 & -9 & 13 \end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 19 & -5 \\ 19 & 30 & -26 \\ -5 & -26 & 65 \end{bmatrix}$$

$$B^TB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -6 & -33 & 12 \\ -6 & 20 & 18 & 12 \\ -33 & 18 & 54 & 3 \\ 12 & 12 & 3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -6 \\ 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 36 \\ 36 & 174 \end{bmatrix}$$

$$C^TC = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -6 \\ 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & -32 & 32 & -36 \\ -32 & 40 & -36 & 40 \\ 32 & -36 & 58 & -68 \\ -36 & 40 & -68 & 80 \end{bmatrix}$$

6. Számoljuk ki a következő mátrixok determinánsát:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ c)$^{\mathrm{hf}}$ $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ d)$^{\mathrm{hf}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldás a) A tanult képlet alapján: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 9.$

b) A kifejtési tételt alkalmazzuk a harmadik sorra:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = +0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 18$$

c) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot (-\cos\alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

d) A Sarrus-szabály alapján:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 11 + 2 \cdot 7 \cdot 9 + 3 \cdot 5 \cdot 10 - 1 \cdot 7 \cdot 10 - 2 \cdot 5 \cdot 11 - 3 \cdot 6 \cdot 9 = 0.$$

e) Most sor- és oszlopműveleteket végzünk:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ -11 & -2 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -11 & -2 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$