Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 3. hét

1. Számítsuk ki a megadott mátrix rangját $\lambda \in \mathbb{R}$ függvényében!
$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$

Megoldás A tanult módon sor- és oszlopműveleteket alkalmazunk.
$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix}\right)$
Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $\lambda = 1$. Ekkor behelyettesítve a kapott mátrixba:
$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$, amiből $r(A) = 1$.
Tegyük fel most, hogy $\lambda \neq 1$. Ekkor a kapott mátrix első és harmadik sorát eloszthatjuk $(1-\lambda)$-val:
$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & 2+\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) =$
$r\left(\begin{bmatrix} 0 & 2+\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3.$

2. Állapítsuk meg, hogy a megadott egyenletrendszereknek hány megoldása van az u, v valós paraméterek függvényében!

a) $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - ux_2 &= 2 \\ x_1 + vx_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= v \\ -x_1 + ux_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$

Megoldás Mindkét esetben az A együttható és az A_b kibővített mátrix rangját fogjuk kiszámolni.
a)
$$r\left(\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -u & 2 \\ 1 & v & 2 \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -u-2 & 1 \\ 0 & v-2 & 1 \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -u-2 & 1 \\ 0 & v-2 & 1 \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -u-2 & 1 \\ 0 & u+v & 0 \end{array}\right]\right)$$
Ha $u+v \neq 0$, akkor $(u+v)$-t használva kinullázható a második oszlop, amiből $r(A_b) = 3$ és $r(A) = 2$ adódik, azaz ekkor nincs megoldás. Tegyük fel, hogy $u+v = 0$, azaz $u = -v$. Ekkor, ha $u = -2$ (és így $v = 2$), akkor $r(A) = 1 < r(A_b) = 2$, azaz nincs megoldás. Ha $-v = u \neq -2$, akkor $r(A) = r(A_b) = 2$, tehát, mivel az ismeretlenek száma 2, egyetlen megoldás van.
b)
$$r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & v \\ -1 & u & 1 & 3 \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & v-3 \\ 0 & u+2 & 0 & 6 \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & v-3 \\ 0 & u+2 & 0 & 6 \end{array}\right]\right) =$$
$$= r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v-1 \\ 0 & u+2 & 0 & 6 \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v-1 \\ 0 & u+2 & 0 & 6 \end{array}\right]\right)$$

Látható, hogy ha $v \neq 1$ vagy $u = -2$, akkor $r(A) < r(A_b)$, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása. Legyen most $v = 1$ és $u \neq -2$. Ekkor az utolsó oszlop $(u+2)$ segítségével kinullázható, tehát $r(A) = r(A_b) = 3$, azaz az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

3. A Cramer-szabály segítségével számoljuk ki a megadott egyenletrendszerben a megadott ismeretlen értékét!

a) $$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &=& 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &=& 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &=& 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &=& -8 \end{array}\right\},\ x_4 = ?$$

b) $$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &=& 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &=& 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &=& 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 &=& -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 &=& 5 \end{array}\right\},\ x_1 = ?$$

Megoldás a) Az együtthatómátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & 8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & 36 & 54 & 0 \\ 0 & 18 & 36 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & 36 & 54 & 0 \\ 0 & 18 & 36 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 18 & 36 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 18 \cdot (-18) = 324$$

Kicserélve a negyedik oszlopot a konstansok vektorára, a kapott determináns hasonlóan kiszámolható:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -648.$$

Ebből a Cramer-szabály alapján $x_4 = \frac{-648}{324} = -2$.
b) Most

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 98$$

és

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 98,$$

amiből $x_1 = \frac{98}{98} = 1$.

4. Vizsgálja meg, hogy a megadott transzformáció lineáris-e, és ha igen, írja fel a mátrixát $\mathbb{R}^2$ megadott bázisában!

a) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y \\ 5x - 2y \end{bmatrix}$, a szokásos bázisban

b) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y \\ 5x - 2y \end{bmatrix}$, az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázisban.

c) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y + 1 \\ 5x - 2y \end{bmatrix}$, a szokásos bázisban

Megoldás a) Mivel
$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(x_1+x_2)+(y_1+y_2) \\ 5(x_1+x_2)-2(y_1+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1+y_1 \\ 5x_1-2y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_2+y_2 \\ 5x_2-2y_2 \end{bmatrix} = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$,
és $L\left(\begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(\lambda x)+\lambda y \\ 5(\lambda x)-2(\lambda y) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3x+y \\ 5x-2y \end{bmatrix} = \lambda L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$,
a transzformáció lineáris. Mivel egy L lineáris transzformáció mátrixa a $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_n\}$ bázisban az az M mátrix, melynek oszlopvektorai rendre $\left[L(\vec{b}_1)\right]_B, \left[L(\vec{b}_2)\right]_B, \dots, \left[L(\vec{b}_n)\right]_B$, így M felírásához azt kell megvizsgálnunk, hogy mik lesznek $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ és $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ koordinátái a szokásos bázisban. Most $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ és $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Ezen vektorok koordinátái éppen a vektorok szokásos bázisbeli koordinátái, így $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.
b) A transzformáció megegyezik az előző feladatbeli transzformációval, tehát lineáris. A feladatunk, hogy $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ és $L\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix}$ koordinátáit kiszámoljuk a megadott bázisban. A szokásos számolással az adódik, hogy $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{7}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, és $\begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix} = -\frac{9}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tehát $M = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$.
c) Mivel $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, a transzformáció nem lineáris (pl. a második vizsgált azonosság nem teljesül a nullvektorra tetszőleges skalár esetén).

5. Írja fel a megadott lineáris transzformációk mátrixát a sík/tér szokásos bázisában!
   a) a sík origó körüli forgatása α szöggel pozitív forgásirányban
   b) az origón átmenő, $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú síkra vett merőleges vetítés
   c)[hf] az origón átmenő, $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú síkra vett tükrözés
   d) az $x = y = z$ egyenes körüli, 120°-os forgatás, a pozitív ortáns felől nézve pozitív forgásirányban

Megoldás Az előző feladat alapján azt kell kiszámolnunk, hogy a szokásos bázis vektorait a megadott lineáris transzformációk melyik vektorokba viszik.
a) Az origó körüli α szögű elforgatás után $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ képe $\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$, és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ képe $\begin{bmatrix} \cos(\alpha+90°) \\ \sin(\alpha+90°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$. Tehát a forgatás mátrixa:

$$M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

b) Idézzük fel, hogy a $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$-val párhuzamos és rá merőleges komponensei rendre $\vec{b}_{||} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$ és $\vec{b}_\perp = \vec{b} - \vec{b}_{||}$. Másrészt, az $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ helyvektorú pont vetületének helyvektora éppen $\vec{r}$ $\vec{n}$-re merőleges vetülete. Így alkalmazva a tanult képletet, a vetület helyvektora $\begin{bmatrix} x - A \cdot \frac{Ax+By+Cz}{A^2+B^2+C^2} \\ y - B \cdot \frac{Ax+By+Cz}{A^2+B^2+C^2} \\ z - C \cdot \frac{Ax+By+Cz}{A^2+B^2+C^2} \end{bmatrix}$. A képletet felírva a szokásos bázis vektoraira, a vetítés mátrixára

$$M = \frac{1}{A^2+B^2+C^2} \begin{bmatrix} B^2+C^2 & -AB & -AC \\ -AB & A^2+C^2 & -BC \\ -AC & -BC & A^2+B^2 \end{bmatrix}$$

adódik.
c) A b) részhez hasonló gondolatmenettel

$$M = \frac{1}{A^2+B^2+C^2} \begin{bmatrix} B^2+C^2-A^2 & -2AB & -2AC \\ -2AB & A^2+C^2-B^2 & -2BC \\ -2AC & -2BC & A^2+B^2-C^2 \end{bmatrix}$$

d) A $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázisvektorok képei az elforgatás után rendre $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Tehát a transzformáció mátrixa:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.[hf] Egy A négyzetes mátrix *ortogonális*, ha $A^{-1} = A^T$, és *idempotens*, ha $A^2 = A$. Igazoljuk, hogy ha A ortogonális, akkor $\det(A) = \pm 1$, és ha idempotens, akkor $\det(A) = 0$ vagy 1!

Megoldás A determinánsok szorzástétele alapján $\det(E_n) = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A)$, azaz $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ minden A invertálható mátrixra. Másrészt az előadáson elhangzottak alapján $\det(A^T) = \det(A)$. Tehát ha A ortogonális, akkor $\det(A) = \frac{1}{\det(A)}$, amiből az állítás elemi átalakításokkal következik. Hasonlóan, ha A idempotens, $\det(A) = \det(A^2) = (\det(A))^2$, melynek megoldásai $\det(A) = 0$ és $\det(A) = 1$.