Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 6. hét

1. Írjunk fel egy olyan legalacsonyabbrendű valós, állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet, melynek megoldásai az alábbi függvények! Írjuk fel a differenciálegyenlet általános megoldását is!

   a) $2e^{5x} - e^{-3x}$ b) $6x^2 + 5e^{2x}$ c) $7x,\ \sin 5x$
   d)hf $3x^2e^{2x},\ e^{3x}$ e)hf $6 + e^{3x}\sin x$

   Megoldás a) A fenti függvény csak olyan állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenletnek lehet megoldása, mely karakterisztikus polinomjának 5 és -3 gyöke. Ez azt jelenti, hogy a karakterisztikus polinom legalább másodfokú, azaz a differenciálegyenlet legalább másodrendű. Keressünk olyan másodfokú polinomot, melynek 5 és -3 gyöke: ilyen pl. a $(\lambda-5)(\lambda+3) = \lambda^2 - 2\lambda - 15$. Ez a polinom az $y'' - 2y' - 15y = 0$ állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlethez tartozik. Az általános megoldás adódik a polinom gyökeiből: $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-3x}$, ahol C_1, C_2 tetszőleges konstansok.
   b) Az előző feladathoz hasonlóan most az adódik, hogy a karakterisztikus polinomnak 0 legalább háromszoros, és 2 egyszeres gyöke. Tehát a polinom legalább negyedfokú, azaz a differenciálegyenlet legalább negyedrendű. Egy ilyen tulajdonságú polinom $\lambda^3(\lambda+2) = \lambda^4 + 2\lambda^3$, melyhez az $y^{(4)} + 2y''' = 0$ differenciálegyenlet tartozik. Ennek általános megoldása: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x}$.
   c) Most a karakterisztikus polinomnak 0 legalább kétszeres, és $\pm 5i$ legalább egyszeres gyöke. Tehát a polinom legalább negyedfokú, és a differenciálegyenlet negyedrendű. Egy ilyen tulajdonságú polinom $\lambda^2(\lambda+5i)(\lambda-5i) = \lambda^4 + 25\lambda^2$, melyhez az $y^{(4)} + 25y'' = 0$ differenciálegyenlet tartozik. Ennek általános megoldás $y = C_1 + C_2x + C_3\sin 5x + C_4\cos 5x$.
   d) A karakterisztikus polinomnak 2 legalább háromszoros és 3 legalább egyszeres gyöke, tehát a differenciálegyenlet legalább negyedrendű. Egy megfelelő negyedfokú polinom a $(\lambda-2)^3(\lambda-3) = \lambda^4 - 9\lambda^3 + 30\lambda^2 - 44\lambda + 24$, melyhez az $y^{(4)} - 9y''' + 30y'' - 44y' + 24y = 0$ differenciálegyenlet tartozik. Ennek általános megoldása $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x} + C_4e^{3x}$.

2. Oldjuk meg a következő inhomogén lineáris, állandó együtthatós egyenleteket!

   a) $y'' - 5y' + 6y = 2\sin 2x$
   b) $y'' - 5y' + 6y = 2xe^x$
   c) $y'' - 6y' + 13y = 39$
   d) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 3, y'(0) = 1$
   e) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + 4x^2 - 6$
   f) $y'' - 3y' + 2y = x + e^x$
   g) $y'' - 2y' + y = 6e^x$
   h) $y'' + 8y' + 25y = e^{-4x}$
   i) $y'' + 2y' = 2x + 3$
   j) $y'' + y = \sin x$

   Megoldás a) A hozzátartozó homogén differenciálegyenlet $Y'' - 5Y' + 6Y = 0$, melynek karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Ennek gyökei 2 és 3, így a homogén differenciálegyenlet általános megoldása $Y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. A próbafüggvény módszere alapján az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását $y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$ alakban keressük. Ebből $y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$ és $y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$. Beírva ezeket az inhomogén differenciálegyenletbe:

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 5\,(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + 6\,(A\sin 2x + B\cos 2x) = 2\sin 2x,$$

amiből

$$(2A+10B)\sin 2x+(2B-10A)\cos 2x=2\sin 2x.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $2A+10B=2$ és $2B-10A=0$. Ezen lináris egyenletrendszer egyetlen megoldása $A=\frac{1}{26}$ és $B=\frac{5}{26}$. Azaz $y_p=\frac{1}{26}\sin 2x+\frac{5}{26}\cos 2x$, és az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y=Y+y_p=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{26}\sin 2x+\frac{5}{26}\cos 2x.$$

b) A hozzátartozó homogén egyenlet, és így ennek általános megoldása is, ugyanaz, mint az a) feladatban. Az inhomogén egyenlet egy általános megoldását most $y_p=(Ax+B)e^x$ alakban keressük. Helyettesítsük ezt vissza a deriváltjaival együtt:

$$(Ax+2A+B)e^x-5(Ax+A+B)e^x+6(Ax+B)e^x=2xe^x\Rightarrow(2Ax-3A+2B)e^x=2xe^x.$$

Ebből $2A=2$ és $-3A+2B=0$, azaz $A=1$, $B=\frac{3}{2}$ és $y_p=\left(x+\frac{3}{2}\right)e^x$. Az általános megoldás:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\left(x+\frac{3}{2}\right)e^x.$$

c) A hozzátartozó homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2-6\lambda+13=0$, melynek gyökei $\lambda_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=3\pm\sqrt{-4}=3\pm2i$. Tehát $Y=C_1e^{3x}\cos 2x+C_2e^{3x}\sin 2x$. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével $y_p=A$ alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve $13A=39$ adódik, melyből $A=3$, és az inhomogén általános megoldása

$$y=C_1e^{3x}\cos 2x+C_2e^{3x}\sin 2x+3.$$

d) A karakterisztikus egyenlet gyökei -1 és 2, így a homogén általános megoldása $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$. Az inhomogén rész alapján próbafüggvényre $y_p=Ae^{2x}$ adódna, ami egybeesik a homogén általános megoldásának egy részével, azaz külső rezonancia van. Így módosítjuk a próbafüggvényt $y_p=Axe^{2x}$ alakúra. Ezt deriváltjaival együtt visszahelyettesítve az egyenletbe $A(4x+4)e^{2x}-A(2x+1)e^{2x}-2Axe^{2x}=3e^{2x}$, vagyis $3Ae^{2x}=3e^{2x}$ adódik, amiből $A=1$ és $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^{2x}$. A keresett partikuláris megoldásnak ki kell elégíteni az $y(0)=3$ és az $y'(0)=1$ feltételeket. Az általános megoldást deriválva, és ebbe helyettesítve az első feltételből $C_1+C_2=3$, a második feltételből $-C_1+2C_2+1=1$ következik, amiből $C_1=2$ és $C_2=1$. Tehát a keresett partikuláris megoldás

$$y_{\text{part}}=2e^{-x}+e^{2x}+xe^{2x}.$$

e) Az előzőekhez hasonlóan adódik, hogy a homogén differenciálegyenlet általános megoldása $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. Az inhomogén partikuláris megoldását $y_p=Ae^{3x}+Bx^2+Cx+D$ alakban keressük. Visszahelyettesítve az inhomogén differenciálegyenletbe és az együtthatókat páronként egyenlővé téve ebből $2A=1$, $2B=4$, $2B-3C=0$ és $2B-3C+2D=-6$ adódik, amiből $A=\frac{1}{2}$, $B=2$, $C=6$ és $D=4$. Tehát az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}+2x^2+6x+4.$$

f) A homogén általános megoldása megegyezik az e) feladatéval. Az inhomogén általános megoldását rezonancia miatt $y_p=Ax+B+Cxe^x$ alakban keressük. Ebből a $2A=1$, $-3A+2B=0$ és $-C=1$ lineáris egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{3}{4}$ és $C=-1$. Az általános megoldás:

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}-xe^x.$$

g) A homogén általános megoldása $Y = (C_1x+C_2)e^x$. Most is rezonancia van, így az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p = Ax^2e^x$ alakban keressük. Visszahelyettesítve $A = 3$ adódik, azaz

$$y = (C_1x + C_2)e^x + 3x^2e^x.$$

h) Most $Y = C_1e^{-4x}\cos 3x + C_2e^{-4x}\sin 3x$ és $y_p = \frac{1}{9}e^{-4x}$. Így az általános megoldás:

$$y = C_1e^{-4x}\cos 3x + C_2e^{-4x}\sin 3x + \frac{1}{9}e^{-4x}.$$

i) A homogén általános megoldása $Y = C_1+C_2e^{-2x}$. Megint rezonancia van, így az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p = Ax^2 + Bx$ alakban keressük. Visszahelyettesítve ebből $A = \frac{1}{2}$ és $B = 1$ adódik, így az általános megoldás

$$y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{x^2}{2} + x.$$

j) Most $Y = C_1\sin x + C_2\cos x$. Rezonancia miatt az $y_p = Ax\sin x + Bx\cos x$ függvényt használjuk az inhomogén egy partikuláris megoldásának megkereséséhez. Ekkor $y_p = -\frac{1}{2}x\cos x$ adódik, és az általános megoldás:

$$y = C_1\sin x + C_2\cos x - \frac{1}{2}x\cos x.$$

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket!
   a) $y^{(4)} - 8y''' + 16y'' = 2x - 9$
   b) $y'' + y = 2\sin x\cos x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$
   c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$

Megoldás a) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 16\lambda^2 = 0$, melynek 0 is és 4 és kétszeres gyöke. Így a hozzátartozó homogén differenciálegyenlet általános megoldása $Y = C_1x + C_2 + (C_3x + C_4)e^{4x}$. Külső rezonancia miatt az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p = Ax^3 + Bx^2$ alakban keressük, melyből $A = \frac{1}{48}$ és $B = -\frac{1}{4}$. Tehát az inhomogén általános megoldása

$$y = C_1x + C_2 + (C_3x + C_4)e^{4x} + \frac{x^3}{48} - \frac{x^2}{4}.$$

b) A homogén differenciálegyenlet általános megoldása $Y = C_1\sin x + C_2\cos x$. Mivel $2\sin x\cos x = \sin 2x$, nincs rezonancia, és az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p = A\sin 2x+B\cos 2x$ alakban keressük. Ebből $y_p = -\frac{1}{2}\sin 2x$, és $y = C_1\sin x+C_2\cos x-\frac{1}{3}\sin 2x$. A keresett partikuláris megoldás megtalálásához felírjuk a kapott általános megoldásra a megadott feltételeket. Ebből $C_2 = 1$ és $C_2 - \frac{2}{3} = 1$ adódik, tehát a keresett partikuláris megoldás

$$y_{\text{part}} = \frac{5}{3}\sin x + \cos x - \frac{1}{3}\sin 2x.$$

c) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = \lambda^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 2)$, melynek gyökei $-1, 1, 2$. Tehát a homogén differenciálegyenlet általános megoldása $Y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x}$. Rezonancia miatt az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p = Axe^{2x} + Be^{-2x}$ alakban keressük. Visszahelyettesítve $A = \frac{1}{6}$ és $B = -\frac{1}{24}$, tehát az inhomogén általános megoldása

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x} + \frac{x}{6}e^{2x} - \frac{1}{24}e^{-2x}.$$