Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 7. hét

1. A definíció alapján számoljuk ki a következő függvények Laplace-transzformáltját:

a) $a(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t = 11 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ b) $b(t) = \begin{cases} 3 & \text{ha } t \in [11, 12] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

c) $c(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t > 11 \\ 0 & \text{ha } t \leq 11 \end{cases}$ d) $d(t) = \begin{cases} t - 11 & \text{ha } t > 11 \\ 0 & \text{ha } t \leq 11 \end{cases}$

Megoldás a) $A(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} a(t)\, dt = 0$, mert az integrálandó függvény egy pont kivételével nulla.
b) $B(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} b(t)\, dt = \int\limits_{11}^{12} 3e^{-st}\, dt = \left[3\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{11}^{12} = 3\frac{e^{-11s} - e^{-12s}}{s}$.
c) $C(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} c(t)\, dt = \int\limits_{11}^\infty e^{-st}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{11}^{b} e^{-st}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{11}^{b} = \lim\limits_{b\to\infty} \left(-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{e^{-11s}}{s} \right) = \frac{e^{-11s}}{s}$.
d) $D(s) = \int\limits_{11}^\infty e^{-st}(t-11)\, dt = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{11}^{b} e^{-st}(t-11)\, dt == \lim\limits_{b\to\infty} \left(\left[(t-11)\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{11}^{b} - \int\limits_{11}^{b} \frac{e^{-st}}{-s}\, dt \right) = \lim\limits_{b\to\infty} \left[(t-11)\frac{e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_{11}^{b} = \lim\limits_{b\to\infty} \left(-(b-11)\frac{e^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} + \frac{e^{-11s}}{s^2} \right) = \frac{e^{-11s}}{s^2}$

2. Keressük meg a következő függvények Laplace-transzformáltját:

a) $7\sin 3t$ b) $6t^2 + 3t - 2$ c) $t\cos 7t$ d) $e^{2t}\sin 3t$

Megoldás a) A Laplace transzformáció linearitása, és a táblázatban szereplő függvényeket felhasználva $\mathcal{L}\{7\sin 3t\}(s) = 7\mathcal{L}\{\sin 3t\}(s) = 7 \cdot \frac{3}{s^2+3^2} = \frac{21}{s^2+9}$.
b) Hasonlóan: $\mathcal{L}\{6t^2 + 3t - 2\}(s) = 6\mathcal{L}\{t^2\} + 3\mathcal{L}\{t\} - 2\mathcal{L}\{1\} = \frac{12}{s^3} + \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s}$.
c) Most $\mathcal{L}\{t\cos 7t\} = \frac{s^2-49}{(s^2+49)^2}$.
d) $\mathcal{L}\{e^{2t}\sin 3t\} = \frac{3}{(s-2)^2+9}$.

3. Számoljuk ki a következő függvények inverz Laplace-transzformáltját:

a) $\dfrac{3}{s} + \dfrac{1}{s-5} - \dfrac{7}{s-2}$ b) $\dfrac{11}{s-3} + \dfrac{4}{s^2-25}$ c) $\dfrac{7}{s^2+4}$ d) $\dfrac{s+4}{s^2+9}$

e) $\dfrac{3}{s^2+4s+14}$ f) $\dfrac{4}{s^2+2s}$ g) $\dfrac{3}{s^3+2s^2}$

Megoldás a) A Laplace transzformáció linearitása miatt, és minthogy $\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$, valamint általánosabban $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$, a megoldás $3 + e^{5t} - 7e^{2t}$.
b) Mivel $\frac{11}{s-3} + \frac{4}{s^2-25} = 11 \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{s^2-25}$, a táblázatban feltüntetett Laplace-transzformáltak felhasználásával a megoldás $11e^{3t} + \frac{4}{5}\,\mathrm{sh}(5t)$.
c) Hasonlóan, a megoldás $\frac{7}{2}\sin(2t)$.
d) Átalakítva a megadott függvényt: $\frac{s+4}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+9} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{s^2+9}$, a megoldás $\cos(3t) + \frac{4}{3}\sin(3t)$.
e) Teljes négyzetté alakítunk: $\frac{3}{s^2+4s+14} = \frac{3}{(s+2)^2+10} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{(s+2)^2+10}$, tehát a megoldás $\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot e^{-2t}\sin\left(\sqrt{10}t\right)$.
f) Itt $\frac{4}{s^2+2s} = 4\frac{1}{(s+1)^2-1} = 4e^{-t}\,\mathrm{sh}\, t$. A megoldás parciális törtekre bontással is megkapható.
g) Parciális törtekre bontással: $\frac{3}{s^3+2s^2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+2}$. Ebből a megoldás $-\frac{3}{4} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4}e^{-2t}$.

4. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket. (Segítség: vegyük mindkét oldal Laplace-transzformáltját, oldjuk meg az így kapott algebrai egyenletet, majd a megoldásnak keressük meg az inverz Laplace-transzformáltját!)
   a) $y' = y, \qquad y(0) = 3$
   b) $y' = 7y, \qquad y(0) = -1$
   c) $y'' = -y, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = -2$
   d) $y'' = -y, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
   e) $2y' - y = 0, \qquad y(0) = 1/2$
   f) $y' + 7y = 6, \qquad y(0) = 0$
   g) $2y' + y = e^{2t}, \qquad y(0) = 1$
   h) $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
   i) $y'' + 2y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
   j) $y' + y = \sin 3t, \qquad y(0) = 0$

Megoldás a) Legyen $\mathcal{L}\{y\}(s) = Y$. Ekkor $\mathcal{L}\{y'\}(s) = sY - y(0) = sY - 3$. Így a differenciálegyenlet $sY - 3 = Y$, amiből $Y = \frac{3}{s-1}$. Mivel $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$, Y inverz Laplace transzformáltja, azaz a keresett megoldás $y = 3e^t$.
b) Az egyenlet transzformáltja most $sY+1 = 7Y$, amiből $Y = \frac{-1}{s-7}$, tehát a megoldás $y = -e^{7t}$.
c) Az egyenlet transzformáltja $s^2Y + 2 = -Y$. Ebből $Y = \frac{-2}{s^2+1}$, vagyis $y = -2\sin t$.
d) Az egyenlet transzformáltja $s^2Y - s = -Y$, amiből $Y = \frac{s}{s^2+1}$. A keresett megoldás $y = \cos t$.
e) Az egyenlet transzformáltja $2\left(sY - \frac{1}{2}\right) - Y = 0$. Ebből $Y = \frac{1}{2s-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-\frac{1}{2}}$. Így a keresett megoldás $y = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}$.
f) Az egyenletet transzformálva adódik, hogy $sY + 7Y = \frac{6}{s}$. Ebből átrendezve és parciális törtekre bontással $Y = \frac{6}{s(s+7)} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{s} - \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{s+7}$. Ennek inverz transzformáltja $y = \frac{6}{7} - \frac{6}{7}e^{-7t}$.
g) Most az egyenletből $2(sY-1)+Y = \frac{1}{s-2}$, amit átrendezve azt kapjuk, hogy $Y = \frac{2s-3}{(s-2)(2s+1)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$. Ebből $y = \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-\frac{1}{2}t}$.
h) A transzformált egyenlet $s^2Y + 3sY + 2Y = \frac{1}{s+1}$, amiből $Y = \frac{1}{(s^2+3s+2)(s+1)} = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}$. Ennek az inverz transzformáltja $y = -e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t}$.
i) Az egyenlet $s^2Y - s + 2(sY - 1) + 5Y = 0$, amiből $Y = \frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+2}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2+4}$. Ebből a megoldás $y = e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$.
j) A transzformált egyenlet $sY + Y = \frac{3}{s^2+9}$, amiből $Y = \frac{3}{(s^2+9)(s+1)} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{-\frac{3}{10}s+\frac{3}{10}}{s^2+9} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{3}{10} \cdot \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{s^2+9}$, amiből a megoldás $\frac{3}{10}e^{-t} - \frac{3}{10}\cos(3t) + \frac{1}{10}\sin(3t)$.

5. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az alábbi kezdetiérték-problémákat:
   a) $x' = x + 4y,\ y' = 2x - y,\ x(0) = 2,\ y(0) = -2$
   b) $x' = 2x - 3y,\ y' = 3x + 2y,\ x(0) = 1,\ y(0) = 4$
   c) $x' = 5x - y,\ y' = 3x + y,\ x(0) = -1,\ y(0) = 2$
   d) $x' = -8y,\ y' = 2x,\ x(0) = 1,\ y(0) = -2$

Megoldás a) Mindkét egyenletet transzformáljuk, és használjuk az $X = \mathcal{L}\{x\}(s)$, $Y = \mathcal{L}\{y\}(s)$ jelöléseket. A transzformált egyenletrendszer: $sX - 2 = X + 4Y$, illetve $sY + 2 = 2X - Y$. Az egyenletrendszerből X-et és Y-t kifejezve $X = \frac{2}{s+3}$ és $Y = \frac{-2}{s+3}$ adódik, melyből a megoldás: $x = 2e^{-3t}$ és $y = -2e^{-3t}$.
b) Az egyenletrendszer transzformáltja $sX - 1 = 2X - 3Y$ és $sY - 4 = 3X + 2Y$, melynek megoldása $X = \frac{s-14}{(s-2)^2+9} = \frac{s-2}{(s-2)^2+9} - 4 \cdot \frac{3}{(s-2)^2+9}$, valamint $Y = \frac{4s-5}{(s-2)^2+9} = 4 \cdot \frac{s-2}{(s-2)^2+9} + \frac{3}{(s-2)^2+9}$. Így az eredeti differenciálegyenlet-rendszer megoldása $x = e^{2t}\cos(3t) - 4e^{2t}\sin(3t)$ és $y = 4e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\sin(3t)$.

c) Az egyenletrendszer transzformáltja $sX + 1 = 5X - Y$ és $sY - 2 = 3X + Y$, melynek megoldása $X = \frac{-s-1}{s^2-6s+8} = \frac{-s-1}{(s-2)(s-4)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s-4}$ és $Y = \frac{2s-13}{s^2-6s+8} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s-4}$. Tehát az eredeti egyenletrendszer megoldása $x = \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{5}{2}e^{4t}$, illetve $y = \frac{9}{2}e^{2t} - \frac{5}{2}e^{4t}$.
d) A transzformált rendszer $sX - 1 = -8Y$ és $sY + 2 = 2X$. Ennek megoldása $X = \frac{s+16}{s^2+16} = \frac{s}{s^2+16} + 4 \cdot \frac{4}{s^2+16}$, és $Y = \frac{-2s+2}{s^2+16} = -2 \cdot \frac{s}{s^2+16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{s^2+16}$. Tehát az eredeti rendszer megoldása $x = \cos(4t) + 4\sin(4t)$, és $y = -2\cos(4t) + \frac{1}{2}\sin(4t)$.