Megoldás

2023.06.14.

(A) Mátrixra: Legyen A egy $(n\times n)$-es mátrix. Ha valamely $\underline{v}\neq\underline{0}$ vektorra és $\lambda\in\mathbb{R}$ számra $A\underline{v}=\lambda\underline{v}$ teljesül, akkor λ-t A sajátértékének, $\underline{v}$-t A egy λ-hoz tartozó sajátvektorának nevezzük. (Lineáris transzformációra analóg)

(B) Egy n-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása előáll, mint a hozzátartozó homogén differenciálegyenlet általános megoldásának és az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának összege.

(C) Egy $\{f_n(x)\}$ függvénysorozat konvergenciatartománya azon $x\in\mathbb{R}$ számok halmaza, melyekre az $\{f_n(x)\}$ sorozat, mint számsorozat, konvergens.

(1)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 7 & 14 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \lambda \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2-s_1 \\ s_3-s_1 \\ s_4-2s_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-16 \end{array}\right]$$

Ha $\lambda\neq 16$, nincs megoldás. Tegyük fel, hogy $\lambda=16$.

$$\lambda=16 \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2/3 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} s_1-2s_3 \\ s_2-s_3 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$x_1=4-x_3-2x_4$

$x_2=2-x_3-x_4$

$x_3, x_4\in\mathbb{R}$ tetszőleges

(2)

$$\det A=\cos x\cdot\cos x\cdot 1+0+0-(-\sin x)\sin x\cdot 1-0-0=\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

$$A^T=\begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \operatorname{adj} A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{\operatorname{adj} A}{\det A}=\begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

③ $y'\cos x + y\sin x = 1$

Ez egy inhomogén, elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet, kanonikus alakja: $y' + \mathrm{tg}x \cdot y = \frac{1}{\cos x}$. A hozzá tartozó homogén diff. egyenlet általános megoldása: $Y = C \cdot e^{-\int \mathrm{tg}x\,dx} = C \cdot e^{\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx} = C \cdot e^{\ln|\cos x|} = C \cdot \cos x$.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $y_p = k(x) \cdot \cos x$ alakban keressük. Ekkor $y_p' = k' \cdot \cos x - k \cdot \sin x$. Behelyettesítve ebből $k' \cos x = \frac{1}{\cos x}$ $\Rightarrow$ $k' = \frac{1}{\cos^2 x}$, amiből $k(x) = \mathrm{tg}x$ megfelelő. Ekkor $y_p = \mathrm{tg}x \cdot \cos x = \sin x$

A differenciálegyenlet általános megoldása $y = Y + y_p = C \cdot \cos x + \sin x$.

A keresett partikuláris megoldásra $y(\pi) = 1$ teljesül. Ebből

$C \cos\pi + \sin\pi = 1 \Rightarrow C = -1$. Tehát a keresett partikuláris megoldás

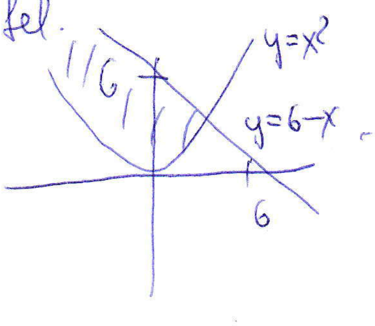
$y_{part.} = \sin x - \cos x$.

④ Ez egy áll. együtthatós homogén, 3-rendű lineáris differenciálegyenlet. A karakterisztikus egyenlete: $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-2)^2 = 0$, tehát a gyökök $\lambda_1 = 0$ 1-szeres multiplicitással és $\lambda_2 = 2$ 2-szeres multiplicitással.

A tanultak alapján ekkor $e^{0x} = 1$, e^{2x}, $x \cdot e^{2x}$ a megoldások egy alaprendszere, azaz az általános megoldás $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$.

⑤ $f'_x(x,y) = \frac{2x}{e^y}$ és $f'_y(x,y) = \frac{2y \cdot e^y - (x^2+y^2)e^y}{(e^y)^2} = \frac{(2y - x^2 - y^2)}{e^y}$ folytonos függvények, tehát f totálisan deriválható minden pontban, speciálisan a $P(2;0)$-ban is. Tehát itt az iránymenti deriváltja $(\mathrm{grad} f)(P)$ irányában maximális és ekkor értéke $|(\mathrm{grad} f)(P)|$. Jelen esetben $\mathrm{grad} f = (f'_x, f'_y) = \left(\frac{2x}{e^y}, \frac{2y - x^2 - y^2}{e^y}\right)$, amiből $(\mathrm{grad} f)(P) = (4;-4)$. Tehát az iránymenti derivált maximuma $|(4;-4)| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$, és ezt a $(4;-4)$ vektorral megegyező irányban veszi fel.

⑥



Számoljuk ki a két görbe metszéspontjait: $x^2 = 6 - x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 2$.

Tehát

$$\iint_T xy\,dx\,dy = \int_{-3}^{2}\left(\int_{x^2}^{6-x} xy\,dy\right)dx = \int_{-3}^{2}\left[\frac{x\cdot y^2}{2}\right]_{x^2}^{6-x}dx = \int_{-3}^{2}\frac{x\cdot(6-x)^2}{2}-\frac{x^5}{2}\,dx =$$

$$= \int_{-3}^{2}\frac{x^3}{2}-6x^2+18x-\frac{x^5}{2}\,dx = \left[\frac{x^4}{8}-2x^3+9x^2-\frac{x^6}{12}\right]_{-3}^{2} = -\frac{1625}{24}$$

(nem kell közös nevezőre hozni a végén)

(7) A hatványsor középpontja $c=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2}{n\cdot 3^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}\cdot\frac{3}{\sqrt[n]{3}}} = \frac{1}{3},$$ tehát a konvergenciasugár $R=3$.

$x=3$ esetén: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\cdot 3^{n-1}}\cdot 3^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\cdot 3^{n-1}}\cdot 3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n} = 6\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergens (harmonikus sor)

$x=-3$ esetén: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\cdot 3^{n-1}}\cdot(-3)^n = 6\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ egy váltakozó előjelű sorozatból alkotott sor, melynek elemei abszolút értékben csökkenve tartanak 0-hoz. Tehát a sor Leibniz-típusú, így konvergens. Azaz a konvergenciatartomány: $[-3;3)$.