Megoldás

2023.06.28.

(A) A $v_1,\dots,v_k \in V$ vektorok a V vektortér egy generátorrendszere, ha V bármely vektora előáll, mint a $v_1,\dots,v_k$ vektorok egy lineáris kombinációja

(B) Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara $\varrho>0$. Ekkor

$$\frac{1}{\varrho}=\limsup \sqrt[n]{|a_n|}=\limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

(C) Legyen az f n-változós függvénynek lokális szélsőértéke P_0-ban. Ha f minden változója szerint parciálisan deriválható P_0-ban, akkor minden parciális deriváltja P_0-ban 0.

(1)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\2&-1&-2&a^2\\-1&-7&-11&a\end{array}\right]\sim\begin{array}{c}s_1\\s_2-2s_1\\s_3+s_1\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&-5&-8&a^2-8\\0&-5&-8&a+4\end{array}\right]\sim\begin{array}{c}s_1\\s_2\\s_3-s_2\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&-5&-8&a^2-8\\0&0&0&a-a^2+12\end{array}\right].$$

Az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha $a-a^2+12\neq 0$. Tegyük fel, hogy $a-a^2+12=0$. Ebből $a^2-a-12=0 \Rightarrow (a-4)(a+3)=0 \Rightarrow a=4$ vagy $a=-3$.

Ha $a=4$, akkor

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&-5&-8&8\\0&0&0&0\end{array}\right]\sim\begin{array}{c}s_1+\frac{2}{5}s_2\\s_2\\s_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{1}{5}&\frac{36}{5}\\0&-5&-8&8\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow \begin{array}{l}x=\frac{36}{5}+\frac{z}{5}\\ y=-\frac{8}{5}-\frac{8}{5}z\end{array},\ z\in\mathbb{R} \text{ választható}$$

Ha $a=-3$, akkor

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&-5&-8&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\sim\begin{array}{c}s_1+\frac{2}{5}s_2\\s_2\\s_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{1}{5}&\frac{22}{5}\\0&-5&-8&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow \begin{array}{l}x=\frac{22}{5}+\frac{z}{5}\\ y=-\frac{1}{5}-\frac{8}{5}z,\ z\in\mathbb{R} \text{ választható}\end{array}$$

(2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&0&0\\2&3&0&0&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\sim\begin{array}{c}s_1\\s_2-2s_1\\s_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&0&0\\0&-3&4&-2&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\sim\begin{array}{c}s_1-3s_3\\s_2+3s_3\\s_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&-3\\0&0&1&-2&1&3\\0&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}s_1-s_2\\s_2\\s_3+s_2\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-1&-6\\0&0&1&-2&1&3\\0&1&0&-2&1&4\end{array}\right]\sim\begin{array}{c}s_1\\s_3\\s_2\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-1&-6\\0&1&0&-2&1&4\\0&0&1&-2&1&3\end{array}\right]\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1&-6\\-2&1&4\\-2&1&3\end{bmatrix}$$

(3) $y \neq 0$ esetén $\frac{y'}{y^3}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{y^3}\,dy=\frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2y^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}C \Rightarrow \frac{1}{y^2}=C-2\sqrt{1+x^2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{1}{C-2\sqrt{1+x^2}}},$$

vagy $y=0$. Ezek közül, ha $y(0)=1$, akkor $y=\sqrt{\frac{1}{C-2\sqrt{1+x^2}}}$ alakú, és behelyettesítve $1=\sqrt{\frac{1}{C-2\cdot 1}} \Rightarrow C=3$, azaz a keresett p. megoldás $y_p=\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}$.

(4) Ez egy állandó együtthatós, másodrendű, lineáris inhomogén differenciálegyenlet. A hozzátartozó hom. egyenlet: $y''-3y'+2y=0$. Ennek karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=2 \Rightarrow y=C_1\cdot e^x+C_2\cdot e^{2x}$. Az inhomogén egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszer alapján $y_p=A\sin x+B\cos x$ alakban keressük. Ebből $y_p'=A\cos x-B\sin x$, $y_p''=-A\sin x-B\cos x \Rightarrow -A\sin x-B\cos x-3(A\cos x-B\sin x)+$
$+2(A\sin x+B\cos x)=\sin x \Rightarrow (A-3B)\sin x+(B-3A)\cos x=\sin x \Rightarrow$

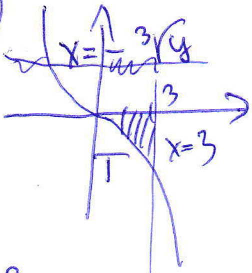
$\Rightarrow A+3B=1,\ B-3A=0 \Rightarrow B=3A$ és $A+9A=1 \Rightarrow A=+\frac{1}{10},\ B=+\frac{3}{10} \Rightarrow$

$y_p=+\frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x \Rightarrow y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x$

(5) $f'_x(x;y)=\frac{1}{y^2}+e^{x+2y}$, $f'_y(x;y)=-\frac{2x}{y^3}+2\cdot e^{x+2y} \Rightarrow f'_x(2;-1)=2,\ f'_y(2;-1)=6,\ f(2;-1)=3$

Tehát az érintősík egyenlete: $z=3+2\cdot(x-2)+6\cdot(y+1) \Rightarrow z=2x+6y+5$.

(6)



az integrálási határok: $0\le x\le 3$, $-x^3\le y\le 0$. Tehát:

$$\iint_T \frac{1}{\sqrt[3]{y}\cdot(x^3+1)}\,dx\,dy=\int_0^3\left(\int_{-x^3}^0\frac{1}{\sqrt[3]{y}(x^3+1)}\,dy\right)dx=\int_0^3\left(\int_{-x^3}^0\frac{y^{-1/3}}{x^3+1}\,dy\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left[\frac{y^{2/3}/(2/3)}{x^3+1}\right]_{-x^3}^0 dx=\int_0^3\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{(-x^3)^{2/3}}{x^3+1}\right)dx=\int_0^3-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{x^3+1}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{3x^2}{x^3+1}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln|x^3+1|\right]_0^3=-\frac{1}{2}(\ln 28-\ln 1)=-\frac{\ln 28}{2}.$$

7

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} \cdot x^n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \frac{1}{2} e^{2x}$$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, felhasználva az e^x függvény Maclaurin-sorát. ~~Tehát~~ A fenti hatványsor konvergenciatartománya ez alapján $\mathbb{R}$.

(a konvergenciatartomány kiszámolása 4 pontot ér)