

MATEMATIKA BSC ZÁRÓVIZSGA
ALGEBRA, ANALÍZIS, DISZKRÉT MATEMATIKA, GEOMETRIA TÉTELSOR
2015. szeptembertől induló évfolyamok számára

ALGEBRA

1. Számelmélet

Oszthatóság, egység, legnagyobb közös osztó definíciója. Maradékos osztás tétele, euklideszi algoritmus. Felbonthatatlan szám, prímszám, számelmélet alaptétele. Kongruencia definíciója, elemi tulajdonságai, maradékosztály, teljes és redukált maradékrendszer. Komplex számok, polinomok, az algebra alaptétele.

2. Lineáris egyenletrendszerek

Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszer, mátrix rangja, megoldhatóság feltétele, megoldások száma. \mathbb{R}^n , vektortér, altér, lineáris függetlenség, összefüggőség, bázis, dimenzió. Mátrix sor-, oszlop- és nulltere. Gauss-elimináció, elemi sorműveletek, lépcsős alak, redukált lépcsős alak. Mátrixműveletek és tulajdonságaik, mátrix inverze, transzponáltja.

3. Lineáris transzformációk

Lineáris leképezés fogalma, mátrix alakja, bázisátmenet. Sajátérték, sajátvektor, diagonalizáció. Az euklideszi skalárszorzat és norma. Ortogonális és szimmetrikus mátrixok. Kvadratikus alakok definitisége. Skalárszorzat a komplex számok és véges testek felett. Bilineáris formák, standard alak, főtengety-tétel.

4. Mátrixfelbontások

Jordan-féle normálalak, Cayley–Hamilton-tétel. Mátrixfelbontások: PLU, SVD, QR, spektrálfelbontás. A felbontási eljárások főbb lépései és egymással vett kapcsolatuk.

5. Csoportelmélet

Csoport, részcsoporthoz, normálosztó, faktorcsoport, homomorfizmus, homomorfizmustétel. Elem és csoport rendje, Lagrange-tétel, Cauchy-tétel. Ciklikus csoport részcsoporthoz. Véges Abel-csoportok alaptétele, p-csoportok, Sylow-részcsoporthoz, Sylow-tételek.

6. Polinomgyűrűk és testek

Gyűrű, részgyűrű, ideál, faktorgyűrű. Test, karakterisztika, prímtest. $\mathbb{F}[x]$ -ben és \mathbb{Z} -ben: maradékos osztás, főideálgyűrű, maximális ideálok és ezekkel vett faktorok. Testbővítés foka, szorzástétel, egyszerű algebrai bővítés egy adott testbővítésben, illetve ilyenek konstrukciója polinomgyűrű faktorgyűrűjeként. Transzcendens bővítés. Véges testek.

ANALÍZIS

1. Differenciálás

Egy- és többváltozós függvény differenciálhatósága. Parciális és iránymenti derivált. Deriválási szabályok. Inverzfüggvény tétel, implicitfüggvény-tétel. Szélsőérték-keresés. Primitív függvény keresésének technikái. Normált terek között ható leképezések deriválása.

2. Integrálás egy- és többváltozóban

Jordan-mérték, Riemann-integrál. Lebesgue-mérték, mérhető függvények, Lebesgue-integrál. Beppo-Levi tétel, Fatou-lemma, Lebesgue-féle majorált konvergencia tétel, Fubini-tétel. L_p terek. Görbementi integrál, felszíni integrál. Integrál-átalakító tételek.

3. Komplex változós analízis

Komplex differenciálhatóság, kapcsolata a kétváltozós differenciálhatósággal. Differenciálható függvények tulajdonságai. Komplex vonalintegrál. Cauchy-féle tételek és következményeik. Szingularitások osztályozása. Residuum, residuum-tétel. Komplex változós függvény Laurent-sora.

4. **Sorok**

Numerikus sorok. Hatványsorok, konvergenciasugár, Cauchy-Hadamard-tétel. Függvénysorozatok és függvénysorok, pontonkénti és egyenletes konvergenciája és következményei. Taylor-sorfejtés hibataggal. Nevezetes függvények Taylor-sorai. Taylor-sorba fejthető függvények. Fourier-sorok: konvergencia-tételek.

5. **Metrikus terek, normált terek**

Metrikus terek topológiája, teljes metrikus tér. Norma, normált terek között ható lineáris leképezések folytonossága, operátornorma. Korlátos lineáris operátorok és funkcionálok. Hahn-Banach tétel és néhány következménye. Banach-Steinhaus tétel. Nyílt leképezések tétele és zárt gráf-tétel. Banach tétele korlátos inverz létezéséről.

GEOMETRIA

1. **Konvex poliéderek**

- n-dimenziós konvex poliéder definíciója (félterek metszete vs csúcspont halmaz konvex burka)
- n-dimenziós szabályos poliéderek osztályozása
- 3-dimenziós Euler tétel, Platoni testek létezése

2. **Nemeuklideszi geometriák**

- háromszög szögösszege és területe hiperbolikus és szférikus geometriában (Legendre tételek)
- modelltávolságok (kettősviszony)
- homogén koordináták és a valós projektív sík (Desargues tétel, Pappos tétel)

3. **Görbék és felületek differenciálgeometriája a 3-dimenziós euklideszi térben**

- A görbeelmélet alaptétele, a felületelmélet alaptétele, theorema egregium és az ezekben szereplő fogalmak ismertetése.

DISZKRÉT MATEMATIKA ÉS ALGORITMUSOK

1. **Adatrendezési módszerek. A keresés alapvető módszerei, adatszerkezetei**

Kiválasztásos, beszúrásos, gyors-, összefésülős rendezések, alsó becslés rendezésnél az összehasonlítások számára, ládarendezés, radix rendezés. Bináris fa bejárások, bináris keresőfák, piros-fekete-fák, 2-3-fák. Vödörös hashelés, nyitott címzésű hashelés.

2. **Legrövidebb utak gráfokban**

Szélességi keresés (BFS), Dijkstra, Ford és Floyd algoritmusai.

3. **Minimális súlyú feszítőfák keresése gráfokban, maximális méretű párosítások keresése páros gráfokban, folyamok**

Minimális költségű feszítőfák fogalma, mohó algoritmus, Kruskal tétele. Páros gráfok fogalma, párosítás páros gráfban, Hall és Frobenius tétel, alternálóutas algoritmus. Hálózati folyamok, Ford-Fulkerson-tétel, javítóutas algoritmus.

4. **Az NP fogalma, nevezetes NP-beli feladatok. NP-teljesség**

Az NP nyelvosztály, Karp-redukció, NP-teljesség, Cook-Levin-tétel, nevezetes NP-teljes nyelvek: 3SAT, HAM, 3SZÍN, MAXKLIKK, MAXFTL, RH, PARTÍCIÓ

5. **Gráfok színezései és bejárásai, síkgráfok**

Gráfok színezése, kromatikus szám, klikkszám, alsó és felső korlátok a kromatikus számra. Élgráfok, élkromatikus szám, Vizing tétel, König tétel. Szélességi és mélységi bejárás, DAG. Síkgráfok, Euler formula, négyszíntétel, topologikus izomorfia, Kuratowski tétel, Fáry-Wagner tétel.