

# Gráfok spektrálelmélete és inverz feladatok

BSc Szakdolgozat - kivonat

Homoki Tibor

A szakdolgozat témája annak vizsgálata, hogy gráfelméleti illetve lineáris algebrai ismeretek segítségével hogyan fogalmazhatók meg a folytonos matematika bizonyos a differenciálegyenletekhez kapcsolódó konkrét feladataihoz hasonló problémák, és a diszkrét esetben megfogalmazhatók-e az eredetiekkel egyező tulajdonságokat leíró tételek. Figyelmünk elsősorban az inverz sajátérték-feladatokra irányult, amelyeknél célunk az egyenletekben szereplő differenciáloperátorok azonosítása volt sajátértékeik ismeretében. Mivel a  $\Delta$  operátor természetes, véges differenciákkal való közelítése során a folytonos tartományok szerepét a gráfok veszik át, ezért kézenfekvően adódott, hogy a kérdéses differenciálegyenleteket gráfokon vizsgáljuk.

Ezen okból először áttekintettük a gráfokhoz kapcsolódó Laplace-mátrix legfontosabb ismert tulajdonságait, valamint sajátértékeinek kapcsolatát a gráf egyes tulajdonságaival. Ezután szintén a téma irodalmára hagyatkozva néhány később használandó analízisbeli fogalom (integrál, iránymenti derivált, gradiens, Laplace operátor) gráfokon vett megfelelőjének definícióját adtuk meg, és rámutattunk a köztük lévő kapcsolatra is.

Az önálló eredményeket leíró rész Ambarzumian tételének ismertetésével kezdődik: ha a  $-y''(x) + Q(x)y(x) = \lambda y(x)$   $x \in [0, \pi]$ ,  $y'(0) = y'(\pi) = 0$  feladat sajátértékei  $n^2$ ,  $n \geq 0$  és  $Q(x)$  folytonos, akkor  $Q \equiv 0$ . A továbbiakban ezen feladat diszkrét verziójával foglalkoztunk, melyhez definiáltuk gráfok Neumann-peremfeltétel melletti Laplace-operátort  $(-\Delta_\omega^N)$  és bevezettük a  $-\Delta_\omega^N + Q$  diszkrét Schrödinger-operátort. Ezen jelölések mellett beláttuk a következő tételt:

**Tétel.** *Legyenek a  $-\Delta_\omega^N f + Qf = \lambda f$  feladatban  $-\Delta_\omega^N + Q$  sajátértékei  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ , míg  $-\Delta_\omega^N$  sajátértékei  $\nu_0 \leq \nu_1 \leq \dots \leq \nu_{n-1}$ , ahol  $n$  a vizsgált  $S$  gráf csúcsainak száma. Ekkor, ha  $\lambda_0 = \nu_0$  és  $\int_S Q(x) d_\omega = 0$ , akkor  $Q \equiv 0$ .*

Ezt követően kétféle módon vizsgáltuk a feladat stabilitását: a fenti tételben szereplő  $Q$  potenciálfüggvény négyzetének integráljára határoztunk meg felső becsléseket a bemenő adatok -  $-\Delta_\omega^N + Q$  sajátértékei,  $Q$  integrálja - kis változásának függvényében. Először a Perron-Frobenius tétel felhasználásával új bizonyítást mutattunk a diszkrét

Ambarzumian-tételre, melyben leírtak továbbgondolásával olyan becslést adtunk  $Q^2$  integrálátlagára, amely akkor lesz használható, ha a bemenő adatok  $\epsilon$ -nyi változása legfeljebb akkora nagyságrendű, mint a gráf átmérőjének reciproka. A második módszer bemutatásakor előbb ismertettük, hogy hogyan lehet a Perron-Frobenius tételben szereplő pozitív koordinátájú sajátvektor komponenseit alulról becsülni, majd ezt használva egy, a  $Q$  függvény maximális és minimális értékeitől függő stabilitási becslést fogalmaztunk meg.

A dolgozat befejező részében Borg tételét tekintettük: ha a  $-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$  feladat Dirichlet-Neumann- illetve Dirichlet-Dirichlet-peremfeltételek melletti sajátértékei ismertek, valamint  $q$  folytonos függvény, akkor  $q$  egyértelmű. A diszkrét tétel megtalálásához feltettük, hogy az  $y$  függvény  $n + 1$  pontban ismert, és a véges differenciák módszerét alkalmazva egy olyan problémához jutottunk, ahol két  $n \times n$ -es tridiagonális mátrix sajátértékeinek ismeretében kellett a mátrixok főátlóbeli elemeire (a  $q$  potenciálfüggvény  $n$  különböző pontbeli értékei) való következtetéseket levonni. Beláttuk a következő tételt: ha a két különböző peremfeltételhez tartozó differenciálegyenlet diszkretizálása során adódó két mátrix sajátértékei ismertek, akkor a diszkrét feladathoz tartozó potenciálvektor egyértelmű. Ezután annak megválaszolására törekedtünk, hogy milyen információk elegendőek ahhoz, hogy a potenciálvektort egyértelműen meghatározhassuk. Láttuk, hogy egy mátrix sajátérték-sorozata nem elég, de ha a potenciálvektor szimmetrikus vagy az egyik fele ismert, abból már következik az unicitás. Ha a potenciálról semmit nem tudunk, a diszkrét Borg tétel élesítéseként beláttuk, hogy ha két sajátérték-sorozat uniójából egyetlen sajátértéket elhagyunk, a többi adat még mindig elég az egyértelműséghez. További vizsgálatot igényel, hogy ennél kevesebb adatból azonosítható-e a potenciál.