SZAKDOLGOZAT KIVONAT

Ragadozó-zsákmány rendszerek stabilitásvizsgálata foltokon

Papp Artúr

Témavezető: Dr. Kiss Krisztina

egyetemi adjunktus

BME Matematika Intézet,

Differenciálegyenlet Tanszék

BME

2012

Absztrakt

Az igazi, matematikai alapokra építkező populáció dinamika Lotka és Volterra munkáival kezdődtek. Az évek során kinőtte magát az egyik legérdekesebb tudományterületek közé és mára a tudósok közkedvelt kutatási területe lett. Jelentősége az alkalmazhatóságában rejlik, ahogy a minket körülvevő világot tudjuk modellezni, segítségével könnyebben megérthetjük a természet dinamikáját.

A matematika, különösképpen a differenciálegyenletek játszanak nagyon fontos szerepet a kutatásokban. Régen a biológusokat egyáltalán nem foglalkoztatták a matematikai modellek, mára ez a szemlélet rohamosan megváltozott. Komplex problémák megértéséhez teljesen elengedhetetlenek a kvalitatív módszerek, és sokszor a számítógépes szimuláció az egyetlen mód hogy egy modellt részleteiben megvizsgáljunk. Így szükségszerűen kialakult a kutatók egy rétege, akik komoly matematikai hátterüket felhasználva vizsgálják a természet jelenségeit. Az egyik legnehezebb feladat a megfelelő modell felállítása egy adott problémára, ezért is mondják, hogy a modellezés sokkal inkább művészet mint tudomány.

A dolgozatban magasabb dimenziós ragadozó-zsákmány modelleket fogunk bemutatni. Ezeknek a modelleknek széles irodalmuk van, számos cikk és könyv jelenik meg a témával kapcsolatban. Sokszor ezek csak alacsonyabb dimenziós modellekkel foglalkoznak, mivel mind a vizsgálatot, mind a szimulációt jelentősen megnehezíti a magas dimenziószám. A dolgozat végére feltételt adunk, belső egyensúlyi helyzet esetén, az alábbi rendszer aszimptotikus stabilitására:

$$\left.\begin{array}{lcl}
\dot N(t,1) & = & f(N(t,1),P_1(t,1),\ldots,P_n(t,1)) + \delta_0\left(\sum_{j=2}^{k}\frac{\rho_0(P_1(t,j),\ldots,P_n(t,j))}{k-1}N(t,j) - \rho_0(P_1(t,1),\ldots,P_n(t,1))N(t,1)\right) \\
\dot P_i(t,1) & = & g(N(t,1),P_i(t,1)) + \delta_i\left(\sum_{j=2}^{k}\frac{\rho_i(N(t,j))}{k-1}P_i(t,j) - \rho_i(N(t,1))P_i(t,1)\right) \qquad i=1,\ldots,n \\
 & \vdots & \\
\dot N(t,k) & = & f(N(t,k),P_1(t,k),\ldots,P_n(t,k)) + \delta_0\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\rho_0(P_1(t,j),\ldots,P_n(t,j))}{k-1}N(t,j) - \rho_0(P_1(t,k),\ldots,P_n(t,k))N(t,k)\right) \\
\dot P_i(t,k) & = & g(N(t,k),P_i(t,k)) + \delta_i\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\rho_i(N(t,j))}{k-1}P_i(t,j) - \rho_i(N(t,k))P_i(t,k)\right) \qquad i=1,\ldots,n
\end{array}\right\}, \quad (1)$$

ahol

$$\left.\begin{array}{lcl} f(N,P_1,\ldots,P_n) & = & \epsilon N(t)\left(1-\dfrac{N(t)}{K}\right)-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{m_iN(t)P_i(t)}{a_iP_i(t)+N(t)} \\ g(N,P_i) & = & \dfrac{m_iN(t)P_i(t)}{a_iP_i(t)+N(t)}-\gamma_iP_i(t) \qquad i=1,\ldots,n \end{array}\right\}. \tag{2}$$

A belső egyensúlyi helyzet $\widetilde{E}$ pozitivitásához szükséges feltétel, hogy

$$\left.\begin{array}{lcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i-\gamma_i}{a_i} & < & \epsilon \\ m_i>\gamma_i & & i=1,\ldots,n \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Tétel 0.1. *A Jacobi mátrix előjelstabilis és $\widetilde{E}$ aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete az (1) rendszernek, ha*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i^2-\gamma_i^2}{a_im_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i-\gamma_i}{a_i}\left(1+\frac{\gamma_i}{m_i}\right)<\epsilon. \tag{4}$$

Tétel 0.2. *Ha a (4) feltétel teljesül, akkor rendszer Jacobi-mátrixa előjelstabilis és $\widetilde{E}$ aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete (1) rendszernek.*