

Stochastic representation of quantum spin systems

Sárkány Lőrinc

2012. május 11.

A kvantum Heisenberg modell egy gráf csúcsain ülő, kölcsönható spinek viselkedését írja le. A szilárdtestfizikában igen gyakran használják, mivel az egyik legegyszerűbb modellje a mágneseknek. Rengeteg hasznos és erős matematikai technikát fejlesztettek ki a modell vizsgálatára (pl. infravörös korlátok, kvantum korrelációs egyenlőtlenségek stb). Ennek ellenére nagyon sok, alapvető fontosságú nyitott kérdést nem sikerült még tisztázni, például ferromágneses esetben, három dimenzióban a fázisátalakulás létezése még nem bizonyított.

Újszerű megközelítés kell tehát a problémák tisztázásához. Egy lehetséges út a különféle sztochasztikus reprezentációk, mely egy mai is igen aktívan kutatott területe a matematikának.

Először röviden áttekintjük a téma tárgyalásához szükséges statisztikus fizikai alapokat, majd rátérünk két, egymással szoros kapcsolatban álló sztochasztikus reprezentáció tárgyalására.

Az első a véletlen keverés (random stirring process, RSP). Ki fog derülni, hogy a RSP-ben megjelenő véletlen permutáció ciklusstruktúrája teljes mértékben jellemzi a modell statisztikus viselkedését, például termodinamikai limeszben a fázisátmenet létezése végtelen ciklusok megjelenéséhez köthető. Ismertetjük O. Schramm egy tételét, mely szerint a megfelelően normált ciklus-hosszak eloszlása gyengén tart az 1 paraméterű Poisson-Dirichlet eloszláshoz.

Ezután rátérünk a második reprezentációra, a ciklikus idejű véletlen bolyongásra (CTRW). Pongyolán megfogalmazva a RSP-ben szereplő véletlen permutációt periodikusan folytatjuk az időben, az így előálló permutáció által generált pálya lesz a CTRW. Konstrukciójából adódóan a bolyongás rekurenciája szoros kapcsolatban áll a permutáció ciklusainak hosszával. A bolyongás rendelkezik egy paraméterrel (β). Minden gráfra elég kicsi β esetén a bolyongás rekurrens, viszont előfordulhat, hogy nagy β -ra a bolyongás tranzienssé válik.

Általános gráfra a tranziencia vizsgálata nehéz, így fákkal foglalkozunk. Két tételt ismeretünk. Az első (O. Angel) egy ügyes elágazó folyamatot vizsgálva megmutatja a tranzienciát. A módszer hátránya, hogy csak annyit tud megmutatni, hogy ha β benne van egy véges intervallumban, akkor tranziens a bolyongás (pedig azt várnánk, hogy a superkritikus β_k halmaza felülről nem korlátos).

A másik tétel (A. Hammond) a bolyongás mikroszkopikus részleteit is vizsgálja, így az előbbi hiányosságot kiküszöböli. Az eredeti bizonyításon sokat egyszerűsítettünk, ezt ismertetjük.