

SZAKDOLGOZAT
(Kivonat)

Diszkrét problémák a Nil térben

Schultz Benedek

Témavezető: Szirmai Jenő
docens
BME Matematika Intézet,
Geometria Tanszék

BME
2012

W. P. THURSTON vizsgálataiból ismert, hogy nyolc maximális egyszeresen összefüggő homogén Riemann tér (*Thurston geometria*) létezik:

Legyen (X, G) háromdimenziós homogén geometria, ahol X egyszeresen összefüggő Riemann tér G maximális egybevágóságscsoporttal, amely tranzitívan hat X -en kompakt pontstabilizátorokkal.

0.1. Tétel (Thurston). *Bármely az előbbi feltételekkel rendelkező (X, G) háromdimenziós homogén geometria ekvivalens az alábbi $(X, G = \text{Isom}(X))$ geometriák valamelyikével:*

$$E^3, H^3, S^3, \tilde{S}L_2R, \text{Sol}, \text{Nil}, S^2 \times R, H^2 \times R.$$

A szokásos állandó görbületű geometriák belső szerkezetét, speciális felületeit, diszkrét geometriáját alaposan vizsgálták, de főleg a hiperbolikus tér esetében még ma is sok nyitott kérdés vehető fel. Azonban a többi geometriában kevés ilyen jellegű vizsgálat történt, sok helyütt még az alapvető fogalmak és felületek tisztázása, felírása sem történt meg. A Thurston geometriák ilyen jellegű vizsgálatát MOLNÁR EMIL cikke tette lehetővé azzal, hogy megmutatta, hogy a nyolc geometria beágyazható a projektív térbe és így a geometriák az Euklideszi térünkben szemléltethetővé váltak.

Mindezek alapján érdekes lehet az egyes geometriák szerkezetének közelebbi feltérképezése. Dolgozatomban a Nil geometria egyes diszkrét problémáinak vizsgálatát és vizualizációját tűztük ki célul. Ez a geometria WERNER HEISENBERG nevezetes mátrixcsoportjához kapcsolódóan értelmezhető, amelyet az erős mágneses terek vizsgálata közben vett észre.

Dolgozatom első részét a Nil geometria projektív modeljének leírás teszi ki, először a sík geometriáinak projektív modeljeit ismertetem, majd analógia alapján a fogalmakat kiterjesztem a háromdimenziós térre.

A Nil geometria geodetikusanak meghatározásának leírása és a geodetikus gömb fogalmának bevezetése után bemutatok egy megoldást az inverz probléma megoldására, vagyis annak kiszámítására, hogy egy adott pontba induló geodetikusnak mik a paraméterei. Ez a kérdés kulcsfontosságú két pont távolságának kiszámításához. A megadott módszer segítségével ezután megvizsgálom a Nil tér ekvidisztáns felületeit, illetve Dirichlet-Voronoi celláit. Végezetül foglalkozom a Nil paraleloéderek egy másik bevezetési lehetőségével (hiszen a Dirichlet-Voronoi cellák is paraleloéderek), felsorolok két típust és elvégzem azok elemzését.