Differenciálszámítás és mátrixanalízis

Marenics János

Témavezető: Petz Dénes

2012. november 28.

A dolgozat célja a normált terek között ható függvények differenciálelméletének bemutatása, a klasszikus valós függvényanalízis fogalmainak erre az általánosabb környezetre való kiterjesztése, és egy nemtriviális példaként ezeknek mátrixfüggvények elemzésére való felhasználása.

Az első fejezet tartalmazza a differenciálelmélet precíz felépítését. Az első két szakaszban definiáljuk az elmélet alapfogalmait, és bebizonyítjuk a főbb tételeket. A harmadik szakaszban röviden tárgyaljuk az analitikus függvényeket és ezek egy fontos példáját. Az negyedik és ötödik szakaszban megmutatjuk, hogy egy függvény simasága általában öröklődik implicit- és inverzfüggvényeire, valamint egy ezekkel jól kombinálható általános változatát is bizonyítjuk az implicit- és inverzfüggvény-tételnek.

A második fejezet első szakasza a monotonitás fogalmát értelmezi bizonyos normált téren értelmezett függvényekre, és ad rá differenciális kritériumot. A második szakasz a konvexitásra ad hasonló feltételt a monotonitást is felhasználva. A harmadik szakaszban a lokális szélsőértékek létezésére adunk szükséges illetve elégséges feltételeket. Itt szerepel a feltételes szélsőértékkeresésben használt Lagrange-elv egy általános változata, szintén szükséges és elégséges feltételekkel.

A harmadik fejezetben az első kettő eredményeit használjuk fel mátrixfüggvények vizsgálatára. Ezeket leggyakrabban a holomorf függvénykalkulus segítségével szokták analitikus függvényekre értelmezni. Itt azonban pusztán önadjungált mátrixokra szorítkozva egy jóval nagyobb függvényosztályra bizonyítjuk, hogy simaságukat mátrixfüggvényeik is öröklik. Ehhez polinomiális approximációt és osztott differencia-függvényeket használunk. A második szakaszban az iránymenti deriváltat a kapott formulából levezetett ortogonális felbontással írjuk fel. A harmadik szakaszban megmutatjuk, hogy függvény monotonitása öröklődik mátrixfüggvényére a második fejezetben definiált értelemben, de ez gyengébb, mint az önadjungált mátrixok rendezéséből eredő mátrixmonotonitás fogalma. Végül a negyedik szakaszban az eddig bizonyítottak felhasználásaként kiszámítjuk egy mátrixfunkcionál két változatának konvex konjugáltját.